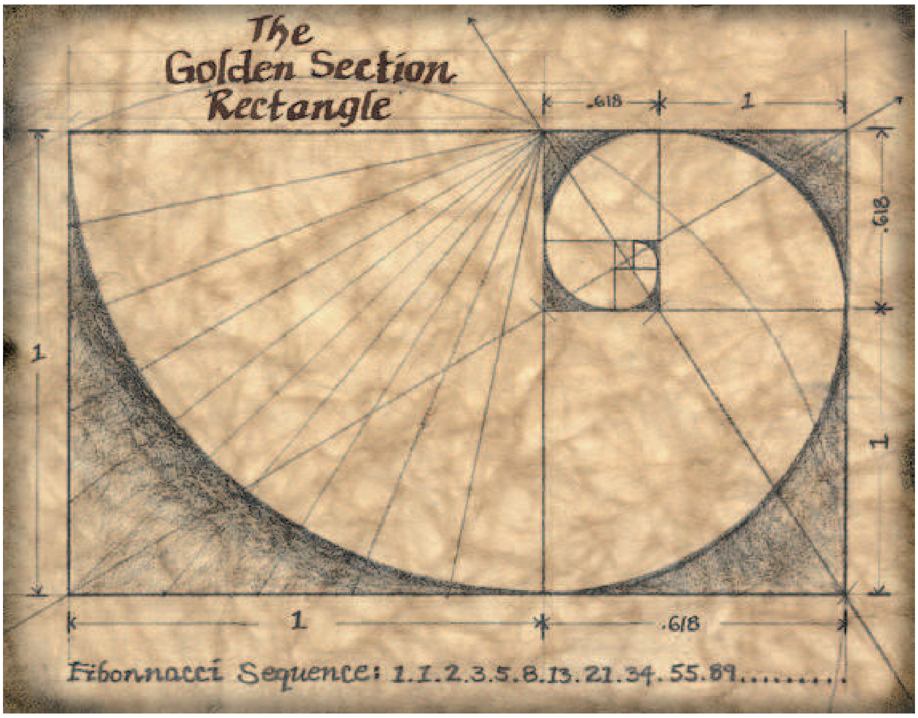
Mathématiques

ALGEBRE

1ère année Maturité
niveau standard



GYMNASE DE BURIER

Table des matières

Avant-propos **5**

1 Algèbre (1ère partie) **6**

1.1 Hiérarchie des opérations 6
1.2 Quelques propriétés algébriques 6
1.3 Factorisation 12
1.4 Résolution d'équations 24
1.5 Division euclidienne 26
1.6 Factorisation à l'aide de la division euclidienne 32
1.7 Exercices 36
1.8 Réponses 44

2 Algèbre (2ème partie) **50**

2.1 Fractions rationnelles 50
2.1.1 Simplifications de fractions rationnelles 50
2.1.2 Multiplication et division de fractions rationnelles 54
2.1.3 Addition et soustraction de fractions rationnelles 56
2.2 Equations rationnelles 58
2.3 Isolation d'une variable dans une équation 60
2.4 Systèmes d'équations 64
2.4.1 Systèmes linéaires d'équations 64
2.4.2 Système linéaire impossible ou indéterminé 68
2.4.3 Systèmes non linéaires 70
2.5 Exercices 72
2.6 Réponses 77

3 Fonctions (1ère partie) **82**

3.1 Ensembles et intervalles 82
3.1.1 Ensembles 82

3.1.2 Intervalles 86
3.2 Fonctions 88
3.2.1 Graphe d'une fonction 90
3.2.2 Equation cartésienne du graphe 92
3.2.3 Fonction donnée par son expression fonctionnelle 94
3.2.4 Zéros et indéfinitions d'une fonction réelle 96
3.3 Fonctions affines 98
3.4 Fonctions quadratiques 100
3.5 Exercices 104
3.6 Réponses 118

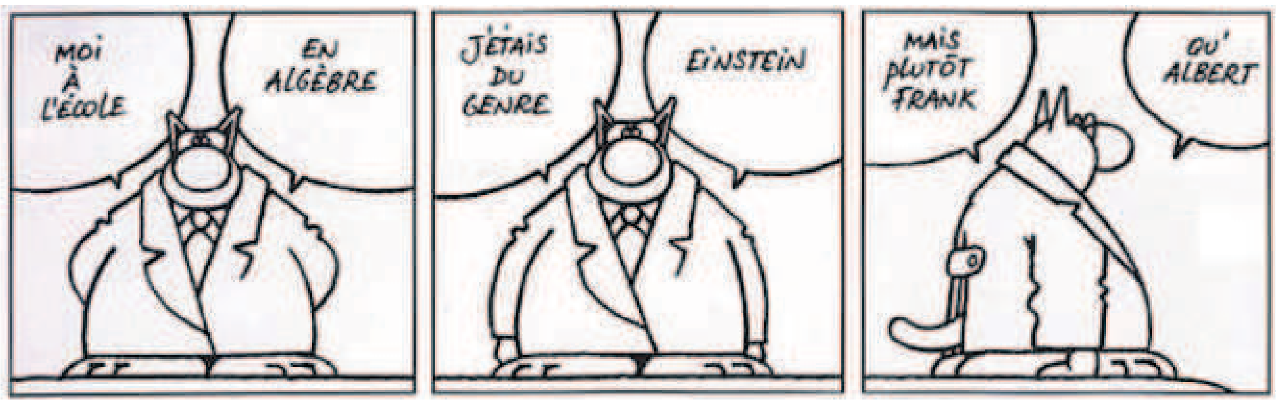
4 Fonctions (2ème partie) 126

4.1 Tableau du signe d'une fonction réelle 126
4.2 Multiplicité d'un zéro d'un polynôme 128
4.3 Signe d'une fonction affine 130
4.4 Signe d'une fonction quadratique 132
4.5 Signe d'une fonction polynomiale 134
4.6 Signe d'une fonction rationnelle 136
4.7 Inéquations 138
4.7.1 Inéquation du premier degré 138
4.7.2 Inéquation quadratique 140
4.7.3 Inéquation polynomiale ou rationnelle 142
4.8 Exercices 144
4.9 Réponses 148

Avant-propos

Un vieil homme, à l'approche de sa mort, décide de partager son troupeau de 17 chameaux entre ses trois fils. L'aîné héritera de la moitié du troupeau, le cadet du tiers et le benjamin du neuvième. Confrontés à l'indivisibilité de 17 par 2, 3 et 9, les trois frères vont trouver le sage du village. Celui-ci, fin mathématicien, leur propose une solution qui, sans avoir recours à une boucherie, respecte les volontés du vieil homme.

Comment le sage s'y prent-il pour effectuer le partage ?



Dessin ci-dessus de Philippe Geluck

7ème édition, La Tour-de-Peilz, juillet 2022

Chapitre 1

Algèbre (1$^{\text{ère}}$ partie)

1.1 Hiérarchie des opérations

Il est important de respecter les conventions sur la hiérarchie des opérations présentes.

On effectue dans l'ordre :

- les parenthèses
- les puissances et les racines
- la multiplication et la division
- l'addition et la soustraction.

Exemple 1.1.

Calculer $a = 12 \div (4+2) - 3\left((5+4^2) - \sqrt{100 - 4\cdot(3\cdot 4 - 2^3)^2}\ \right)$

1.2 Quelques propriétés algébriques

Langage algébrique

- une **somme** est le résultat d'une addition de **termes**, un **produit** le résultat d'une multiplication de **facteurs**, une **différence** le résultat d'une soustraction et le **quotient** le résultat d'une division
- a^n est une **puissance** ; a est la **base** de la puissance et n son **exposant**
- **réduire** c'est diminuer le nombre de termes (on dit parfois aussi **simplifier**)
- si l'on remplace dans une expression algébrique les variables par des nombres particuliers, le résultat obtenu (pour autant qu'il ait un sens) est la **valeur numérique** de l'expression en ces nombres.

Exemple 1.2.

a) Calculer la valeur numérique en $x = 4$ de l'expression $A = x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$.

b) Calculer la valeur numérique en $x = 1$ et $y = 9$ de l'expression $B = \dfrac{2xy + \dfrac{3}{x^2}}{\sqrt[3]{y-1}}$.

c) Calculer la valeur numérique en $x = -1$ de l'expression $C = \dfrac{x+2}{-x^2 - x}$.

Propriétés des opérations sur les nombres réels

- L'addition et la multiplication sont **commutatives** : $a + b = b + a$ et $ab = ba$
- L'addition et la multiplication sont **associatives** : $a+(b+c) = (a+b)+c$ et $(ab)c = a(bc)$
- $-a$ est **l'opposé** de a : $a + (-a) = 0$
- Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ est **l'inverse** de a : $a \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$
- La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition :
  $a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$
- **Soustraire** c'est additionner l'opposé : $a - b = a + (-b)$
- **Diviser** c'est multiplier par l'inverse : $a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b}$

Calcul algébrique

Le calcul algébrique respecte les propriétés des opérations sur les nombres réels énoncées ci-dessus.

Exemple 1.3.

Calculer la différence de $A = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ et $B = -4x^3 - 5x^2 + 5$

Compatibilité entre valeur numérique et réduction de polynômes.

La valeur numérique d'une expression algébrique n'est pas modifiée lors des opérations du calcul algébrique !

Exemple 1.4.

Calculer la valeur numérique de $A = (x - 2)(x + 6) - (x - 3)(x - 4)$ en $x = -2$ une première fois directement et une deuxième fois après réduction de A.

Utilisation des identités remarquables

Lors du calcul algébrique, on utilise souvent **les produits remarquables**

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Exemple 1.5.

a) Effectuer et réduire l'expression $A = 2(2x - 3y)^2 - [5(3y^2 + 4x^2) - 3(2x + y)(2x - y)]$

b) Effectuer et réduire l'expression $B = (2x - 1)^3 + 3(2x - 1)^2 + 3(2x - 1) + 1$

1.3 Factorisation

Factoriser = Mettre sous forme de produits

Méthodes de factorisation

- Mise en évidence
- Produits remarquables
- Trinôme du 2ème degré unitaire
- Trinôme du 2ème degré quelconque
- Groupements
- Division euclidienne (Horner)

Remarque 1.1.

La factorisation s'utilise essentiellement afin de simplifier des expressions algébriques et pour la résolution des équations.

Mise en évidence

Exemple 1.6.

Factoriser par mise en évidence

a) $12x^2y^2 + 6x^2y - 2xy =$

b) $(x + y)^2 - 3x(x + y) =$

c) $(3x - 1)(x - 4) + (2x + 3)(4 - x) =$

Produits remarquables

Principales factorisations à l'aide des produits remarquables :

1) $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
2) $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
4) $A^2 + B^2$ est indécomposable
5) $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
6) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
7) $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
8) $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$

Exemple 1.7.

Factoriser à l'aide des produits remarquables.

a) $25a^2 + 30ab + 9b^2 =$

b) $-25x^2 + 121 =$

c) $27x^3 - 64 =$

Trinôme unitaire du deuxième degré

Un polynôme est **unitaire** si son coefficient de plus haute puissance est égal à 1.
Pour décomposer

$$x^2 + bx + c$$

il s'agit, si c'est possible, de trouver deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta \\ c = \alpha \cdot \beta \end{cases}$$

et ainsi

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

Exemple 1.8.

Factoriser les trinômes suivants :

1) $x^2 + 11x + 24 =$

2) $x^2 - 3x - 10 =$

3) $x^2 + 4x - 12 =$

4) $2x^2 - x - 1 =$

Trinôme du 2ème degré : méthode générale

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ se calculent de la manière suivante :

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution
2) Si $\Delta = 0$ l'équation n'admet qu'une seule solution

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

3) Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation du polynôme $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

1) Si $\Delta < 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable
2) Si $\Delta = 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \text{ où } x_1 = -\frac{b}{2a}$$

3) Si $\Delta > 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{où } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple 1.9.

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

1) $x^2 - 3x - 10 =$

2) $6x^2 - 7x - 3 =$

3) $2x^2 - 3x + 3 =$

Groupements

La méthode des groupements ne s'applique que lorsque le nombre de termes est au moins égal à 4.

Méthode

1) Former plusieurs groupes de termes (en général deux groupes) de manière à mettre en évidence un même facteur dans chaque groupe
2) Mise en évidence globale du facteur commun.

Exemple 1.10.

Factoriser à l'aide de la méthode des groupements.

1) $ax + bx - ay - by =$

2) $x^2 + xy - 3x - 3y =$

3) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2 =$

Factorisation : méthode générale (sans division euclidienne)

Ordre de factorisation

1) Mise en évidence.
2) Produits remarquables.
3) Trinôme du deuxième degré (unitaire ou non)
4) Méthode des groupements.

Exemple 1.11.

Factoriser au maximum :

1) $-x^2 - 2x + 15 =$

2) $2x^2y + 2x^2z + 4xy + 4xz =$

3) $3x^6 - 24x^4 + 48x^2 =$

1.4 Résolution d'équations

Equivalence d'équations

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont exactement les mêmes solutions.

On utilise le signe $\Longleftrightarrow$ pour relier deux équations équivalentes.

On obtient une équation E_2 équivalente à E_1 si :

- On ajoute ou on soustrait un même nombre ou **une même expression** algébrique définie aux deux membres de l'équation. C'est le **principe d'équivalence** appelé **principe d'addition**.
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un **nombre réel non nul**. C'est le **principe d'équivalence** appelé **principe de multiplication**.

Mettre les deux membres d'une équation au carré n'est pas un principe d'équivalence.

Par contre mettre les deux membres d'une équation au cube est un principe d'équivalence.

Résolution d'une équation par factorisation

Il existe un troisième principe d'équivalence, appelé **principe d'intégrité** qui stipule que si un produit de facteurs est nul, au moins l'un de ces facteurs est égal à zéro. Autrement dit :

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot ... \cdot A_n(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{ccc} A_1(x) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ A_2(x) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ & \vdots & \\ \text{ou} & & \\ A_n(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exemple 1.12.

Résoudre les équations suivantes.

1) $(x-3)(x+2)=0$

2) $(x-3)+(x+2)=0$

3) $(x-3)(x+2)=6$

4) $(x-1)^4(x^2-6x+8)=0$

1.5 Division euclidienne

Division euclidienne d'entiers

En arithmétique, lorsqu'on étudie la division des nombres entiers avec reste, on voit des opérations du type suivant :

$$\begin{array}{cccc|ccc}
2 & 3 & 5 & 6 & & 8 & \\ \cline{5-7}
1 & 6 & & & 2 & 9 & 4 \\ \cline{1-4}
 & 7 & 5 & & & & \\
 & 7 & 2 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3 & 6 & & & \\
 & & 3 & 2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 & & &
\end{array}$$

Si l'on divise 2356 (c'est le **dividende**) par 8 (c'est le **diviseur**) on obtient le **quotient** $Q = 294$ et le **reste** $R = 4$. La division se termine lorsque le reste est inférieur au diviseur.
L'**égalité fondamentale** correspondante est la suivante : $2356 = 8 \cdot 294 + 4$

Degré d'un polynôme

Rappelons que le **degré d'un polynôme relativement à une lettre** est donné par la plus grande puissance de cette lettre dans le polynôme simplifié.

Le degré d'un polynôme constant non nul (formé d'un nombre uniquement) est égal à 0 alors que le degré du polynôme nul n'est pas défini.

Division euclidienne de polynômes

Par exemple la division du polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ (c'est le **dividende**) par le polynôme $S(x) = x^2 + 3x + 1$ (c'est le **diviseur**) se présente de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
x^4 & + & 2x^3 & & & - & 5x & + & 1 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{10-10}
x^4 & + & 3x^3 & + & x^2 & & & & & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-9}
 & - & x^3 & & -x^2 & - & 5x & + & 1 & \\
 & - & x^3 & & -3x^2 & - & x & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & 2x^2 & - & 4x & + & 1 & \\
 & & & & 2x^2 & + & 6x & + & 2 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & -10x & & -1 &
\end{array}$$

Le **quotient** de la division est $Q(x) = x^2 - x + 2$ et le **reste** est $R(x) = -10x - 1$.

La division se termine lorsque le reste est nul ou lorsque le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.

L'**égalité fondamentale** correspondante est la suivante :

$$x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 2) - 10x - 1$$

Exemple 1.13.

Effectuer la division du polynôme $P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $S(x) = x - 2$.

Division par Horner

Le **schéma de Horner** permet de simplifier la présentation de la division euclidienne par un polynôme du type $x - a$.

Considérons, par exemple, la division de $P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $S(x) = x - 2$ considérée dans l'exemple 1.13.

On commence par disposer sur la 1ère ligne les coefficients du polynômes que l'on veut diviser ; attention, le nombre de coefficients à noter doit être égal à $\deg(P(x)) + 1$.

On place ensuite la valeur qui annule le diviseur au début de la 2ème ligne comme suit :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

On suit ensuite les étapes exposées ci-dessous :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 & \\ \hline & 2 & 1 & 6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 & \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 & 24 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 & 24 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 12 & 25 \end{array}$$

Le dernier nombre obtenu est le reste de la division de $2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1$ par $x - 2$.
On peut alors écrire l'égalité fondamentale comme suit :

$$P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + 1 = (2\,x^3 + x^2 + 6\,x + 12) \cdot (x - 2) + 25$$

Exemple 1.14.

Effectuer la division par le schéma de Horner de $P(x) = 2x^4 - 18x^2 + 2x + 6$ par $S(x) = x + 3$.

Exemple 1.15.

Le shéma ci-dessous donne la division par Horner du polynôme $P(x)$ par $S(x)$.
Donner les polynômes $P(x), S(x), Q(x)$ et $R(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -8 & 0 & 10 & 5 \\ -1 & & -3 & 11 & -11 & 1 \\ \hline & 3 & -11 & 11 & -1 & 6 \end{array}$$

Calcul du reste de la division par $x - a$

Le reste R de la division d'un polynôme $P(x)$ par $S(x) = x - a$ est un nombre réel qui est calculé comme suit

1) On cherche la valeur qui annule le diviseur : $x - a = 0 \iff x = a$
2) Le **reste** de la division est la **valeur numérique** $R = P(a)$ de P en $x = a$.

Exemple 1.16.

1) Calcul du reste de la division de $P(x) = 3x^4 - 8x^3 + 10x + 5$ par $S(x) = x - 2$.

