Exercice 5.11.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) =$

$= 12x(x+2)(x-1) \Rightarrow Z_{f'} = \{ -2 ; 0 ; 1 \}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		1	
sgn(f')	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- La fonction f est décroissante sur $]-\infty ; -2] \cup [0 ; 1]$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\dfrac{8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{ 0 \}$
- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-2		0		2	
sgn(f')	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$
variation de f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

- La fonction f est décroissante sur $[0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-4)} = \dfrac{x+2}{x^2-x-12}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 4\}$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2-x-12) - (x+2) \cdot (2x-1)}{(x+3)^2(x-4)^2} =$

$= \dfrac{x^2-x-12-(2x^2+3x-2)}{(x+3)^2(x-4)^2} = \dfrac{-x^2-4x-10}{(x+3)^2(x-4)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \emptyset$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-3		4	
sgn(f')	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$
variation de f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

- La fonction f est décroissante sur $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 4[\cup]4 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 4\}$

Exercice 5.12.

a) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x - 4$

- $ED = \mathbb{R}$
- Dérivée : $f'(x) = -3x^2 - 6x + 45 = -3(x^2 + 2x - 15) =$

$= -3(x+5)(x-3) \Rightarrow Z_{f'} = \{-5\,;3\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-5		3	
$\text{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

- La fonction f est croissante sur $[-5\,;3]$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{x}$

- $ED = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$
- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{(8x+3) \cdot x - (4x^2 + 3x + 1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{8x^2 + 3x - 4x^2 - 3x - 1}{x^2} =$

$= \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x^2} \Rightarrow Z_{f'} = \left\{ \pm\dfrac{1}{2} \right\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		$-1/2$		0		$1/2$	
$\text{sgn}(f')$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-1/2] \cup [1/2\,;+\infty[$

c) $f(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3)^2$

- $ED = \mathbb{R}$

- Dérivée : $f'(x) = (2x + 1)(x - 3)^2 + (x^2 + x - 2) \cdot 2(x - 3) \cdot 1 =$

$= (x - 3)[(2x + 1)(x - 3) + 2(x^2 + x - 2)] = (x - 3)(2x^2 - 5x - 3 + 2x^2 + 2x - 4) =$

$= (x - 3)(4x^2 - 3x - 7) = (x - 3)(4x - 7)(x + 1) \Rightarrow Z_{f'} = \{\, -1\,;7/4\,;3\,\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-1		$7/4$		3	
$\operatorname{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

- La fonction f est croissante sur $[-1\,;7/4\,] \cup [\,3\,;+\infty\,]$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

- $ED = \mathbb{R}$

- Dérivée : $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 + 16) - x \cdot 2x}{(x^2 + 16)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 16 - 2x^2}{(x^2 + 16)^2} = \dfrac{16 - x^2}{(x^2 + 16)^2} = \dfrac{(4 + x)(4 - x)}{(x^2 + 16)^2} \Rightarrow Z_{f'} = \{\pm 4\}$

- Tableau de croissance (ou de variation) :

x		-4		4	
$\operatorname{sgn}(f')$	$-$	0	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

- La fonction f est croissante sur $[-4\,;4\,]$