2) Calcul du reste de la division de $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ par $S(x) = x + 1$.

1.6 Factorisation à l'aide de la division euclidienne

Une valeur $x = a$ est un **zéro** d'un polynôme $P(x)$ en x si le polynôme s'annule en $x = a$. Autrement dit : $x = a$ est un zéro de $P(x)$ si $x = a$ est solution de l'équation $P(x) = 0$.

Théorème fondamental

Soit $P(x)$ un polynôme en x.

1) Si $P(x)$ s'annule en $x = a$, alors $P(x)$ est divisible par $x - a$, autrement dit si $x = a$ est un zéro de $P(x)$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ avec $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.
2) Si $P(x)$ est divisible par $x - a$, alors $P(x)$ s'annule en $x = a$, autrement dit si $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, alors $x = a$ est un zéro de $P(x)$.

Exemple 1.17.
Factoriser $P(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ sachant que $x = -5$ est un zéro de $P(x)$.

Critère de recherche d'un <u>zéro entier</u> d'un polynôme à coefficients entiers

Soit
$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
un **polynôme à coefficients entiers** de terme constant a_0.

Si P possède un **zéro** $x = k$ **entier**, alors k est un **diviseur** de a_0.

Exemple 1.18.
Trouver un zéro entier du polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ et utiliser ce résultat pour factoriser complètement $P(x)$. Vérifier ensuite que les zéros entiers sont des diviseurs de a_0.

Exemple 1.19.

Résoudre l'équation $2x^3 + 5x^2 = 23x - 10$.

1.7 Exercices

1.1

Substituer successivement les trois valeurs numériques dans l'expression proposée, puis calculer.

1) $-x^2 - x + 3$	a) $x = -2$	b) $x = 3$	c) $x = \frac{1}{2}$
2) $x^3 - 2x^2 + x$	a) $x = -1$	b) $x = 2$	c) $x = -\frac{1}{3}$
3) $\frac{x^2 - x}{9 - x^2}$	a) $x = -2$	b) $x = 3$	c) $x = \frac{2}{3}$

1.2

Effectuer et réduire :

1) $3 + (xz + y^2)$
2) $3 - (xz + y^2)$
3) $3(xz + y^2)$
4) $(2a + b - c) + (3a - b + c)$
5) $(2a + b - c) - (3a - b + c)$
6) $(2a + b - c)(3a - b + c)$
7) $(x^3 - 2x^2 - 5) + (-4x^3 - 1)$
8) $(x^3 - 2x^2 - 5) - (-4x^3 - 1)$
9) $(x^3 - 2x^2 - 5)(-4x^3 - 1)$
10) $\left(u + \frac{v}{4}\right) + \left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$
11) $\left(u + \frac{v}{4}\right) - \left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$
12) $\left(u + \frac{v}{4}\right)\left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$

1.3

Soient les polynômes

$$a(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 3, \quad p(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 17 \quad \text{et} \quad q(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 18$$

1) calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$
2) calculer $p - q$
3) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$
4) déterminer le coefficient du terme de degré 7 du polynôme $p \cdot q$
5) déterminer le coefficient du terme de degré 4 du polynôme $p \cdot q$

1.4

Effectuer et réduire :

1) $(a + b)^2$
2) $(a - b)^2$
3) $(a + b)(a - b)$
4) $(a + b)^3$
5) $(a - b)^3$
6) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

1.5

Effectuer et réduire :

1) $(a+8)^2$

2) $(y^4-3b)^3$

3) $(u-3)(u+3)$

4) $(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2)$

5) $(7-f)^2$

6) $(4+2z^2)^3$

7) $(3+y^3)(y^6-3y^3+9)$

8) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

9) $(t+3u^5)^3$

10) $(2x-7)^2$

11) $(b^2-c^3)(b^2c^3+b^4+c^6)$

12) $(a-3b)^3$

1.6

Réduire au maximum.

1) $(x-1)^2-(y+1)^2$

2) $(1+x)^2-(1-x)^2$

3) $\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,y\right)^2-\left(\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2}\,y\right)^2$

4) $(2\,x+y)^2+(2\,x-y)^2-2\,(2\,x+y)(2\,x-y)$

5) $(3\,x+y)(3\,x-y)-(3\,x+2\,y)^2-(x-3\,y)^2$

6) $(x+2)^2-(x+1)^2-(x+1)(x-1)-x\,(x+4)-4$

7) $(x+y)(x-y)+(x-y)^2-(x+y)^2+y\,(4\,x+y)$

8) $(x^2+4\,y^2)(x+2\,y)(x-2\,y)-(x^2-2\,y^2)^2$

9) $(3\,x-2\,y)^2+(4\,x+y)(4\,x-y)-(5\,x-3\,y)^2+6\,y(y-3\,x)$

10) $(2\,x-y)^2\,(2\,x+y)^2-(x-2\,y)^2(x+2\,y)^2-15\,(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

1.7

Réduire au maximum.

1) $-(6\,ab^2-7\,x^3)(6\,ab^2+7\,x^3)$

2) $(4\,x^2-7\,y^3)^2-(x^2-5\,y^2)(4\,x^2+y^3)$

3) $(3\,x-2\,y)^2-(4\,x+5\,y)^2-2\,(2\,x-y)(3\,x-5\,y)$

4) $(2\,a-3\,b)^3-(2\,a-3\,b)^2-(2\,a-3\,b)$

1.8

Factoriser :

1) $xy + y$
2) $ma + ap$
3) $a^3x^2 - a^2x^3$
4) $4uv - 2uw$
5) $6a^2 + 4ab$
6) $24y^3z^5 - 36yz^2$
7) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$
8) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$
9) $3a^2bc^2 - abc^3$
10) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$
11) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$
12) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$
13) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$
14) $(u + v)^3 - (u + v)^2$
15) $2a(a - b) - (a - b)^2$

1.9

Factoriser :

1) $a^2b^2 - m^2$
2) $x^4 - y^2$
3) $a^2 - \frac{1}{16}$
4) $(a + b)^2 - x^2$
5) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$
6) $(a - b)^2 - 1$
7) $3a^2 - 3$
8) $4x^5y^2 - 9x^3$
9) $a^4 - b^4$
10) $a^5 - a$
11) $\frac{u^4}{625} - \frac{v^4}{81}$
12) $x^5y^4 - x$
13) $a^2 + 2a + 1$
14) $1 + 2x^2 + x^4$
15) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$
16) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$
17) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
18) $\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$
19) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$
20) $5x^2 - 10x + 5$
21) $x^2(a + b) + 2(a + b)x + a + b$

1.10

Factoriser :

1) $x^2 + 5x + 6$
2) $x^2 + 5x + 4$
3) $u^2 - 6u + 8$
4) $x^2 - 2x - 35$
5) $9x^2 + 6x + 1$
6) $4z^2 + 5z + 1$
7) $x^2 - 2x - 80$
8) $3y^2 + 7y + 3$
9) $6x^2 + 5x + 1$
10) $x^2 - 22x + 85$
11) $x^2 + x + 1$
12) $16u^2 - 72u + 81$
13) $40x^2 + 3x - 28$
14) $a^2 + 9a - 10$
15) $2x^2 - 5x - 2$
16) $4m^2 + 25m - 21$

1.11

Factoriser si possible les polynômes suivants.

1) $x^2 + 19\,x + 18$
2) $x^2 - 4\,x + 4$
3) $2\,x^2 + 5\,x - 3$
4) $3\,x^2 - 5\,x + 2$
5) $4\,x^2 - 20\,x + 25$
6) $x^2 - 9$
7) $x^2 - \frac{4}{9}$
8) $9\,x^2 - 5\,x$
9) $8\,x^2 + 6\,x + 1$
10) $\frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

1.12

Factoriser :

1) $ax + bx + ay + by$
2) $a + b + ax + bx + ay + by$
3) $ax - bx - ay + by$
4) $ax - 4x + 4y - ay$
5) $ax + x - a - 1$
6) $x^3 + x - x^2 - 1$
7) $\dfrac{xy}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{z}{6}$
8) $10xz - 10z - x^2 + x$
9) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$
10) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$
11) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
12) $8y^4 - 8y^3 + y - 1$
13) $x^3 - 4x - x^2 + 4$
14) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$
15) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$

1.13

Factoriser :

1) $x^3 + 2x^2 + x$
2) $9a^3 - ab^2$
3) $1 - (x - y)^2$
4) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$
5) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$
6) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18$
7) $xy - 9x^3y$
8) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$
9) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$
10) $b^3 - a^3$
11) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$
12) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$
13) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$
14) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$
15) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

1.14

Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$
2) $3\,x + 8 = 2\,(x + 4)$
3) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$
4) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$
5) $\dfrac{t - 5}{3} = \dfrac{2 - t}{2}$
6) $3\,x - \dfrac{4 - x}{2} = x - \frac{1}{3}$

1.15

Résoudre les équations suivantes.

1) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$

2) $x^2 - 5\,x + 4 = 0$

3) $x^2 - 4\,x + 5 = 0$

4) $x^2 + 6\,x + 9 = 0$

5) $-x^2 + 30\,x - 209 = 0$

6) $2\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$

7) $-\frac{1}{2}\,x^2 + x + 6 = 0$

8) $2\,x^2 = x + 6$

1.16

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $x^2 - 9 = 0$

2) $4\,x^2 - 1 = 0$

3) $(x-2)^2 - 9\,(x-2) = 0$

4) $(x^2 - x - 6)(x+5) = 0$

5) $x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$

6) $(x-1)(x^2+1) = 0$

7) $x^3 + x^2 = 4\,x + 4$

8) $x^2 - 9 - 4\,(x-3) = 0$

9) $(x+6)^2 - 3\,(x+6) + 2 = 0$

10) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

1.17

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $(x^2 - 8\,x + 12)(x+2)^3 = 0$

2) $(x-3)(x^2-4) = 0$

3) $x^3 + 2\,x^2 - 4\,x = 8$

4) $(2\,x^2 + 3\,x + 1)^2 - (2\,x^2 - 4\,x - 1)^2 = 0$

5) $x\,(x-2) + (x-3)(x-2) = 0$

6) $6\,x^2 = 3\,x^3 - 72\,x$

7) $x^3 + 3\,x^2 = 9\,x + 27$

8) $(x-1)(x-2)(x-3) = x\,(x^2 - 9)$

1.18

Résoudre les équations, sans rien développer, mais en factorisant.

1) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

2) $x^4 - 1 = 0$

3) $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$

4) $x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0$

5) $(x^2-1)^2 - 2\,(x^2-1) + 1 = 0$

6) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 3 = 0$

7) $(x^2 - 5\,x + 6)^2 - 2\,(x^2 - 5\,x + 6) = 0$

1.19

Résoudre les équations suivantes par factorisation.

1) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

2) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

3) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$

4) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

1.20

Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

1) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5, \quad B(x) = x^2 - 3$

2) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1, \quad B(x) = 5x + 1$

3) $A(x) = x^8 + x^4 + 1, \quad B(x) = x^2 - x + 1$

4) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6, \quad B(x) = x^5 - 3$

5) $A(x) = x^8 - x^4 + 1, \quad B(x) = 2x^5 + 1$

6) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x, \quad B(x) = x + 2$

1.21

Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$.

1) $A(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24, \quad B(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

2) $A(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12, \quad B(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

3) $A(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5, \quad B(x) = -\,x^2 + x - 1$

1.22

Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

1.23

Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

1) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

2) $x^5 + 1$ par $x + 1$

3) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ par $x + 2$

1.24

En utilisant Horner, calculer le reste de la division de $A(x)$ par le polynôme $B(x)$.

1) $A(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $B(x) = x - 1$

2) $A(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $B(x) = x + 2$

3) $A(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $B(x) = x + 3$

1.25

Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $\quad B(x) = x - 3$
2) $A(x) = x^4 - x + 1$ $\quad B(x) = x + 2$
3) $A(x) = x^3 - 27$ $\quad B(x) = x - 3$

1.26

Montrer que $x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

1.27

Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

1.28

Factoriser le polynôme :

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,
2) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

1.29

Factoriser :

1) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ $\qquad$ 2) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ $\qquad$ 3) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

1.30

Décomposer les polynômes.

1) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$
2) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$
3) $x^5 - x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8\,x$
4) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

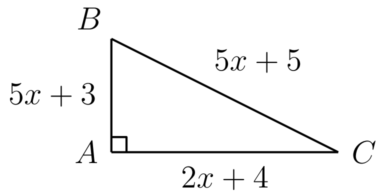
1.31

Résoudre les équations.

1) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$
2) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$
3) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$
4) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

1.32

On considère le triangle ABC rectangle en A dont les dimensions sont données sur la figure en fonction de x.



Quelles sont les dimensions possibles pour le triangle ABC ?

1.33

1) La longueur du côté d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de 11 cm^2 si x augmente de 1 cm. Calculer x.
2) L'aire d'un carré augmente de 147 cm^2 si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

1.34

On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1 000 cm^3.

1.35

Un jardin rectangulaire a pour dimensions 30 m sur 20 m. Une allée de largeur uniforme fait le tour à l'intérieur.
Quelle doit être cette largeur pour que la surface de l'allée soit les $\frac{3}{8}$ de celle du rectangle entier ?

1.8 Réponses

1.1

1)	a) 1	b) -9	c) $\frac{9}{4}$
2)	a) -4	b) 2	c) $-\frac{16}{27}$
3)	a) $\frac{6}{5}$	b) indéfini	c) $-\frac{2}{77}$

1.2

1) $3 + xz + y^2$
2) $3 - xz - y^2$
3) $3xz + 3y^2$
4) $5a$
5) $-a + 2b - 2c$
6) $6a^2 - b^2 - c^2 + ab - ac + 2bc$
7) $-3x^3 - 2x^2 - 6$
8) $5x^3 - 2x^2 - 4$
9) $-4x^6 + 8x^5 + 19x^3 + 2x^2 + 5$
10) $\dfrac{21u - 7v}{12}$
11) $\dfrac{3u + 13v}{12}$
12) $\dfrac{36u^2 - 31uv - 10v^2}{48}$

1.3

1) $9\,x^4 - 24\,x^3 + 34\,x^2 - 24\,x + 9$
2) $x^4 + x^2 + x - 1$
3) 7
4) 2
5) 6

Remarque $p \cdot q = 2\,x^7 + x^6 - 15\,x^5 + 6\,x^4 + 92\,x^3 - 67\,x^2 - 157\,x + 306$

1.4

1) $a^2 + 2ab + b^2$
2) $a^2 - 2ab + b^2$
3) $a^2 - b^2$
4) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6) $a^3 - b^3$
7) $a^3 + b^3$

1.5

1) $a^2 + 16a + 64$
2) $y^{12} - 9y^8b + 27y^4b^2 - 27b^3$
3) $u^2 - 9$
4) $8m^3 - 125n^3$
5) $49 - 14f + f^2$
6) $64 + 96z^2 + 48z^4 + 8z^6$
7) $27 + y^9$
8) $x^4 - y^4$
9) $t^3 + 9t^2u^5 + 27tu^{10} + 27u^{15}$
10) $4x^2 - 28x + 49$
11) $b^6 - c^9$
12) $a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

1.6

1) $x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y$
2) $4\,x$
3) $x\,y$
4) $4\,y^2$
5) $-x^2 - 6\,x\,y - 14\,y^2$
6) $-2\,x^2 - 2\,x$
7) x^2
8) $4\,x^2\,y^2 - 20\,y^4$
9) 0
10) 0

1.7

1) $-36\,a^2b^4 + 49\,x^6$
2) $-57\,x^2y^3 + 12\,x^4 + 49\,y^6 + 5\,y^5 + 20\,x^2y^2$
3) $-19\,x^2 - 26\,xy - 31\,y^2$
4) $8\,a^3 - 36\,a^2b + 54\,ab^2 - 4\,a^2 - 27\,b^3 + 12\,ab - 9\,b^2 - 2\,a + 3\,b$

1.8

1) $y(x+1)$
2) $a(m+p)$
3) $a^2x^2(a-x)$
4) $2u(2v-w)$
5) $2a(3a+2b)$
6) $12yz^2(2y^2z^3-3)$
7) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$
8) $5m^5n^2(3m^2-2n)$
9) $abc^2(3a-c)$
10) $(2x+y)(5a+8b)$
11) $ab^3c^2(3bc-1)$
12) $2u^3v(v+4v^2-3u)$
13) $3(x-3)(x-2)$
14) $(u+v)^2(u+v-1)$
15) $(a-b)(a+b)$

1.9

1) $(ab-m)(ab+m)$
2) $(x^2-y)(x^2+y)$
3) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$
4) $(a+b+x)(a+b-x)$
5) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$
6) $(a-b+1)(a-b-1)$
7) $3(a+1)(a-1)$
8) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$
9) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
10) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$
11) $\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)$
12) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
13) $(a+1)^2$
14) $(1+x^2)^2$
15) $(a^2-3b)^2$
16) $(3x^2+4y)^2$
17) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
18) $(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})^2$
19) $(a+b-c)^2$
20) $5(x-1)^2$
21) $(a+b)(x+1)^2$

1.10

1) $(x+2)(x+3)$
2) $(x+1)(x+4)$
3) $(u-2)(u-4)$
4) $(x-7)(x+5)$
5) $(3x+1)^2$
6) $(4z+1)(z+1)$
7) $(x-10)(x+8)$
8) $3\left(y+\dfrac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$
9) $(2x+1)(3x+1)$
10) $(x-17)(x-5)$
11) x^2+x+1
12) $(4u-9)^2$
13) $(5x-4)(8x+7)$
14) $(a+10)(a-1)$
15) $2\left(x-\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$
16) $(4m-3)(m+7)$

1.11

1) $(x+18)\cdot(x+1)$
2) $(x-2)^2$
3) $(x+3)\cdot(2x-1)$
4) $(3x-2)\cdot(x-1)$
5) $(2x-5)^2$
6) $(x-3)\cdot(x+3)$
7) $(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})\cdot$
8) $x\cdot(9x-5)$
9) $(2x+1)\cdot(4x+1)$
10) $\frac{1}{3}x^2-x+4$

1.12

1) $(x+y)(a+b)$
2) $(a+b)(1+x+y)$
3) $(a-b)(x-y)$
4) $(a-4)(x-y)$
5) $(a+1)(x-1)$
6) $(x^2+1)(x-1)$
7) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$
8) $(10z-x)(x-1)$
9) $(a-b+1)(a-b-1)$
10) $(2x-3y)(2x+3y+1)$
11) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
12) $(2y+1)(4y^2-2y+1)(y-1)$
13) $(x-2)(x+2)(x-1)$
14) $(2a^3+3)(a-1)$
15) $(6x+y)(x+3z)$

1.13

1) $x(x+1)^2$
2) $a(3a+b)(3a-b)$
3) $(1+x-y)(1-x+y)$
4) $(x^2+1)^2$
5) $(x+y-z)(-7x+y+z)$
6) $(x-9)(x^2+2)$
7) $xy(1-3x)(1+3x)$
8) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$
9) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$
10) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$
11) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
12) $(x-3)(x^2+9)$
13) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
14) $(x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$
15) $xy(x+1)(x+6)$

1.14

1) $x = -23$
2) $x = 0$
3) $x = \frac{-3}{8}$
4) tout x est solution
5) $t = \frac{16}{5}$
6) $x = \frac{2}{3}$

1.15

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
2) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
3) Pas de solution
4) $x = -3$
5) $x_1 = 11$, $x_2 = 19$
6) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$
7) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$
8) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

1.16

1) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
2) $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
3) $\mathcal{S} = \{2; 11\}$
4) $\mathcal{S} = \{-5; -2; 3\}$
5) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1; 2\}$
6) $\mathcal{S} = \{1\}$
7) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}$
8) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$
9) $\mathcal{S} = \{-5; -4\}$
10) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1\}$

1.17

1) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 6\}$
2) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$
3) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
4) $\mathcal{S} = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$
5) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}; 2\}$
6) $\mathcal{S} = \{-4; 0; 6\}$
7) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
8) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; 3\}$

1.18

1) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$, $x_4 = 3$
2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
3) Pas de solution
4) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
5) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
6) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
7) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

1.19

1) $S = \{-2; -1; 1\}$
2) $S = \{-2; 2; 3\}$
3) $S = \{0; \frac{3}{2}\}$
4) $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\}$

1.20

1) $Q(x) = x^2 - 3x + 3,\ R(x) = -8x + 4$
2) $Q(x) = 7x^2 + 8x + 1,\ R(x) = 0$
3) $Q(x) = x^6 + x^5 - x^3 + x + 1,\ R(x) = 0$
4) $Q(x) = x^2 - 4x + 2,\ R(x) = x^4 - 10x$
5) $Q(x) = \dfrac{1}{2}x^3,\ R(x) = -x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 + 1$
6) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5,\ R(x) = -10$

1.21

1) $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$
2) $a(x) = b(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$
3) $a(x) = b(x) \cdot (-\,x^3 -\ x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

1.22

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

1.23

1) quotient : $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4$ reste : 5
2) quotient : $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ reste : 0
3) quotient : $3\,x^4 - 14\,x^3 + 35\,x^2 - 69\,x + 133$ reste : -260

1.24

1) $R = A(1) = 0$
2) $R = A(-2) = 132$
3) $R = A(-3) = -169$

1.25

59 ; 19 ; 0.

1.26

En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste,
ou si $f(x) = x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$, alors $f(1) = 0$.

1.27

Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

1.28

1) $P(x) = (x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$
2) $P(x) = x(x-2)(x-3)(2x+1)$

1.29

1) $x(x+1)(x-2)(x+3)$

2) $(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$

3) $(x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$

1.30

1) $(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$

2) $(x-3)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+5)$

3) $x(x-2)^2\,(x+2)\,(x+1)$

4) $(x-2)^2\,(x-5)\,(x+3)^2$

1.31

1) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0 \quad S=\{-3\,;\,2\}$

2) $(x-1)\,(x-2)^3=0 \quad S=\{1\,;\,2\}$

3) $(x+1)\,(5\,x+1)\,(7\,x+1)=0 \quad S=\{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$

4) $(x-3)\,(x+4)^2=0 \quad S=\{-4\,;\,3\}$

1.32

On trouve $x=0$ et $x=1$. Les triangles ont pour dimensions 3, 4, 5 et 6, 8, 10.

1.33

1) $x=5$

2) $x=7$

1.34

En choisissant $x=5$ ou $x=5\,(2-\sqrt{2})$

1.35

La largeur de l'allée est de 2.5 m.

Chapitre 2

Algèbre (2ème partie)

2.1 Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fraction dont les numérateur et dénominateur sont des polynômes

$$\boxed{\text{fraction rationnelle} = \frac{N}{D} = \frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}}$$

Exemple 2.1.
$\dfrac{2x}{x^2+8y}, \dfrac{1}{x}, x-3$ sont des fractions rationnelles.

2.1.1 Simplifications de fractions rationnelles

On ne peut simplifier une fraction rationnelle que si le numérateur N et le dénominateur D ne sont constitués que d'un seul terme **et** s'ils ont un facteur commun.

$$\text{Si } N = A \cdot B \text{ et } D = A \cdot C \text{ alors } \frac{N}{D} = \frac{\cancel{A} \cdot B}{\cancel{A} \cdot C} = \frac{B}{C}$$

ATTENTION !

$$\frac{N}{D} = \frac{A+B}{A+C} \quad \xrightarrow{\textbf{FAUX}} \quad \frac{B}{C}$$

$$\frac{N}{D} = \frac{A+B}{A \cdot C} \quad \xrightarrow{\textbf{FAUX}} \quad \frac{B}{C}$$

Exemple 2.2.

a) Simplifier $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2} =$

b) Simplifier $\dfrac{2-x}{5x-10} =$

c) Simplifier $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} =$

2.1.2 Multiplication et division de fractions rationnelles

On multiplie et on divise les fractions rationnelles en suivant le même principe qu'avec les fractions ordinaires.

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{A}{B} = \frac{P \cdot A}{Q \cdot B} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q} \div \frac{A}{B} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{B}{A} = \frac{P \cdot B}{Q \cdot A}$$

Exemple 2.3.

a) $\dfrac{5}{x^3y^5} \cdot \dfrac{x^4y}{10} =$

b) $\dfrac{3x-6}{x+2} \cdot \dfrac{2x+4}{x-2} =$

c) $(x-1) \cdot \dfrac{1}{x^2-4x+3} =$

d) $\dfrac{x^2+x-30}{x^2} \div \dfrac{4x+24}{x^2+x} =$

2.1.3 Addition et soustraction de fractions rationnelles

Si deux fractions rationnelles ont le même dénominateur, on obtient leur somme en additionnant leurs numérateurs.

$$\frac{A}{D} + \frac{B}{D} = \frac{A+B}{D}$$

Si les fractions rationnelles $\dfrac{N}{D}$ et $\dfrac{B}{Q}$ n'ont pas le même dénominateur, pour calculer leur somme,

1) on détermine un dénominateur commun R,
2) on les amplifie : $\dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{R}$ et $\dfrac{B}{Q} = \dfrac{B'}{R}$
3) on obtient ensuite leur somme en additionnant les nouveaux numérateurs et en conservant le dénominateur commun

$$\frac{N}{D} + \frac{B}{Q} = \frac{N'}{R} + \frac{B'}{R} = \frac{N'+B'}{R}$$

Exemple 2.4.

a) $\dfrac{3x}{x+2} + \dfrac{6}{x+2}$

b) $\dfrac{4}{x^2+6x+8} - \dfrac{x-8}{x^2-x-6}$

c) $\dfrac{3}{x^2-2x} + \dfrac{x+1}{4-2x}$

2.2 Equations rationnelles

Une équation rationnelle est une équation comportant une ou plusieurs fractions rationnelles.

Pour résoudre une telle équation :

- On détermine tout d'abord les valeurs à exclure en calculant les zéros des dénominateurs.
- En multipliant par le dénominateur commun, on obtient une nouvelle équation, appelée **résolvante**, qui n'est pas équivalente à l'équation initiale, mais qui contient toutes les solutions de l'équation de départ.

Exemple 2.5.

a) Résoudre l'équation $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{x}{x+2}$

b) Résoudre l'équation $\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

2.3 Isolation d'une variable dans une équation

Exemple 2.6. Vitesse moyenne

On a la relation $\text{Vitesse} = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$

Donc, si V est la vitesse, d est la distance et t est le temps, on a

$$V = \frac{d}{t}$$

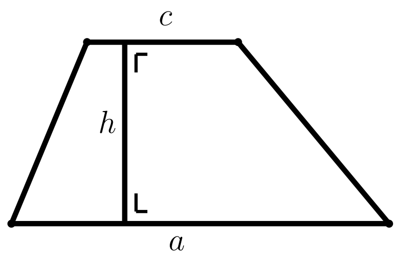
a) Résoudre la formule ci-dessus relativement à d.

b) Résoudre la formule ci-dessus relativement à t.

Exemple 2.7. Aire d'un trapèze

L'aire S d'un trapèze de bases a et c et de hauteur h est donnée par

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot h$$



a) Résoudre la formule ci-dessus relativement à h.

b) Résoudre la formule ci-dessus relativement à a.

2.4 Systèmes d'équations

2.4.1 Systèmes linéaires d'équations

Lorsque l'on résout un système linéaire d'équations à plusieurs inconnues, on obtient un système équivalent (c'est-à-dire qui admet les mêmes solutions) lorsque :

- On permute deux équations.
- On multiplie les deux membres d'une équation par un nombre réel non nul.
- On additionne ou soustrait deux équations membre à membre et l'on remplace l'une des deux équations par la nouvelle.
- On substitue une inconnue : pour cela, on résout l'une des équations relativement à une inconnue et l'on remplace dans les autres équations cette inconnue par l'expression trouvée.

Exemple 2.8.

Soit le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

1) Résoudre ce système à l'aide de la méthode par combinaisons linéaires (c'est à dire en utilisant les trois premiers principes d'équivalence donnés ci-dessus).

2) Résoudre ce système à l'aide de la méthode par substitution.

Exemple 2.9.

Soit le système d'équations $\begin{cases} 9x - 5y - 3z = 2 \\ -2x + 3y + z = 8 \\ 5x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$

1) Résoudre ce système à l'aide de la méthode par combinaisons linéaires.

2) Résoudre ce système à l'aide de la méthode par substitution.

2.4.2 Système linéaire impossible ou indéterminé

Un système linéaire n'admet pas toujours une unique solution : il peut être **impossible** ou posséder une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on dit que le système est **indéterminé** et on donne ses solutions à l'aide d'un ou plusieurs paramètres.

Exemple 2.10.

1) Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ -4x - 6y &= -3 \end{cases}$

2) Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ -4x - 6y &= -2 \end{cases}$

2.4.3 Systèmes non linéaires

Pour résoudre un sytème non linéaire, on utilise la méthode de substitution.

Exemple 2.11.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y - 4 & = & 0 \\ y + 1 & = & 2x \end{cases}$$

2.5 Exercices

2.1

Rendre les fractions rationnelles irréductibles :

1) $\dfrac{54a^3b^3}{15a^5b^2}$

2) $\dfrac{-16u^2v^2w^3}{-4u^3vw^2}$

3) $\dfrac{x-1}{2x-2}$

4) $\dfrac{2x-2y}{3y-3x}$

5) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

6) $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

7) $\dfrac{x-x^3}{x^4+2x^3+x^2}$

8) $\dfrac{3z^2-21z+36}{2z^2-12z+18}$

9) $\dfrac{x^3-125}{x^2-25}$

2.2

Effectuer et réduire :

1) $\dfrac{a+7}{a-1}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a+14}$

2) $\dfrac{x+5}{7}\div\dfrac{2x+10}{x-8}$

3) $(x+y)\div\dfrac{x+y}{x-y}$

4) $\dfrac{z^2+z}{z-1}\cdot\dfrac{z-z^2}{z^3}$

5) $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

6) $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

7) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$

8) $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4}\div\dfrac{2x^2-3x}{x+2}$

9) $\dfrac{5u^2+12u+4}{u^4-16}\cdot\dfrac{u^2-2u}{25u^2+20u+4}$

2.3

Effectuer et réduire :

1) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}$

2) $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x+6}{x+3}$

3) $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$

4) $\dfrac{2}{3x+1}+\dfrac{9}{(3x+1)^2}$

5) $\dfrac{5}{a}-\dfrac{2a-1}{a^2}+\dfrac{a+5}{a^3}$

6) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

7) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+5x+6}$

8) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{m^2-1}-\dfrac{2m+1}{m-m^3}$

9) $\dfrac{2y+1}{y^2+4y+4}-\dfrac{6y}{y^2-4}+\dfrac{3}{y-2}$

10) $\dfrac{13-5x}{6x^2-6}+\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{3x-5}{3x-3}$

2.4

Effectuer et réduire :

1) $\left(\dfrac{z+2}{z}-\dfrac{2}{z^2+z}\right)\left(\dfrac{1}{z}+1\right)$

2) $\left[\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right)\left(\dfrac{2x}{x-2}-2\right)\right]\div\dfrac{4x^2}{x^2-4}$

3) $\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{2}{u^2}-\dfrac{3}{u^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)$

4) $\dfrac{2x-1}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{4x^2-1}\cdot\left(1-\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{1}{2x+1}\right)$

2.5

Soit la formule de la loi de gravitation de Newton

$$F=G\cdot\frac{mM}{d^2}$$

où F est la force de gravitation, G la constante gravitationnelle, m et M les masses des deux corps et d la distance entre les centres de gravité de ces corps.

1) Exprimer m en fonction de F, G, M et d.

2) Exprimer d en fonction de F, G, m et M.

2.6

On rencontre en mécanique les formules $W=Fs$, $P=\dfrac{W}{t}$ et $s=vt$.
Exprimer P en fonction de F et v.

2.7

On rencontre en mécanique les formules $E=mgh$ et $E=\dfrac{1}{2}mv^2$.
Exprimer v en fonction de g et h.

2.8

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1) $\dfrac{x-1}{2\,x-1}=\dfrac{3\,x-5}{4\,x-2}$

2) $\dfrac{x^2+x+1}{2\,x+2}=x$

3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{4}=0$

4) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{3\,x-4}{(x-1)\cdot(x-2)}$

5) $\dfrac{750}{x}+6=\dfrac{720}{x-5}$

6) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

2.9

Résoudre les équations ci-dessous :

1) $\dfrac{x-4}{x+8}=0$

2) $\dfrac{g^2-5g}{g^2-8g+15}=0$

3) $\dfrac{2x^3-8x^2-10x}{x-5}=5x$

4) $\dfrac{x+1}{x}-2x=\dfrac{x-1}{x}$

5) $\dfrac{z}{z-3}-\dfrac{2}{2-z}=\dfrac{3}{z^2-5z+6}$

6) $\dfrac{4x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}=-\dfrac{12}{x^2-9}$

7) $\dfrac{t}{t-2}-\dfrac{2}{t+2}=\dfrac{8}{t^2-4}$

8) $\dfrac{x+4}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{x^2+4x}$

9) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{5}{x^2+x}=\dfrac{4}{x^2-1}$

2.10

Résoudre les systèmes d'équations :

1) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y &= 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5\,x-2\,y &= 5 \\ 3\,x-y &= 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6\,x+4 &= -6\,y \\ 1-x &= 6\,y \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\,x-4\,y &= 2 \\ x-2\,y &= 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\,x+4\,y &= 5 \\ x+2\,y &= 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2\,x+3\,y &= 4 \\ 5\,x+6\,y &= 10 \end{cases}$

2.11

Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

1) $\begin{cases} 12\,x-5\,y=29 \\ 4\,x-3\,y=11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+\ y=19 \\ 2\,x-3\,y=11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12\,x+11\,y=6 \\ 3\,y-\ 2\,x=24 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 72\,x+14\,y=330 \\ 63\,x+\ 7\,y=273 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\,x+\ 3\,y=4 \\ 3\,y+10\,x=40 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 21\,x+\ 8\,y+66=0 \\ 28\,x-23\,y-13=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2\,x+3\,y+2\,z=41 \\ 8\,x+5\,y \qquad\ =31 \\ \qquad 7\,y \qquad\ =21 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2\,x-3\,y+2\,z=41 \\ 5\,x+3\,y \qquad\ =10-z \\ 9\,x \qquad\qquad\ =27 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 7\,x-4\,y-5\,z=56 \\ \qquad 3\,y-2\,z=13 \\ 5\,x-3\,y \qquad\ =22 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y+\ z=25 \\ x-y+\ z=5 \\ x \qquad +2\,z=2\,y-10 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3z - 2y - x = 17 \\ 2y + 3z - 2x = 36 \\ 5x + 2y - z = 10 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 47 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$

2.12

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{10} \\ x + y = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 23 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y = 193 \\ x^2 + y^2 + 12x - 8y = -27 \end{cases}$

2.13

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2xy - 3y = 3 \\ y^2 - 4xy = -15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x + y = 30 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy - (x + y) = -13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$

2.14

Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

2.15

Une bouteille et son bouchon coûtent 105 francs. La bouteille coûte 100 francs de plus que le bouchon. Quel est le prix du bouchon ? Quel est le prix de la bouteille ?

2.16

La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

1) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.
2) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

2.17

Jean dit à Pierre : ”Donne-moi cinq de tes billes et nous en aurons autant l'un que l'autre”. Celui-ci répond : ”Donne m'en dix des tiennes et j'en aurai le double de ce qu'il te restera”. Combien chacun avait-il de billes ?

2.18

La somme des chiffres d'un nombre entier de trois chiffres est 18. Si l'on permute le premier chiffre(depuis la gauche) et le deuxième, le nombre augmente de 180. Si l'on permute le deuxième et le troisième chiffre, le nombre augmente de 18.
Quel est ce nombre ?

2.19

Un téléphérique pratique les tarifs suivants : montée CHF 22.50, descente CHF 15.-, aller-retour CHF 30.-. Pendant une journée, on a encaissé CHF 19650.- pour 680 montées et 520 descentes. Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

2.20

Un capital de CHF 330740.- est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%. Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme.
Quelles étaient les parts initiales ?

2.21

Un libraire détient un certain stock d'un ouvrage. S'il vendait chaque exemplaire à 8 francs, il ferait un bénéfice de 90 francs. Mais, obligé de liquider le stock à moitié prix, il perd au contraire 90 francs.
Combien d'exemplaires de cet ouvrage détient-il ?

2.22

Les diagonales d'un losange diffèrent de 5 cm. Si l'on augmente la petite diagonale de 2 cm et que l'on diminue la grande de 3 cm, son aire diminue de 4 cm^2.
Que mesurent les diagonales de ce losange ?

2.23

Le périmètre d'un triangle rectangle mesure 110 m et l'un des côtés de son angle droit, 10 m.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés de ce triangle ?

2.24

L'aire d'un champ rectangulaire est 31280 m^2. Si l'on augmentait chacune de ses dimensions de 1 m, l'aire serait augmentée de 472 m^2.
Quelles sont les deux dimensions ?

2.6 Réponses

2.1

1) $\dfrac{18b}{5a^2}$

2) $\dfrac{4vw}{u}$

3) $\dfrac{1}{2}$

4) $-\dfrac{2}{3}$

5) $\dfrac{a+b}{a-b}$

6) $\dfrac{x+4}{x-1}$

7) $\dfrac{1-x}{x(x+1)}$

8) $\dfrac{3(z-4)}{2(z-3)}$

9) $\dfrac{x^2+5x+25}{x+5}$

2.2

1) $\dfrac{a+1}{2}$

2) $\dfrac{x-8}{14}$

3) $x-y$

4) $-\dfrac{z+1}{z}$

5) $\dfrac{x}{x-2}$

6) $\dfrac{x}{x-1}$

7) $\dfrac{2(x-3)}{x+1}$

8) $\dfrac{2+3x}{x(x-2)}$

9) $\dfrac{u}{(u^2+4)(2+5u)}$

2.3

1) 2

2) $\dfrac{-6}{x+3}$

3) $\dfrac{-3}{x+2}$

4) $\dfrac{6x+11}{(3x+1)^2}$

5) $\dfrac{3a^2+2a+5}{a^3}$

6) $\dfrac{x-1}{x+1}$

7) $\dfrac{x^2-3x-6}{(x+2)(x+3)}$

8) $\dfrac{2}{(m+1)(m-1)}$

9) $-\dfrac{y+5}{(y+2)^2}$

10) $\dfrac{12x^2-19x+23}{6(x+1)(x-1)}$

2.4

1) $\dfrac{z+3}{z}$

2) $\dfrac{x+2}{x-2}$

3) $\dfrac{u-3}{u(1-u)}$

4) $-\dfrac{2(x-y)}{(2x+1)^2(2x-1)}$

2.5 1) $m = \dfrac{Fd^2}{MG}$

2) $d = \sqrt{\dfrac{GmM}{F}}$

2.6 $P = Fv$

2.7 $v = \sqrt{2gh}$

2.8

1) $ED = \left\{x \neq \frac{1}{2}\right\}$; $S = \{3\}$

2) $ED = \{x \neq -1\}$; $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3) $ED = \{x \neq -3 \text{ et } x \neq -1\}$; $S = \left\{-5, -\frac{5}{3}\right\}$

4) $ED = \{x \neq 1 \text{ et } x \neq 2\}$; $S = \{4\}$

5) $ED = \{x \neq 0 \text{ et } x \neq 5\}$; $S = \{-25, 25\}$

6) $ED = \{x \neq 6\}$; $S = \{-3, 18\}$

2.9

1) $S = \{4\}$

2) $S = \{0\}$

3) $S = \{0; \dfrac{3}{2}\}$

4) $S = \{-1; 1\}$

5) $S = \{-3\}$

6) $S = \{1; 4\}$

7) $S = \emptyset$

8) $S = \{-3\}$

9) $S = \{2\}$

2.10

1) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$

2) $S = \{(15; 35)\}$

3) $S = \left\{\left(-1; \frac{1}{3}\right)\right\}$

4) $S = \{(2\,t+1; t)\,, t \in \mathbb{R}\}$

5) $S = \emptyset$

6) $S = \{(2; 0)\}$

2.11

1) $S = \{(2; -1)\}$
2) $S = \left\{\left(\frac{68}{5}; \frac{27}{5}\right)\right\}$
3) $S = \left\{\left(-\frac{123}{29}; \frac{150}{29}\right)\right\}$
4) $S = \{(4; 3)\}$
5) $S = \{(9/2; -5/3)\}$
6) $S = \{(-2; -3)\}$
7) $S = \{(2; 3; 14)\}$
8) $S = \{(3; -5; 10)\}$
9) $S = \{(5; 1; -5)\}$
10) $S = \{(20; 10; -5)\}$
11) $S = \{(3; -2; -1)\}$
12) $S = \left\{\left(\frac{28}{15}; \frac{313}{60}; \frac{293}{30}\right)\right\}$
13) $S = \{(6; -10; 1)\}$
14) $S = \left\{\left(-\frac{39}{5}; 11; \frac{37}{5}\right)\right\}$
15) $S = \{(1; 2; 3)\}$

2.12

1) $S = \{(5; 4)\}$
2) $S = \{(1; 10); (10; 1\})$
3) $S = \{(-3; -2); (1; 6)\}$
4) $S = \{(-11; 4)\}$

2.13

1) $S = \{(2; 3)\}$
2) $S = \{(-60; 90); (18; 12)\}$
3) $S = \left\{(-5; 3); (3; -5); (2 + \sqrt{13}; 2 - \sqrt{13}); (2 - \sqrt{13}; 2 + \sqrt{13})\right\}$
4) $S = \{(-1; 1); (1; -1)\}$

2.14

La somme est égale à 340 francs.

2.15

La bouteille coûte 102.50 francs et le bouchon coûte 2.50 francs.

2.16

1) -40
2) 160 °C

2.17

Jean avait 40 billes et Pierre avait 50 billes.

2.18

Le nombre est 468.

2.19

220 montées, 60 descentes et 460 aller-retour.

2.20

CHF 111300.- ; CHF 110240.- ; CHF 109200.-

2.21

Il détient 45 ouvrages.

2.22

Les diagonales de ce losange mesurent 12 cm et 17 cm.

2.23

Les deux autres côtés du triangle mesurent 49.5 m et 50.5 m.

2.24

Les deux dimensions sont 391 m et 80 m.

Chapitre 3

Fonctions ($1^{\text{ère}}$ partie)

3.1 Ensembles et intervalles

3.1.1 Ensembles

Une collection d'objets est un **ensemble** si l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à l'ensemble.

Si l'élément x appartient à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.

Si l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

Si tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un sous-ensemble de B. On note $A \subset B$ et on lit « A inclus dans B ».

L'ensemble vide se note $\emptyset$ ou $\{\,\}$.

Un ensemble est toujours un sous-ensemble de lui-même ($A \subset A$).

Ensembles de nombres

- Ensemble des **entiers naturels** :

  $\mathbb{N} =$

- Ensemble des **entiers (relatifs)** :

  $\mathbb{Z} =$

- Ensemble des **nombres rationnels** :

  $\mathbb{Q} =$

- Ensemble des **nombres réels** :

  $\mathbb{R} =$

Exemple 3.1.

a) $\sqrt{-1}$ et $\dfrac{1}{0}$ ne sont pas des nombres réels.

b) En ajoutant une étoile à un ensemble de nombres, on ne considère que les nombres non nuls de cet ensemble. Par exemple :

$\mathbb{N}^* =$

Définition d'un ensemble

On peut définir un ensemble en **énumérant** ses éléments ou en **donnant une condition d'appartenance**.

Exemple 3.2.

Enumérer l'ensemble suivant : $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = 5n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Opérations sur les ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

L'**intersection** de A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A et à B.
On note $A \cap B$ et on lit A *inter* B.

L'**union** de A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).
On note $A \cup B$ et on lit A *union* B.

La **différence** entre A et B est le sous-ensemble de E des éléments qui appartiennent à A, mais pas à B.
On note $A \setminus B$ ou $A - B$ et on lit A *moins* B.

Exemple 3.3.

On donne $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{c; d; e; f\}$. Enumérer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A - B$.

3.1.2 Intervalles

Si a et b sont deux nombres réels avec $a < b$, on note :

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Remarque 3.1.

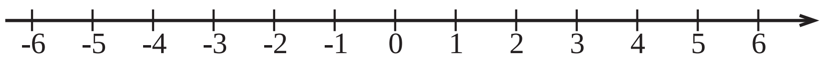
a) On a $]a; b[= [a; b] - \{a; b\}$ et $]a; b] = [a; b] - \{a\}$.

b) **Attention** : $[-1; 5[\neq \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, mais $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\} = [-1; 5[\cap \mathbb{Z}$.

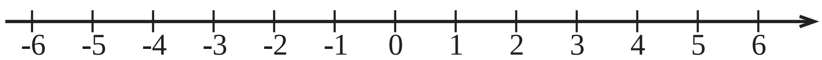
Exemple 3.4.

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

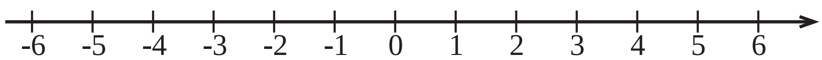
a) $A = [-2; 5]$



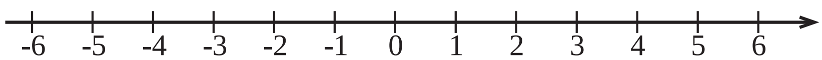
b) $B =]-1; 3[$



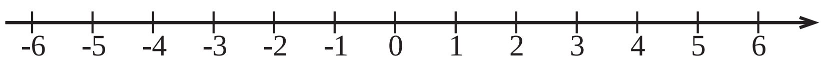
c) $C = [-2; +\infty[$



d) $D =]-3; 1] \cup]2; 4[$



e) $E =]-3; 4] \cap]0; 6[$



3.2 Fonctions

Une **fonction** (ou application) d'un ensemble D vers un ensemble A est une **correspondance** qui associe à **chaque élément de $\boldsymbol{D}$ un et un seul élément de $\boldsymbol{A}$**.

La fonction f de D vers A se note :

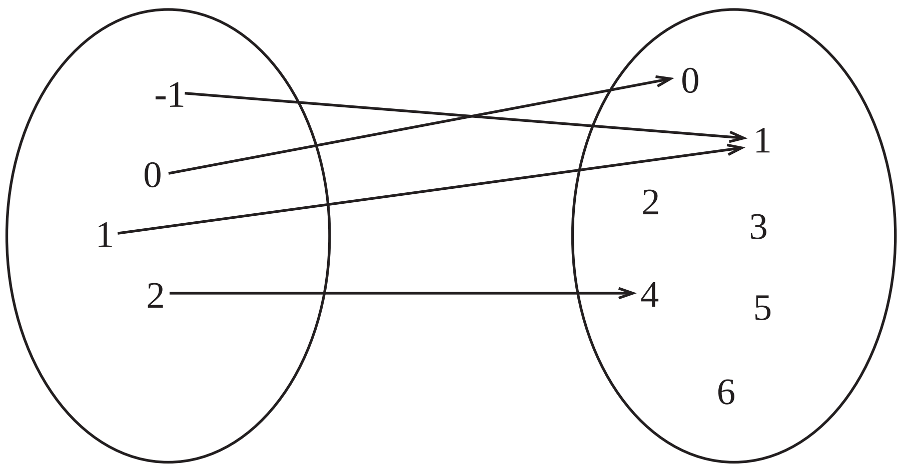
$$\begin{array}{rccc} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- D est appelé **l'ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée** de f.
- L'élément $f(x)$, unique correspondant de x par f, est appelé l'image de x par f.
- Une formule permettant de calculer les images $f(x)$ est appelée l'**expression fonctionnelle** de f.

Une fonction est dite réelle si D et A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.5.

Soit la fonction f dont le diagramme sagittal est le suivant :



a) Enumérer les ensembles de départ et d'arrivée.

b) Déterminer $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ et $B = \{x \in D \mid f(x) = 1\}$.

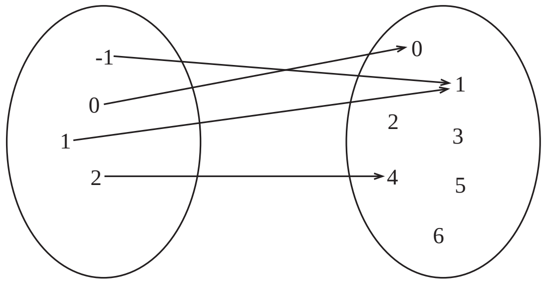
c) Trouver l'expression fonctionnelle de f.

3.2.1 Graphe d'une fonction

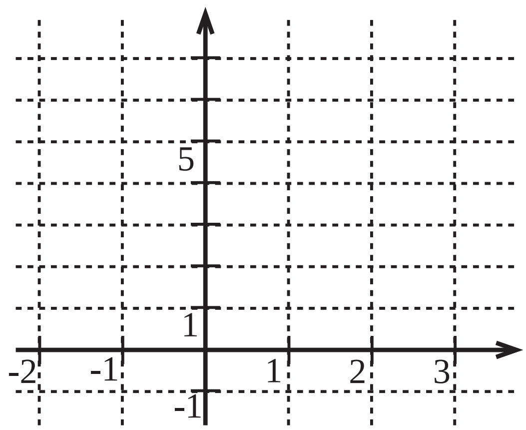
Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x; f(x))$ où $x \in D$. En général, on représente le graphe d'une fonction dans le plan muni d'un système d'axes Oxy. La représentation graphique de f est également appelée **graphe** de f.

Exemple 3.6.

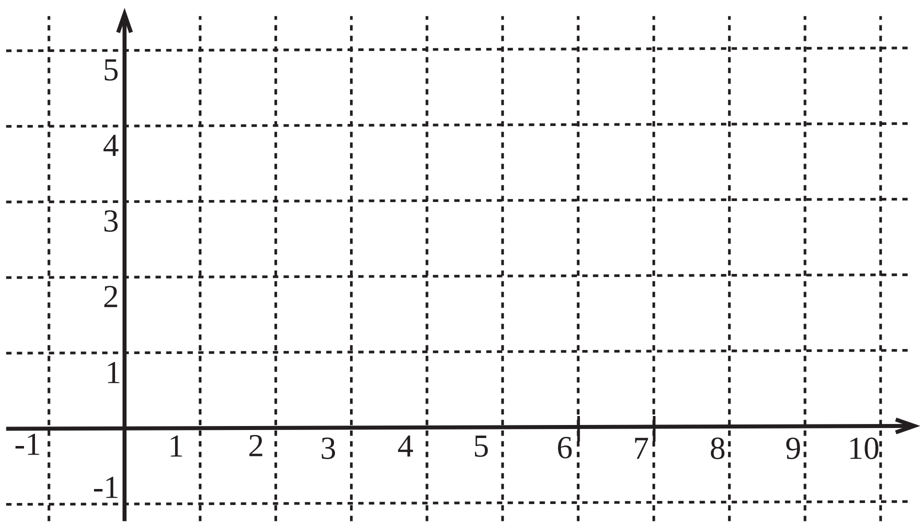
a) Soit la fonction f donnée par :



Donner le graphe G de f et représenter cette fonction ci-dessous :



b) Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$.
Représenter graphiquement cette fonction.



3.2.2 Equation cartésienne du graphe

Les points du graphe de f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$, appelée **équation cartésienne** du graphe de f.

Par exemple, reprenons la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ (exemple 3.6, point b). Le graphe de g est d'équation $y = \sqrt{x}$.

Remarque 3.2.

Une courbe donnée par son équation cartésienne en x et y peut être le graphe d'une fonction, mais ce n'est pas toujours le cas !

Exemple 3.7.

a) La courbe d'équation $3x - 4y - 6 = 0$ est-elle le graphe d'une fonction ?

b) La courbe d'équation $x^2 + y^2 = 25$ est-elle le graphe d'une fonction ?

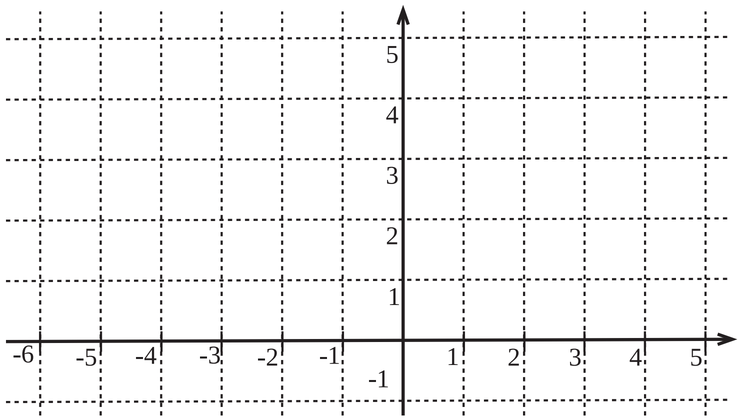
3.2.3 Fonction donnée par son expression fonctionnelle

Si pour une **fonction réelle** f, la relation fonctionnelle $f(x)$ est donnée sans préciser les ensembles de départ et d'arrivée, on choisit :

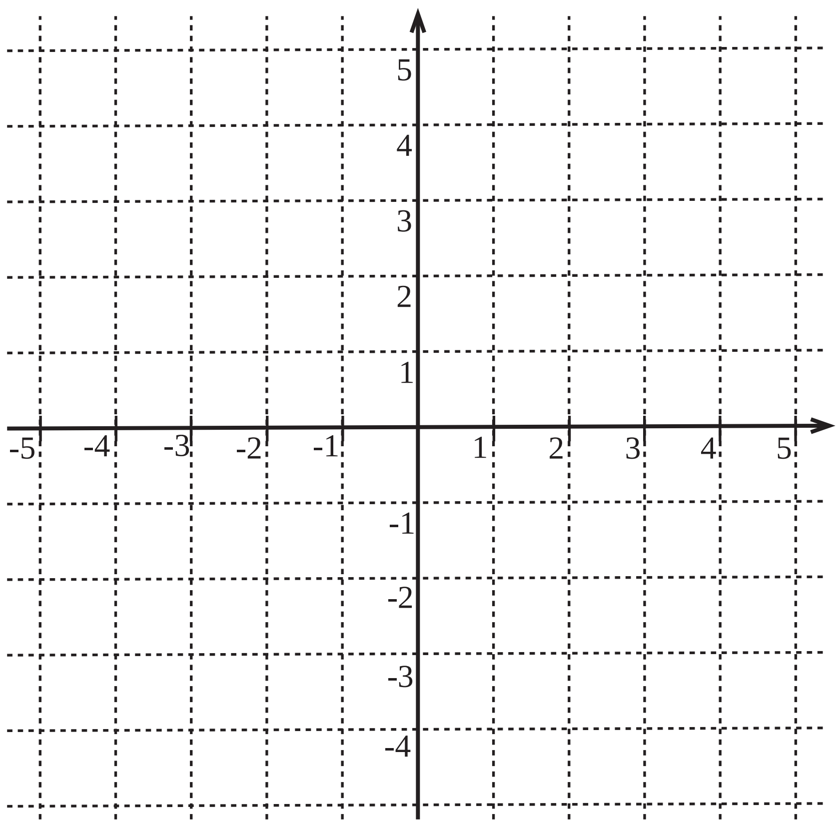
- $A = \mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée
- Le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ possible comme ensemble de départ.

D est alors appelé **ensemble de définition** de la fonction f et est noté $ED(f)$.

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3-x}$. Donner son ensemble de définition et la représenter graphiquement.



b) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Donner son ensemble de définition et la représenter graphiquement.



3.2.4 Zéros et indéfinitions d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle.

- Un nombre réel $x = a$ est une **indéfinition** de f si $f(a)$ n'est pas défini.
- Un nombre réel $x = a$ est un **zéro** de f si $f(a) = 0$.

Pour une fonction f donnée uniquement par son expression fonctionnelle, on a donc

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ indéfinitions } \}$$

Exemple 3.8.

a) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 5}$$

b) Déterminer l'ensemble de définition et les zéros de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x - 6}{\sqrt{8 - x}}$$

Remarque 3.3.

a) Les zéros de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Les zéros de f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox.

c) Si $x = a$ est une indéfinition de f, le graphe de f ne coupe pas la droite verticale $x = a$.

3.3 Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction du type $f(x) = mx + h$ où $m, h \in \mathbb{R}$

Propriétés d'une fonction affine

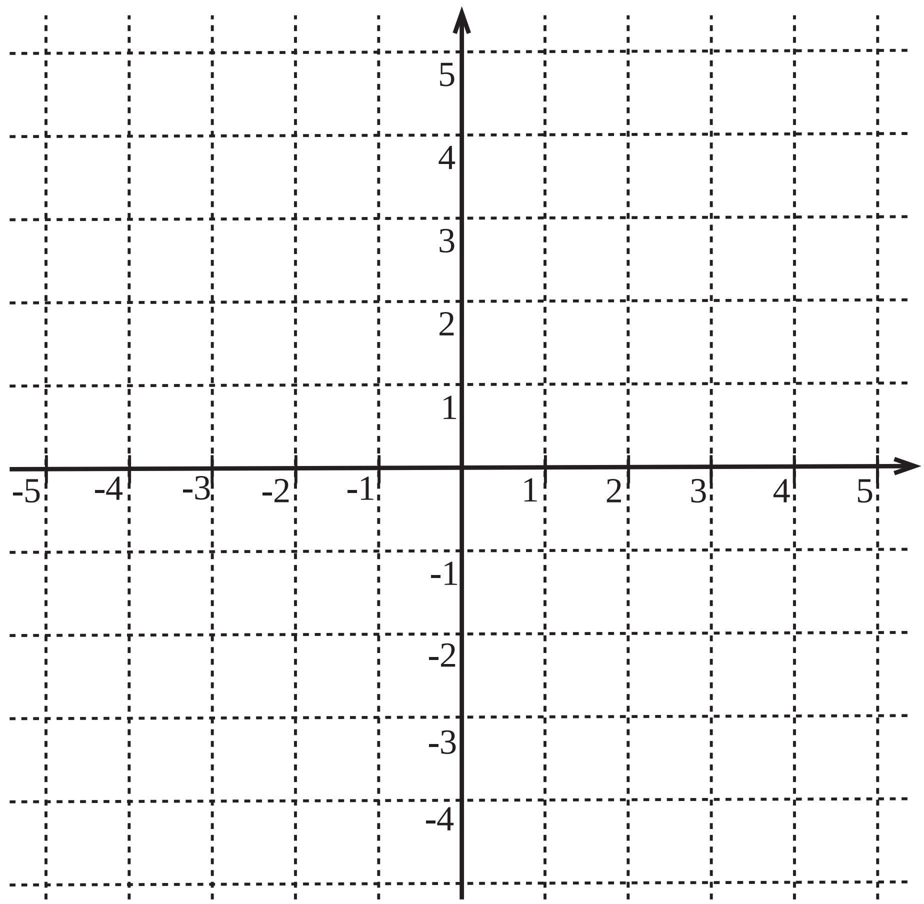
- Le graphe d'une fonction affine est une **droite**.
- m est la **pente** du graphe de f :
  si $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont deux points du graphe de f, alors $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- h est l'**ordonnée à l'origine** de f :
  $H(0; h)$ est l'intersection du graphe de f avec l'axe Oy.
- A toute droite **non verticale** est associée une fonction affine.

Exemple 3.9.

Soient les fonctions affines f et g définies par :

- $f(x) = -2x + 3$
- $g(-5) = -5$ et $g(1) = -1$.

a) Représenter graphiquement f et g.
b) Déterminer l'expression fonctionnelle de g.
c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des graphes de f et g.



3.4 Fonctions quadratiques

Une **fonction quadratique** est une fonction du type

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

Propriétés d'une fonction quadratique

- Le graphe d'une fonction quadratique est une **parabole**.
- Cette parabole est

  Convexe (ouverte vers le haut) si $a > 0$ **Concave** (ouverte vers le bas) si $a < 0$

- Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de f. Rappelons que la fonction f possède les zéros suivants :

  a) $\Delta < 0$: aucun zéro

  b) $\Delta = 0$: un seule zéro (double) $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$

  c) $\Delta > 0$: deux zéros $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Le graphe d'une parabole admettant un zéro double x_1 a pour équation cartésienne

$$y = a(x - x_1)^2$$

- Le graphe d'une parabole admettant deux zéros distincts x_1 et x_2 a pour équation cartésienne

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Le **sommet** de la parabole est donné par $S(p; q)$ avec $p = -\dfrac{b}{2a}$ et $q = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
- Le graphe d'une parabole de sommet $S(p; q)$ admet pour équation cartésienne

$$y = a(x - p)^2 + q \quad \text{ou} \quad y - q = a(x - p)^2$$

- c est l'**ordonnée à l'origine** de f : $(0; c)$ est l'intersection du graphe de f avec Oy, deuxième axe de coordonnées.

Exemple 3.10.

a) Déterminer les zéros et le sommet de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

b) Déterminer la fonction quadratique g de sommet $S(3; 4)$ et dont 1 est un zéro.

c) Déterminer la fonction quadratique h possédant les zéros -1 et 3, passant par $A(0; -9)$.

3.5 Exercices

3.1

Soit A la partie de $\mathbb{N}$ définie par $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Donner en notation énumérative les parties suivantes de A :

a) $B = \{x \in A \mid x \text{ est un multiple de } 3\}$.

b) $C = \{x \in A \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$.

c) $B \cap C$, $B - C$, $(A - B) \cap (A - C)$.

3.2

Expliciter les ensembles suivants :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } y \in \mathbb{N} \text{ avec } (x^2 = y^2)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| = 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 3| \leq 2\}$

3.3

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Trouver quatre sous-ensembles A, B, C et D de E tels que :

- $A \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$
- $C \cup B = \{4; 5; 7\}$
- $E \cap D = \{6; 8; 9; 10\}$

3.4

Déterminer la partie E de $\mathbb{N}$ qui satisfait aux conditions :

- $E \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E \subset \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- $\{1; 3; 4; 6\} \subset E$

3.5

Trouver les parties A, B et C de $\mathbb{N}$ qui remplissent les conditions :

- $1 \in A$
- $\{2; 4\} \cap B = \emptyset$
- $3 \in A \cap B \cap C$
- $4 \in A \cap C$
- $(A \cap B) - C \neq \emptyset$
- $(B \cup C) - A \neq \emptyset$
- $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4\}$

3.6

Déterminer les sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ qui remplissent les conditions :

- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- Pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $x - y = 1$ et pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $x - y = 1$.

3.7

Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ et } x \leqslant 2\}$

f) $F = \mathbb{R}$

g) $G = \{2\}$

3.8

Trouver deux ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$ et $A \cap B = \{\ \}$

b) $A \cup B = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\}$ et $A \cap B = \{2\ ;3\ ;4\}$

3.9

On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$.
Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I - (J \cup K)$, $(I - J) \cup (I - K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3\ ;\ 4[$ $\quad J = [-2\ ;\ 0[$ $\quad K =]-5\ ;\ 3]$

b) $I =]-4\ ;\ 2]$ $\quad J = [-2\ ;\ 3]$ $\quad K =]-3\ ;\ 1[$

c) $I =]-5\ ;\ 3[$ $\quad J =]-1\ ;\ 5]$ $\quad K = [-3\ ;\ 4]$

3.10

Soit $D = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
On considère les fonctions suivantes de D dans $\mathbb{Q}$. Énumérer les éléments de $f(D)$.

a) $f : x \longmapsto 3\,x - 5$

b) $f : x \longmapsto x^2 - 3$

c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+4} - 1$

d) $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

3.11

Les correspondances suivantes sont-elles des fonctions ?
Justifier les réponses.

a) $a: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 3\,x-2 \end{array}$

b) $b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 5\,x-7 \end{array}$

c) $c: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$

d) $d: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

e) $e: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 5\,x^2-5 \end{array}$

f) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$

g) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

h) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$

i) $i: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

j) $j: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$

3.12

Déterminer l'ensemble de définition D et les zéros éventuels des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2+9}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2\,x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-7}{(x-3)(x+4)}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

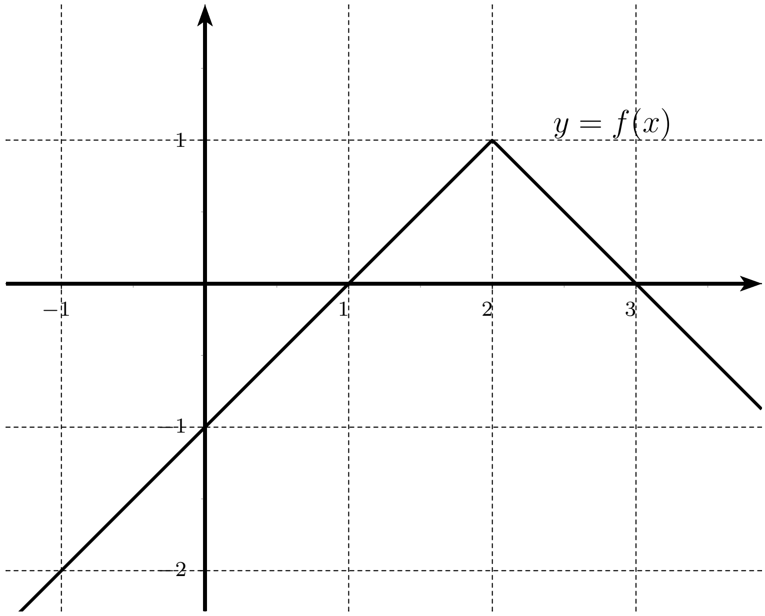
j) $f(x) = \dfrac{5\,x}{\sqrt{x+5}}$

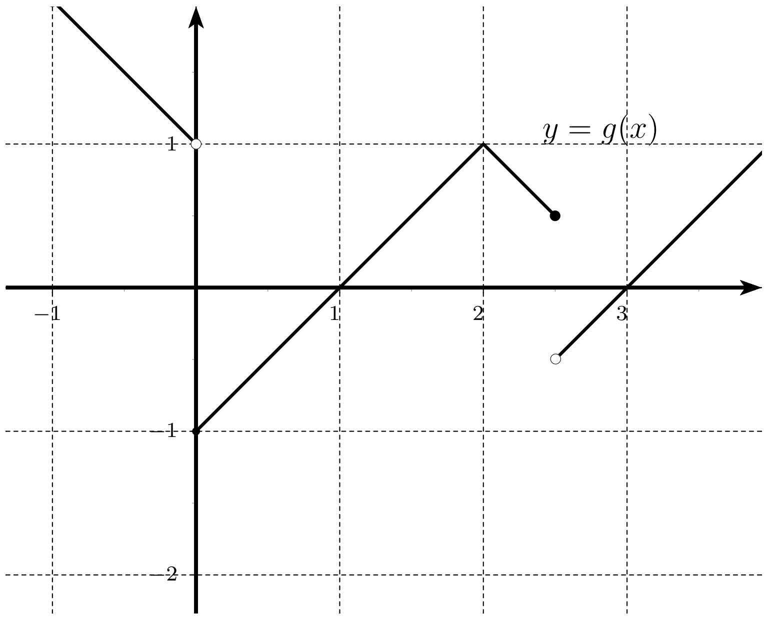
k) $f(x) = \sqrt{2-x}$

l) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-2\,x}}$

3.13

On donne les fonctions f et g par leur graphe.





a) Peut-on dire que g soit définie par l'expression mathématique suivante ?

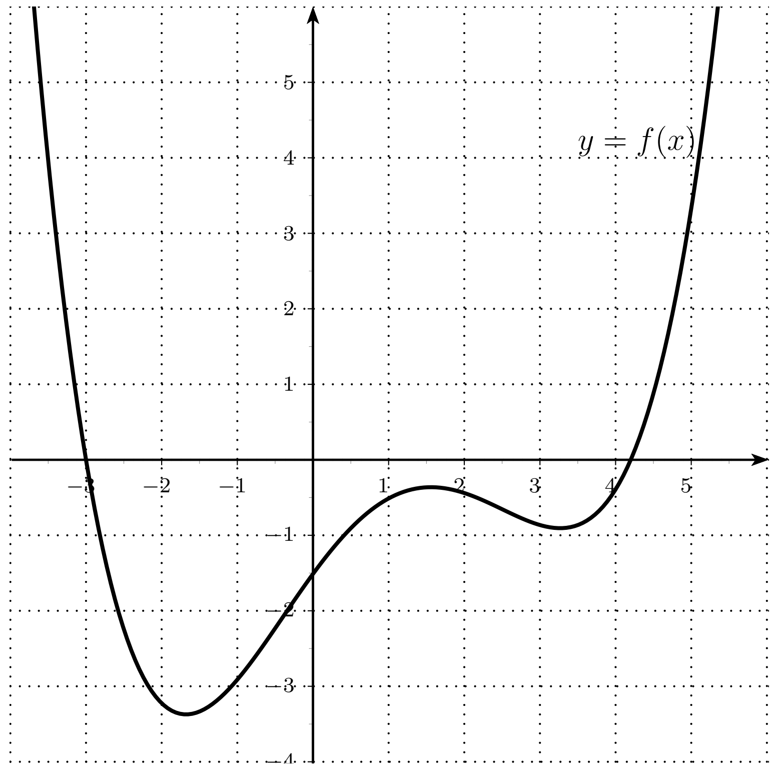
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \in [0; 2.5] \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Esquisser le graphe de la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

3.14

La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$;

3.15

Représenter graphiquement les fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$$

puis, en s'aidant du graphique, résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = g(x)$

c) $f(x) = x$

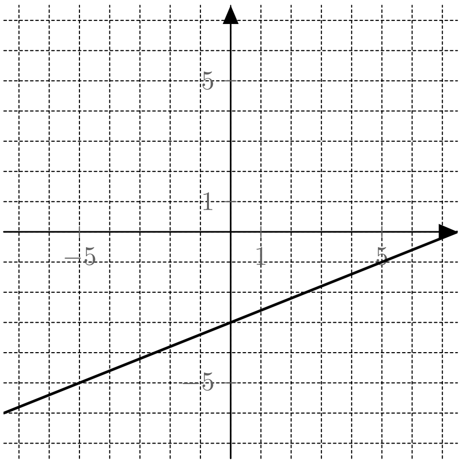
d) $f(x) < 0$

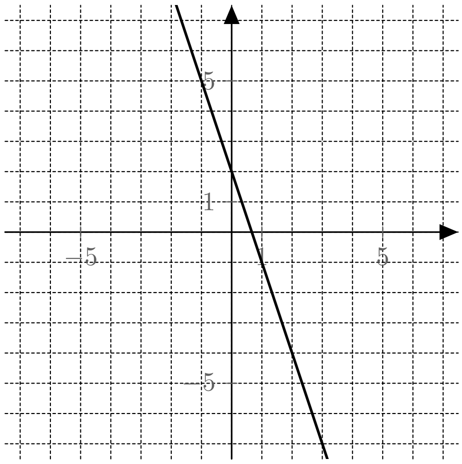
e) $f(x) > g(x)$

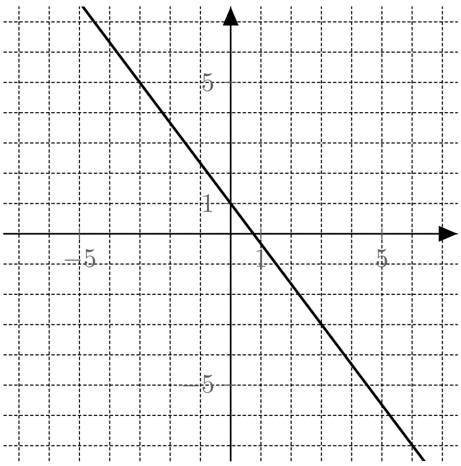
f) $f(x) \geq x$

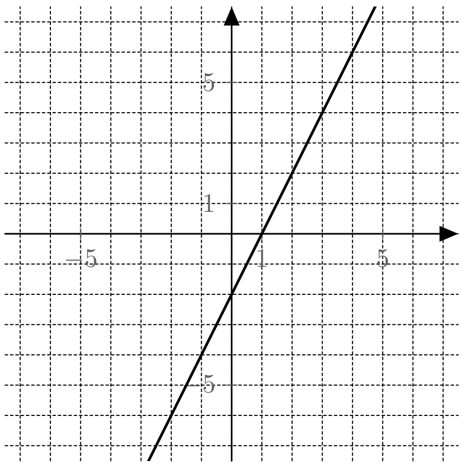
3.16

Déterminer les fonctions associées à chacune des droites suivantes.



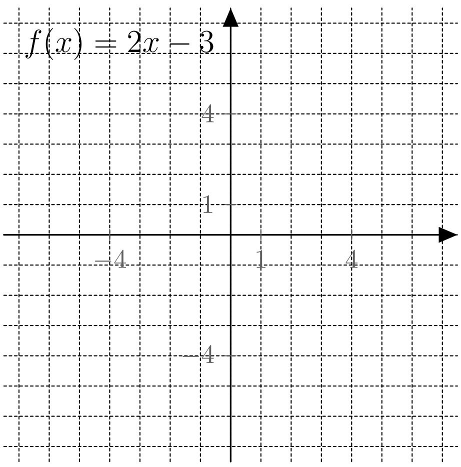


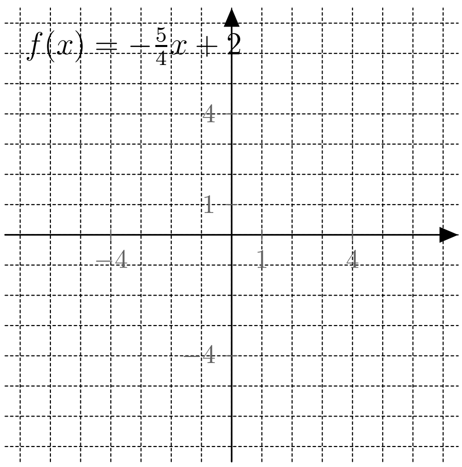


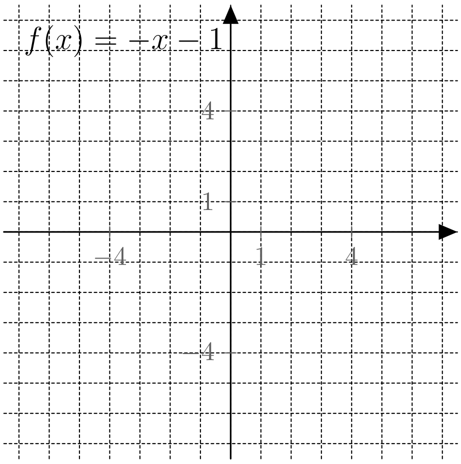


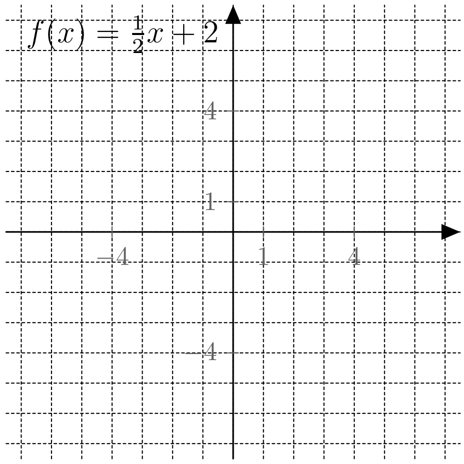
3.17

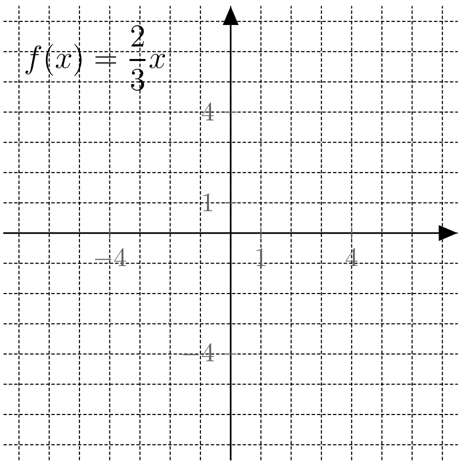
Dessiner les fonctions suivantes sans utiliser de tableau de valeurs.

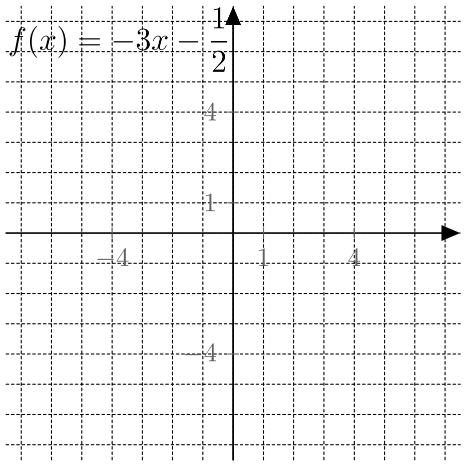






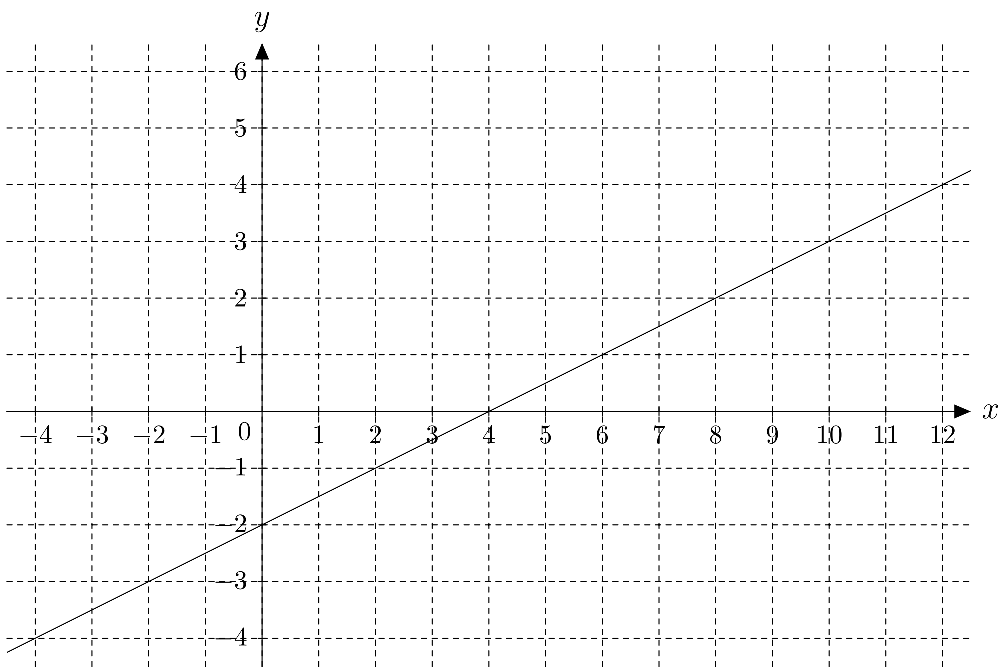






3.18

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



Effectuer l'exercice sans calculer l'expression algébrique de f.

a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(6;1)$	$(8;2)$	$(-2;1)$	$(-2;0)$
$(1;6)$	$(2;1)$	$(-2;-1)$	$(5;\frac{1}{3})$
$(2;8)$	$(2;-1)$	$(-2;-3)$	$(5;\frac{1}{2})$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(10;.....)$	$(.....;0)$	$(.....;-\frac{11}{4})$
$(-1;.....)$	$(.....;4)$	$(.....;-4)$
$(0;.....)$	$(.....;\frac{5}{2})$	$(-4;.....)$

c) Donner les images.

$f(10)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(\frac{3}{2})$
$f(-1)$	$f(-3)$	$f(7)$	$f(\frac{17}{2})$

d) Résoudre les équations.

$f(x)=0$	$f(x)=-3$	$f(x)=-\frac{15}{4}$
$f(x)=4$	$f(x)=\frac{3}{2}$	$f(x)=5$

3.19

Soit f la fonction donnée par $f(x)=8x+11$. *Effectuer l'exercice sans tracer le graphe de f.*

a) Calculer.

$f(2)$	$f(0)$	$f(\frac{1}{2})$	$f(2k)$
$f(-1)$	$f(-3)$	$f(-\frac{7}{3})$	$f(-3k+5)$

b) Résoudre les équations.

$f(x)=19$	$f(x)=5$	$f(x)=0$
$f(x)=-5$	$f(x)=-11$	$f(x)=\frac{59}{3}$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(2;13)$	$(1;-3)$	$(-5;6)$	$(-11;0)$
$(2;27)$	$(-3;-11)$	$(-2;-5)$	$(-\frac{3}{5};\frac{31}{5})$
$(-1;3)$	$(1;19)$	$(0;0)$	$(\frac{47}{7};-\frac{12}{7})$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(2;.....)$	$(\frac{3}{5};.....)$	$(.....;\frac{31}{5})$
$(1;.....)$	$(0;.....)$	$(k;.....)$
$(-\frac{7}{2};.....)$	$(.....;0)$	$(.....;k)$

3.20

a) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par les points $(-3;19)$ et $(4;-2)$.

b) Déterminer la fonction affine f telle que $f(2)=0$ et $f(5)=-12$.

c) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de $\frac{2}{3}$ et une ordonnée à l'origine de 1.

d) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de -2 et passe par le point $(3;-1)$.

e) Déterminer la fonction affine dont le graphe est une droite horizontale passant par $(6;2)$.

f) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par l'origine et est parallèle au graphe de la fonction g donnée par $g(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$.

g) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par le point $(1;3)$ et est parallèle au graphe de la fonction g donnée par $g(x)=5x+2$.

h) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par les points $(-2;-17)$ et $(2;11)$.

i) Déterminer la fonction affine dont le graphe a une pente de $-\frac{5}{4}$ et passe par le point $(1;-1)$.

3.21

Dessiner les graphes des fonctions affines $f(x)=mx+h$ telles que :

a) $f(-1)=2$, $m=-2$

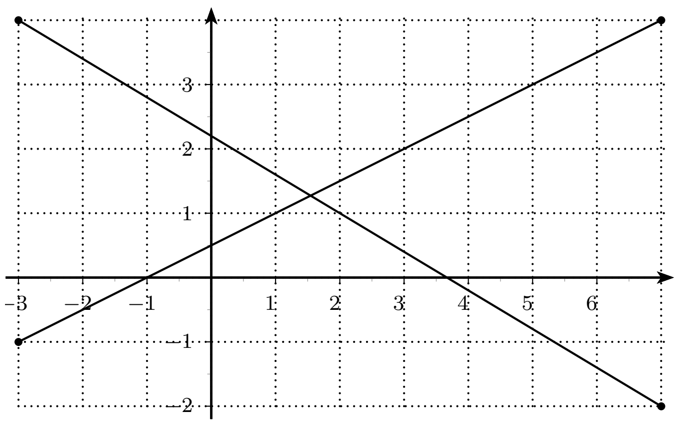
b) $f(0)=-1$, $m=\frac{3}{2}$

c) $f(2)=0$, $m=-\frac{3}{5}$

d) $f(3)=1$, $m=1$

e) $f(4)=5$, $m=0$

3.22



a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

b) Trouver la fonction f dont le graphe est la droite qui passe par l'origine et par I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est la droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2;-1)$.

3.23

Le gérant d'une piste de karting propose deux options à ses clients

- Option 1 : le client paie 45 francs la séance
- Option 2 : Le client paie un forfait (somme indépendante du nombre de séances faites) annuel de 250 francs et 20 francs par séance.

a) Quelle est l'option la plus avantageuse pour un client faisant 8 séances de karting par année ? Justifier la réponse par calculs.

b) On désigne par x le nombre de séances que fait un client par année. Déterminer les fonctions f et g qui donnent les dépenses pour x séances par année si l'on choisit les options 1 et 2 respectivement.

c) En choisissant l'option 2, un client a payé en une année 630 francs. Calculer le nombre de séances de karting effectuées pendant l'année, ainsi que le prix qu'il aurait payé s'il avait choisi l'option 1.

d) A partir de combien de séances par année l'option 2 devient-elle meilleur marché que l'option 1 ?

e) Une option 3 comportant un forfait annuel et un prix par séance est nouvellement proposée. On sait que pour cette option, on paie 450 francs pour 10 séances et 750 francs pour 20 séances. Déterminer la fonction h qui donne la dépense en fonction du nombre x de séances faites pendant l'année si l'on choisit l'option 3.

3.24

Un père défie son fils au 100 mètres en lui laissant un peu d'avance. Les graphes indiquant la distance parcourue (en mètres) par les deux personnes en fonction du temps (en secondes) sont donnés ci-dessous.

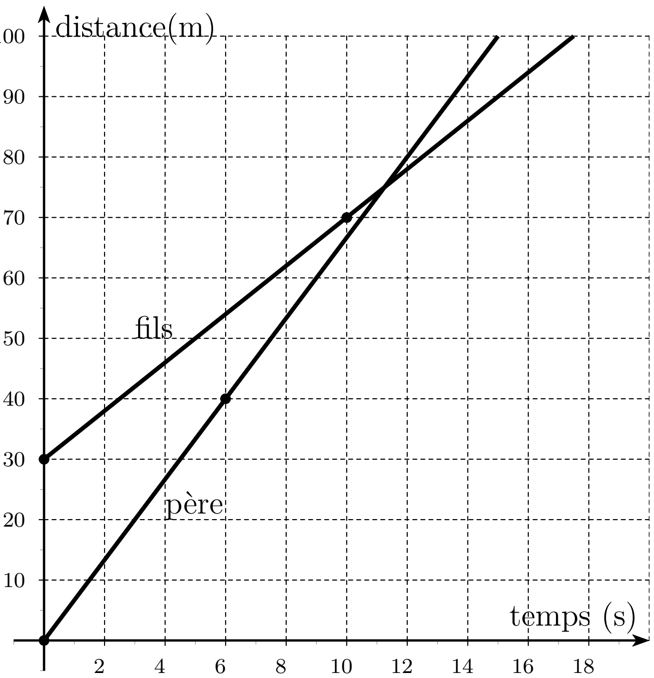
a) Combien de mètres d'avance le père a-t-il laissé à son fils ?

b) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

c) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

d) Quelles sont les vitesses des deux coureurs ?

e) Les deux personnes ont-elles été côte-à-côte ? Si oui, à quelle distance de la ligne de départ du père ?



3.25

La résistance électrique d'un fil de cuivre s'exprime en Ohms (Ω). Elle est de 31 Ω à 8°C et de 27 Ω à -24°C. On suppose que la résistance dépend de la température suivant une fonction affine.

a) Exprimer la résistance R en fonction de la température T.

b) Quelle est la résistance de ce fil à 40°C ? et à 16°C ?

c) A quelle température la résistance est-elle de 36 Ω ? de 20 Ω ?

d) Exprimer la température T en fonction de la résistance R.

3.26

Vous vendez des lecteurs MP3. Les frais fixes totaux sur une année s'élèvent à $24'000$ francs et le prix de revient des lecteurs MP3 est de 95 francs par unité. Après une étude de marché, vous fixez le prix de vente à 125 francs par lecteur MP3.

a) Si vous produisez $1'000$ MP3 en une année, quelles seront les charges totales ?

b) Vous produisez x MP3 en une année ; exprimer les charges totales C en fonction de x.

c) Si vous vendez $1'000$ MP3 en une année, quel sera le chiffre d'affaires (revenu de la vente des MP3) ?

d) Vous vendez x MP3 en une année ; exprimer le chiffre d'affaires R en fonction de x.

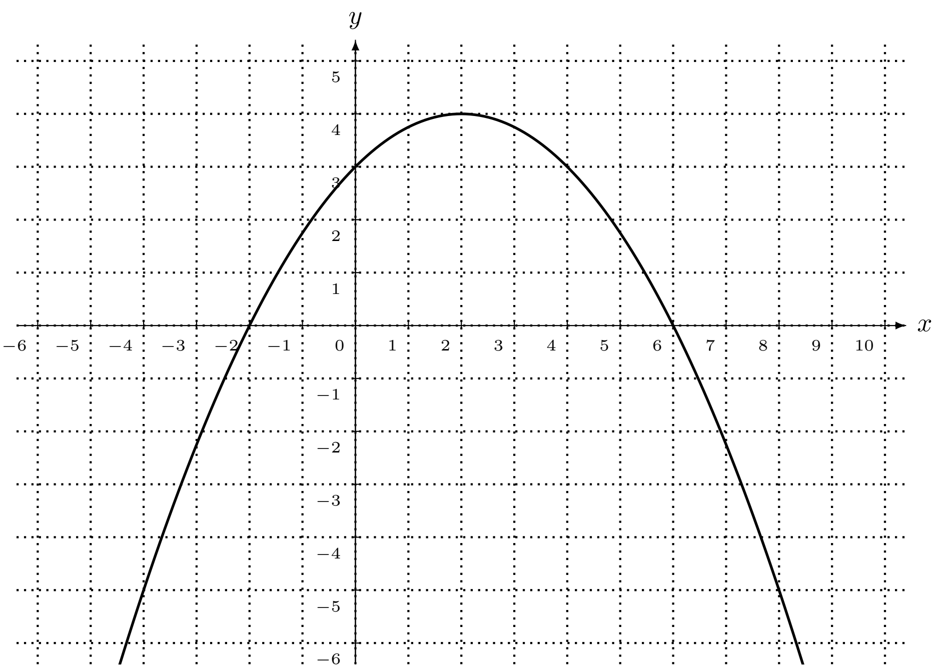
e) Représenter graphiquement les fonctions C et R pour $0 \leq x \leq 2'000$.

f) A quoi correspond l'intersection des droites qui représentent les fonctions C et R ?

g) On appelle **point mort** le nombre d'objets vendus pour lequel les charges sont égales au chiffre d'affaires et **seuil de rentabilité** le chiffre d'affaires qui couvre exactement les charges. Calculer le point mort et le seuil de rentabilité de la vente des MP3.

3.27

Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous.



a) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(4;3)$	$(-4;5)$	$(-2;0)$
$(3;4)$	$(-4;-5)$	$(0;-2)$

b) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(4;.....)$	$(0;.....)$	$(.....;4)$
$(-4;.....)$	$(.....;0)$	$(.....;5)$

c) Donner les images.

$f(4)$ $\quad f(-4)$ $\quad f(0)$ $\quad f(-2)$ $\quad f(8)$

d) Résoudre les équations.

$f(x)=-5$	$f(x)=0$	$f(x)=4$
$f(x)=5$	$f(x)=3$	$f(x)=7$

3.28

Soit f la fonction donnée par $f(x)=x^2+2x-15$.

a) Calculer.

$f(1)$	$f(\frac{1}{2})$	$f(-3k+5)$
$f(-3)$	$f(-\frac{7}{3})$	
$f(0)$	$f(2k)$	

b) Résoudre les équations.

$f(x)=20$	$f(x)=5$
$f(x)=-16$	$f(x)=-20$
$f(x)=0$	$f(x)=-4$

c) Les points suivants appartiennent-ils au graphe de f ?

$(-12;1)$	$(-4;-7)$	$(\frac{1}{2};-\frac{55}{4})$
$(1;-12)$	$(-5;0)$	$(\frac{1}{2};\frac{18}{3})$
$(12;-1)$	$(0;0)$	$(-\frac{4}{3};-\frac{143}{9})$

d) Trouver les coordonnées manquantes pour que les points appartiennent au graphe de f.

$(1;.....)$	$(.....;-7)$
$(2;.....)$	$(.....;-16)$
$(\frac{1}{2},.....)$	$(.....;7)$
$(-11;.....)$	$(.....;-21)$
$(0;.....)$	$(k;.....)$
$(.....;0)$	$(.....;k)$

3.29

Dessiner les graphes des fonctions f suivantes

a) $f(x) = x^2 - 4\,x$

b) $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

3.30

Dessiner les graphes des fonctions $f(x) = x^2 - x - 6$ et $g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$, puis, en s'aidant du graphe, résoudre les équations et inéquations données ci-dessous.

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$

e) $f(x) < 0$

f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$

h) $f(x) < g(x)$

i) $g(x) \leq -2$

3.31

Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x) = x^2 - 5\,x + 4$ et $g(x) = -4\,x + 10$

b) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2\,x^2 - 6$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$

3.32

Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

a) de sommet $S(2;5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4;-1)$;

b) qui passe par les points $A(-1;9), B(0;5)$ et $C(2;15)$.

c) qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite d'équation $y = 8$;

3.33

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + m\,x + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

3.34

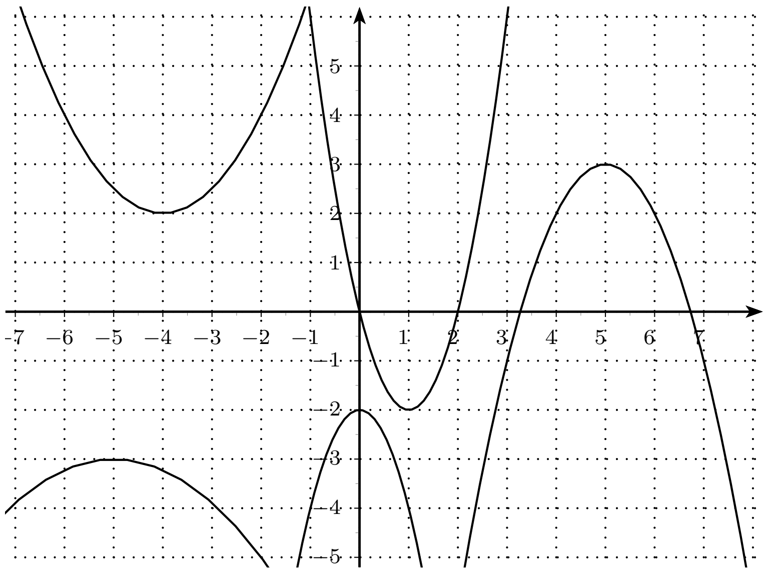
Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation

$$x^2 + m\,x + 3 = x$$

a-t-elle exactement une solution ?

3.35

Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



3.36

La hauteur h (en m) au-dessus du sol d'un jouet fusée t secondes après son lancement est donnée par $h(t) = -16\,t^2 + 120\,t$.
Quand (à un centième de seconde près) la fusée sera-t-elle à 180 m du sol ?

3.37

Une balle de baseball est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 64 m/s. Le nombre de mètres au-dessus du sol après t secondes est donné par $s(t) = -5\,t^2 + 64\,t$.

a) Quand la balle sera-t-elle à 59 m au-dessus du sol ?

b) Quand touchera-t-elle le sol ?

3.38

La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage. Pour une certaine voiture circulant à v km/h, la distance de freinage d (en m) est donnée par $d(v) = v + \dfrac{v^2}{20}$.

a) Calculer la distance de freinage quand v vaut 55 km/h.

b) Si un conducteur décide de freiner 120 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

3.39

Un objet est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de v m/s ; après t secondes il est à une distance s donnée par la fonction $s(t) = v\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.
Si $g = 9.8$ m/s^2 et si la vitesse initiale est de 120 m/s, trouver :

a) le temps que met l'objet pour s'élever à 60 m au-dessus du sol

b) la hauteur maximale atteinte par l'objet et le temps requis

3.6 Réponses

3.1

a) $B = \{0; 3; 6; 9\}$

b) $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

c) $B \cap C = \{3; 6\}$, $B - C = \{0; 9\}$, $(A - B) \cap (A - C) = \{5; 7\}$

3.2

a) $A = \{-1; 0\}$

b) $B = \mathbb{Z}$

c) $C = \{-3; 1\}$

d) $D = \{-1; 0; 1\}$

e) $E = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$

3.3 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{5; 7\}$, $C = \{4\}$, $D = \{6; 8; 9; 10\}$.

3.4 $E = \{1; 3; 4; 6\}$

3.5 $A = \{1; 3; 4\}$, $B = \{1; 3\}$, $C = \{2; 3; 4\}$

3.6 $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 5\}$

3.7

a) $A = [-3 \ ; \ 5]$

b) $B = [4 \ ; \ 5[$

c) $C =]-\infty \ ; \ 1[$

d) $D = [10 \ ; \ +\infty[$

e) $E = [-2 \ ; \ 2]$

f) $F =]-\infty \ ; \ +\infty[$

g) La notation sous forme d'intervalle n'existe pas

3.8

a) $A = \{0 \ ; 1 \ ; 2\}$ et $B = \{3 \ ; 4\}$ par exemple

b) $A = \{0 \ ; 2 \ ; 3 \ ; 4\}$ et $B = \{1 \ ; 2 \ ; 3 \ ; 4\}$ par exemple

3.9

a) $[-2; 0[$ $[-3; 3]$ $]3; 4[$ $[-3; -2[\cup [0; 4[$

b) $[-2; 2]$ $]-3; 1[$ $]-4; -3]$ $]-4; -2[\cup [1, 2]$

c) $]-1; 3[$ $[-3; 3[$ $]-5; -3[$ $]-5; -1]$

3.10

a) $f(D) = \{-11; -8; -5; -2; 1\}$

b) $f(D) = \{-3; -2; 1\}$

c) $f(D) = \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}\}$

d) $f(D) = \{-\frac{1}{5}; 0; 1; \frac{3}{5}\}$

3.11

a) oui
b) non
c) non
d) oui
e) non
f) non
g) oui
h) non
i) non
j) non

3.12

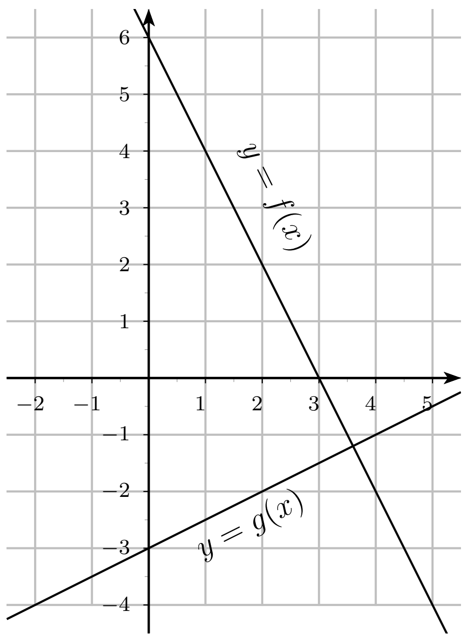
a) $D = \mathbb{R} - \{3\}$; zéro : -
b) $D = \mathbb{R} - \{3\}$; zéro : 0
c) $D = \mathbb{R} - \{-5\}$; zéros : $-1, 1$
d) $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$; zéros : $-1, 1$
e) $D = \mathbb{R}$; zéro : -2
f) $D = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$; zéros : $1; -\dfrac{1}{2}$
g) $D = \mathbb{R} - \{-4; 3\}$; zéros : $\sqrt{7}; -\sqrt{7}$
h) $D = \mathbb{R} - \{-2\}$; zéro : -
i) $D = [1; +\infty[$; zéro : 1
j) $D =]-5; +\infty[$; zéro : 0
k) $D =]-\infty; 2]$; zéro : 2
l) $D = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$; zéro : -

3.13 –

3.14

a) $f(0) = -1.5$
b) $f(-2) = -3.2$
c) $f(x) = 0 \iff x \in \{-3; 4.2\}$
d) $f(x) = 2 \iff x \in \{-3.3; 4.8\}$
e) si $a = -3.4$; $x = -1.7$
f) $f(x) = x \iff x \in \{-2.4; 5.3\}$
g) $f(x) = -x \iff x \in \{-3.5; 0.7\}$

3.15



a) $x = 3$
b) $x = 3.6$
c) $x = 2$
d) $x > 3$
e) $x < 3.6$
f) $x \leq 2$

3.16

a) $f(x) = \dfrac{2}{5}x - 3$ b) $f(x) = -3x + 2$ c) $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + 1$ d) $f(x) = 2x - 2$

3.17

–

3.18

a)	Oui.	Oui.	Non.	Non.
	Non.	Non.	Non.	Non.
	Non.	Oui.	Oui.	Oui.

b)	$(10;3)$	$(4;0)$	$(-\frac{3}{2};-\frac{11}{4})$
	$(-1;-\frac{5}{2})$	$(12;4)$	$(-4;-4)$
	$(0;-2)$	$(9;\frac{5}{2})$	$(-4;-4)$

c)	$f(10)=3$	$f(0)=-2$	$f(3)=-\frac{1}{2}$	$f(\frac{3}{2})=-\frac{5}{4}$
	$f(-1)=-\frac{5}{2}$	$f(-3)=-\frac{7}{2}$	$f(7)=\frac{3}{2}$	$f(\frac{17}{2})=\frac{9}{4}$

d)	$S=\{4\}$	$S=\{-2\}$	$S=\{-\frac{7}{2}\}$
	$S=\{12\}$	$S=\{7\}$	$S=\{14\}$

3.19

a)	$f(2)=27$	$f(-3)=-13$	$f(2k)=16k+11$
	$f(-1)=3$	$f(\frac{1}{2})=15$	$f(-3k+5)=-24k+51$
	$f(0)=11$	$f(-\frac{7}{3})=-\frac{23}{3}$	

b)	$S=\{1\}$	$S=\{-\frac{3}{4}\}$	$S=\{-\frac{11}{8}\}$
	$S=\{-2\}$	$S=\{-\frac{11}{4}\}$	$S=\{\frac{13}{12}\}$

c)	Non.	Non.	Non.	Non.
	Oui.	Non.	Oui.	Oui.
	Oui.	Oui.	Non.	Non.

d)	$(2;27)$	$(\frac{3}{5};\frac{79}{5})$	$(-\frac{3}{5};\frac{31}{5})$
	$(1;19)$	$(0;11)$	$(k;8k+11)$
	$(-\frac{7}{2};-17)$	$(-\frac{11}{8};0)$	$(\frac{k-11}{8};k)$

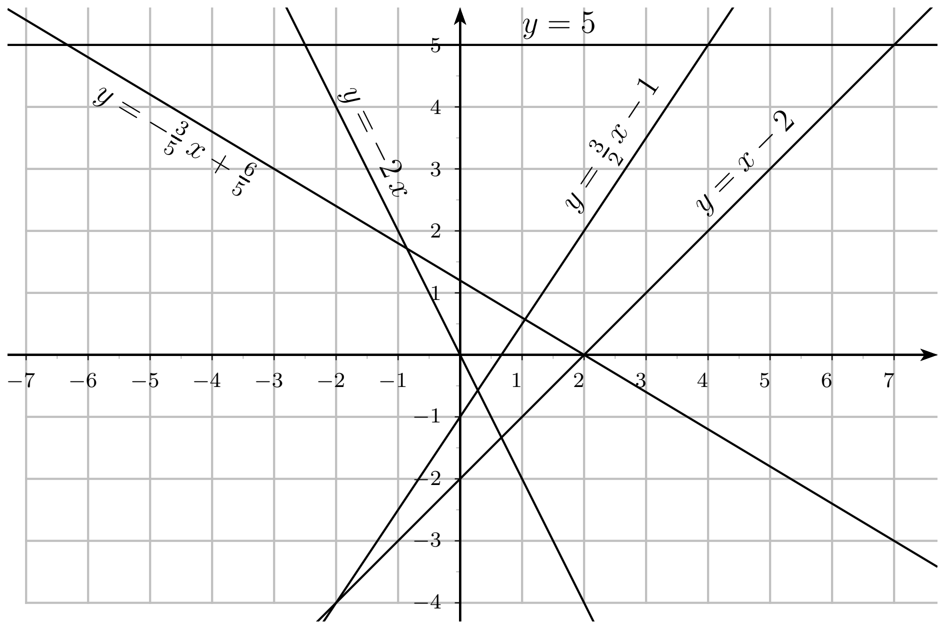
3.20

a) $f(x) = -3x + 10$ d) $f(x) = -2x + 5$ g) $f(x) = 5x - 2$

b) $f(x) = -4x + 8$ e) $f(x) = 2$ h) $f(x) = 7x - 3$

c) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ f) $f(x) = \frac{3}{2}x$ i) $f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

3.21



3.22

a) $I\left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11}\right)$ b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$ c) $f(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

3.23

a) Option 1 ; économie : 50 francs
b) $f(x) = 45x$; $g(x) = 20x + 250$
c) 19 séances ; prix avec option 1 : 855 francs
d) A partir de 11 séances
e) $h(x) = 30x + 150$

3.24

a) 30 m ;
b) le père a gagné avec 2.5 s d'avance ;
c) 10 m ;
d) père : 6.67 m/s ; fils : 4 m/s ;
e) côte à côte après 11.25 s à 75 m de la ligne de départ du père.

3.25

a) $R = \dfrac{1}{8}T + 30$;
b) 35Ω à 40°C ; 32Ω à 16°C ;
c) 36Ω à 48°C ; 20Ω à −80°C ;
d) $T = 8R - 240$.

3.26

a) $119'000$ francs ;
b) $C(x) = 24'000 + 95x$;
c) $125'000$ francs ;
d) $R(x) = 125x$;
f) coûts = revenus ;
g) point mort : 800 MP3 ; seuil rentabilité : $100'000$ francs.

3.27

a) Oui. Non. Oui.
Non. Oui. Non.

b) $(4;3)$ $(0;3)$ $(2;4)$
$(-4;-5)$ $(-2;0)$ ou $(6;0)$ Impossible.

c) $f(4) = 3$ $f(-4) = -5$ $f(0) = 3$ $f(-2) = 0$ $f(8) = -5$

d) $S = \{-4;8\}$ $S = \{-2;6\}$ $S = \{2\}$
$S = \emptyset$ $S = \{0;4\}$ $S = \emptyset$

3.28

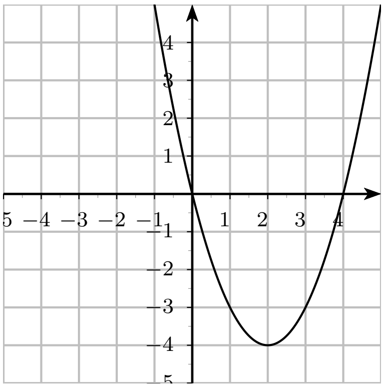
a) $f(1) = -12$ $f(\frac{1}{2}) = -\frac{55}{4}$ $f(-3k+5) = 9k^2 - 36k + 20$
$f(-3) = -12$ $f(-\frac{7}{3}) = -\frac{128}{9}$
$f(0) = -15$ $f(2k) = 4k^2 + 4k - 15$

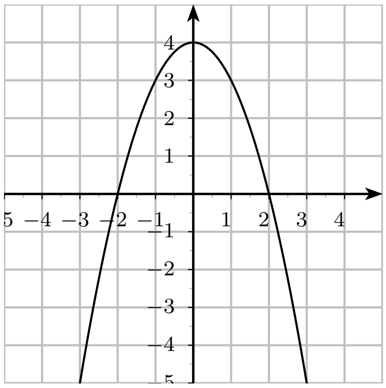
b) $S = \{-7;5\}$ $S = \{-1-\sqrt{21}; -1+\sqrt{21}\}$
$S = \{-1\}$ $S = \emptyset$
$S = \{-5;3\}$ $S = \{-1-2\sqrt{3}; -1+2\sqrt{3}\}$

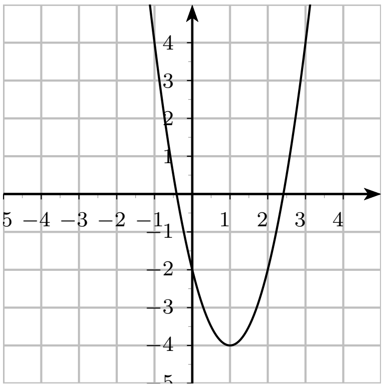
c) Non. Oui. Oui.
Oui. Oui. Non.
Non. Non. Oui.

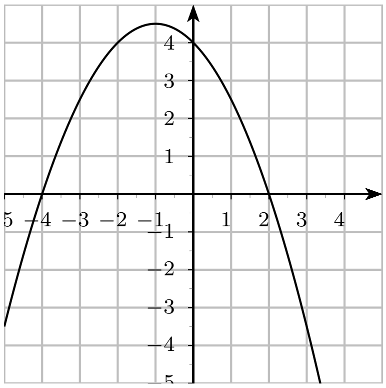
d) $(1;-12)$ $(-4;-7)$ ou $(2;-7)$
$(2;-7)$ $(-1;-16)$
$(\frac{1}{2}; -\frac{55}{4})$ $(-1-\sqrt{23};7)$ ou $(-1+\sqrt{23};7)$
$(-11;84)$ Impossible.
$(0;-15)$ $(k; k^2+2k-15)$
$(-5;0)$ ou $(3;0)$ $(-1 \pm \sqrt{16+k}, k)$ si $k \geq -16$

3.29

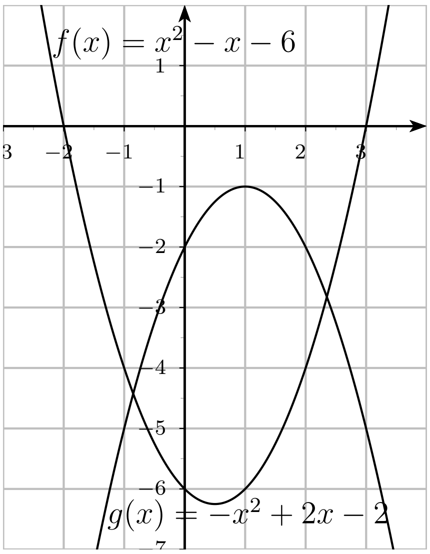
a) 

c) 

b) 

d) 

3.30



a) $S = \{-2; 3\}$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \{-0.85; 2.35\}$

d) $S = \,]-\infty \;;\; -2\,[\; \cup \;]\; 3 \;;\; +\infty\,[$

e) $S = \,]-2 \;;\; 3\,[$

f) $S = \emptyset$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \;]-0.85 \;;\; 2.35\,[$

i) $S = \,]-\infty \;;\; 0\,] \;\cup\; [\; 2 \;;\; +\infty\,[$

3.31

a) $I(-2;18)$ et $J(3;-2)$ b) $I(-2;2)$ et $J(3;12)$ c) $I(3;9)$ et $J(5;33)$

3.32

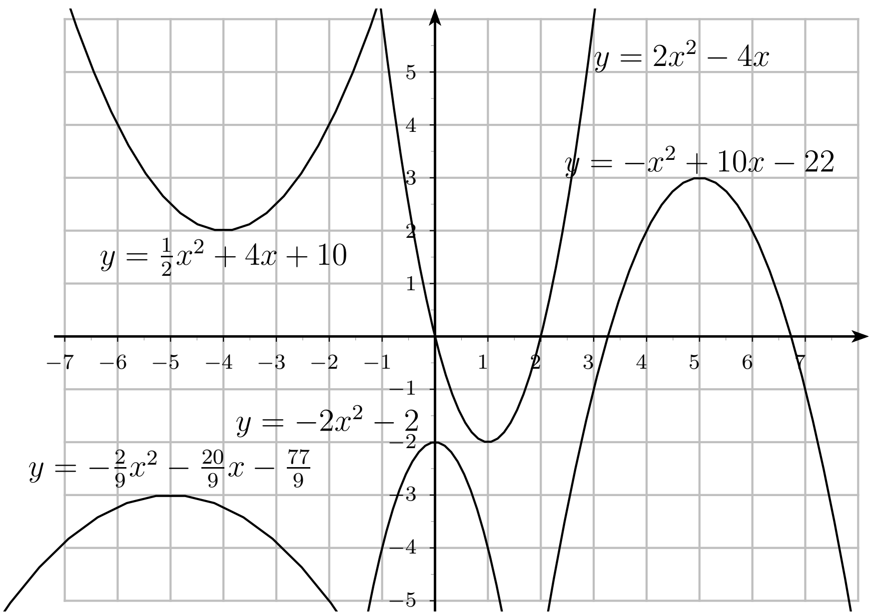
a) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$
b) $f(x) = 3x^2 - x + 5$
c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

3.33 $a_1 = 6$, point de contact $(-3;-4)$, $a_2 = -6$, point de contact $(3;-4)$

3.34

$m_1 = 1 + \sqrt{12}$, $m_2 = 1 - \sqrt{12}$

3.35



3.36

$t = \frac{15-3\sqrt{5}}{4} \cong 2.07s$ et $t = \frac{15+3\sqrt{5}}{4} \cong 5.43s$

3.37

a) Après 1 s et après 11.8 s ; b) Après 12.8 s

3.38

a) 206.25 m ; 40 km/h

3.39

a) $t = 0.51$ s
b) hauteur maximale : 734.69 m et le temps requis : 12.24 s

Chapitre 4

Fonctions ($2^{\text{ème}}$ partie)

4.1 Tableau du signe d'une fonction réelle

Soit f une fonction réelle.

Dans le **tableau du signe** d'une fonction f, on résume :

- les indéfinitions (notées $||$)
- les zéros (notés 0)
- les intervalles pour lesquels la fonction f est positive (notés $+$) et ceux pour lesquels la fonction f est négative (notés $-$)

Par exemple le tableau des signes

x		-3		2	
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

indique que la fonction f admet

- un zéro en $x = 2$
- une indéfinition en $x = -3$
- le signe $+$ si $x \in]-3; 2[$: la courbe $y = f(x)$ est donc au-dessus de l'axe Ox pour $x \in]-3; 2[$
- le signe $-$ si $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$: la courbe $y = f(x)$ est donc au-dessous de l'axe Ox pour $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$

Exemple 4.1.
Représenter un exemple de graphe d'une fonction f dont le tableau des signes est le suivant :

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$

4.2 Multiplicité d'un zéro d'un polynôme

Rappelons le théorème vu lors de la présentation de la division euclidienne de polynômes :

$x = a$ est zéro du polynôme $P(x) \iff$ il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$

Il peut arriver que $x = a$ soit encore une zéro du polynôme $Q(x)$, et dans ce cas, il existe un polynôme $R(x)$ tel que $P(x) = (x-a)^m \cdot R(x)$ avec $m \geq 2$.

Le plus grand m pour lequel c'est possible est appelé la **multiplicité** de $x = a$ comme zéro de $P(x)$.

Exemple 4.2.

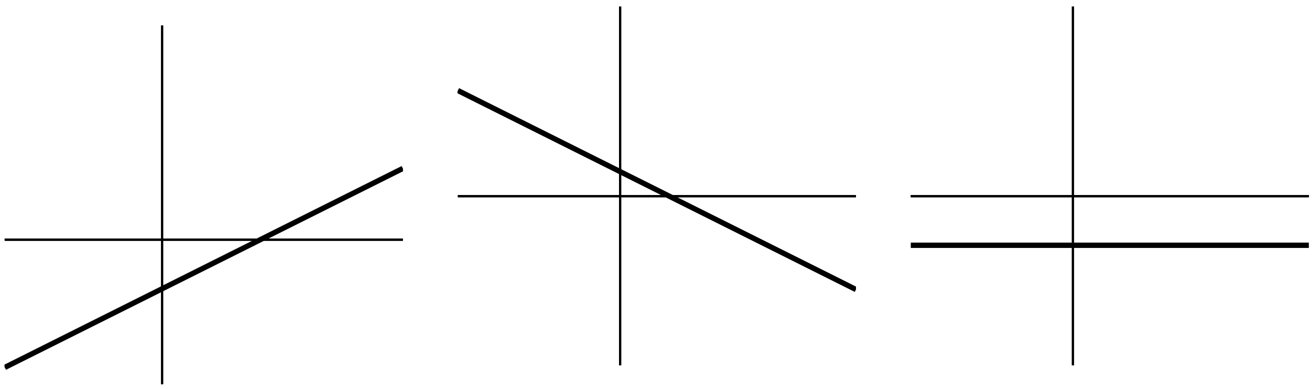
Vérifier que $x = -2$ est un zéro du polynôme $P(x) = x^5 + 4x^4 - 16x^2 - 16x$ et déterminer sa multiplicité.

Exemple 4.3.

Déterminer le polynôme $R(x)$ qui possède les trois zéros suivants : $x = -1$ qui est double, $x = 0$ qui est de multiplicité 4 et $x = 2$ qui est simple. On sait de plus que $R(1) = 8$.

4.3 Signe d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + h$ une fonction affine.



Exemple 4.4.

Etudier le signe des fonctions affines suivantes :

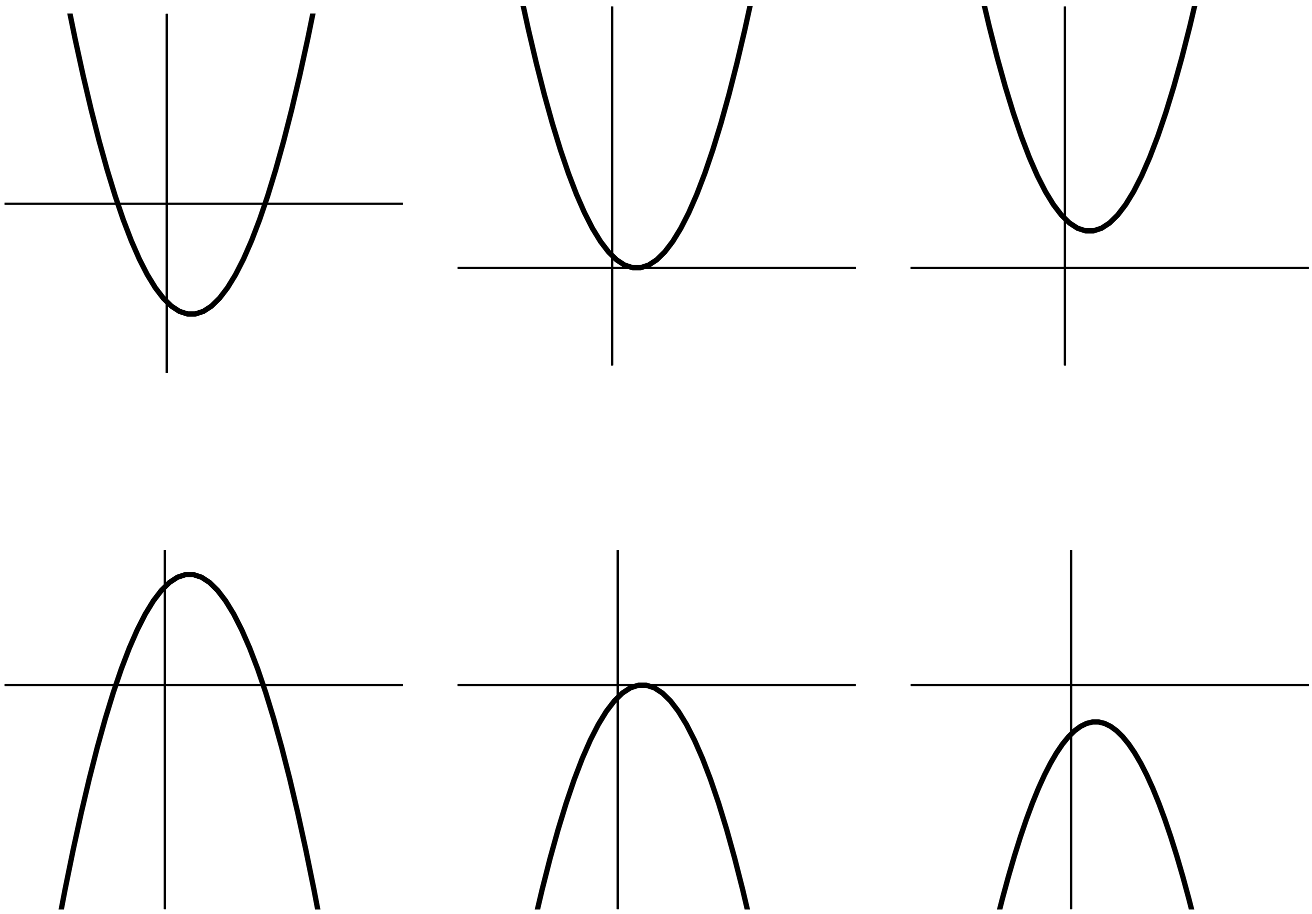
a) $f(x) = 3x + 3$

b) $g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

c) $h(x) = -3$

4.4 Signe d'une fonction quadratique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction quadratique et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.



Exemple 4.5.

Etudier le signe des fonctions quadratiques suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

b) $g(x) = 5x^2 - 5x + 7$

4.5 Signe d'une fonction polynomiale

L'étude du signe d'une fonction polynomiale peut s'effectuer de la manière suivante :

- on factorise la fonction polynomiale comme produit de facteurs du premier et du deuxième degré,
- on étudie séparément le signe de chacun des facteurs,
- on applique la règle des signes sur chaque intervalle.

Remarque 4.1.

On peut établir le tableau du signe en tenant compte des multiplicités des zéros : il n'y a pas de changement de signe si la multiplicité est paire et un changement de signe si elle est impaire.

Exemple 4.6.

a) Etablir le tableau du signe de la fonction f définie par $f(x) = (3 - x)(x^2 - 5x + 6)$.

b) Etablir le tableau du signe de la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

4.6 Signe d'une fonction rationnelle

L'étude du signe d'une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ s'obtient en étudiant le signe de la fonction polynomiale p qui est au numérateur, ainsi que le signe de la fonction polynomiale q qui est au dénominateur. La règle des signes permet ensuite d'obtenir le signe de la fonction f.

Remarque 4.2.

Pour une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, les indéfintions sont les solutions de l'équation $q(x) = 0$ et les zéros sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$ qui sont définies.

Exemple 4.7.

a) Etablir le tableau du signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-6x+9}$.

b) Etablir le tableau du signe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x^5-3x^4-5x^3}{(3x-2)^2}$.

4.7 Inéquations

4.7.1 Inéquation du premier degré

Si a et b sont des nombres réels, on note

$$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad a < b \iff b - a \in \mathbb{R}_+^*$$

Remarque 4.3.

En inversant les deux membres et l'inégalité d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (qui possède les mêmes solutions) :

$A \leq B \iff B \geq A$ et $A < B \iff B > A$.

Equivalence d'inéquations

On obtient une inéquation équivalente si :

- On ajoute ou soustrait une même expression aux deux membres de l'inéquation.
- On multiplie ou on divise les deux membres de l'inéquation par un **nombre positif non nul**.

  Si l'on multiplie ou divise les deux membres par un **nombre négatif non nul**, il faut **inverser l'inégalité**!

Exemple 4.8.

a) Résoudre l'inéquation $-4x + 3 < x - 7$

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{8 - 3x - 10x^2}{5} \leq x - 5 - 2x^2$

4.7.2 Inéquation quadratique

Après avoir isolé 0 d'un côté de l'inégalité, on étudie le signe d'une fonction quadratique.

a) Résoudre l'inéquation $x^2 - 5x < 6$

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{5x - x^2}{5} \leq x - 5$

c) Résoudre l'inéquation $-2x^2 + 6x - 5 > 0$

4.7.3 Inéquation polynomiale ou rationnelle

Le tableau du signe des fonctions polynomiales et rationnelles permet de résoudre les inéquations polynomiales et rationnelles.

Exemple 4.9.

a) Résoudre l'inéquation $x^3 + 6 \leq 7x$.

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} \geq \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$.

4.8 Exercices

4.1

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = 4 - 2x$

c) $f(x) = -5x - 10$

d) $f(x) = -(7 - 2x) - 8$

4.2

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -5x^2 + 60x - 180$

b) $f(x) = -8x^2 + 48x - 82$

c) $f(x) = -4x^2 - 80x - 391$

d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

4.3

Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (2 - x)(x + 3)(x - 4)$

b) $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)$

c) $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^2$

d) $f(x) = -(2 - x)^2(x + 3)$

e) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$

f) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

4.4

Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x - 6}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 6}{(x + 3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{(x - 1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + x - 6}$

4.5

Donner le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{2x(2x - 3)^2}{(x - 1)^3}$

c) $f(x) = 5 - \dfrac{125}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^3}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{(x - 11)^3}{-x^2 - 10x - 25}$

f) $f(x) = \dfrac{-6x^2 + 12x - 6}{(x^2 - 2x)^2}$

4.6

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x+5 \geq 1$

b) $5-2\,x \geq 1$

c) $-4\,a-5 < a+5$

d) $-(7-2\,x)-8 > 0$

e) $1-3\,x \leq \frac{1}{3}\,x+2$

f) $3\,(1-x) > \frac{2}{5}\,x$

4.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2-42x-147 \geq 0$

b) $-4x^2+24x-42 < 0$

c) $-3x^2+8x+3 < 0$

d) $x^2+10x+25 > 0$

e) $4x^2 > 0$

f) $-x^2-6x-9 \geq 0$

g) $-x^2+14x-48 > 0$

h) $-5x^2+30x-40 > 0$

i) $-5x^2-20x-20 > 0$

j) $-3x^2+42x-147 \geq 0$

4.8

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3-4\,x^2+x+6 > 0$

b) $x^5-5\,x^3+4\,x \leq 0$

c) $x^3-x^2-x+1 \leq 0$

d) $(x-2)\cdot(x^2+6\,x-1) > (x^2-4)\cdot(x^2+1)$

4.9

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7-\dfrac{4}{3\,x+1}$

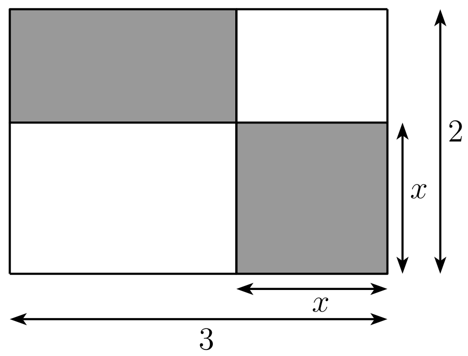
l) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

m) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

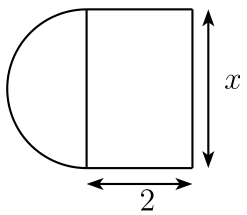
n) $\dfrac{6}{4-x}-\dfrac{1}{1-x} \leq 1$

4.10

Pour quelle valeur de x le carré grisé a-il une aire supérieure à celle du rectangle grisé ?



4.11



Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque ?

4.12

Les bergers allemands peuvent faire des sauts leur permettant de franchir des murs de plus de 3 mètres de hauteur. Supposons que la hauteur h (en m) au-dessus du sol du berger allemand t secondes après le début de son saut est donnée par

$$h(t) = -5t^2 + 8t$$

a) Calculer la hauteur maximale sautée par le berger allemand.

b) Calculer l'intervalle de temps (en s) pendant lequel le chien est à 2.75 m et plus au-dessus du sol.

4.13

Pour une petite voiture d'une marque donnée, le rayon d'action M (nombre de kilomètres parcourus) avec 4 litres d'essence est lié à sa vitesse v (en km/h) par la formule

$$M(v) = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \qquad \text{pour } 0 < v < 60$$

a) Calculer le rayon d'action maximal de la voiture.

b) Pour quel intervalle de vitesses (en km/h) le rayon d'action de la voiture est-il supérieur ou égal à 45 km ?

4.14

Pour une population particulière de saumons, la relation entre le nombre S de poissons qui fraient et le nombre R de poissons qui naissent de la fraie et qui survivent jusqu'à l'âge adulte est donnée par la formule

$$R(S) = \frac{4500S}{S + 500}$$

a) Esquisser le graphe de la fonction qui associe au nombre de poissons qui fraient S le nombre de jeunes poissons qui survivent R pour $S \leq 6'000$.

b) Pour quel intervalle de populations S a-t-on $R > S$? Faire ressortir le résultat sur le graphique du point a).

4.9 Réponses

4.1

a)

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$+$

b)

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

c)

x		-2	
$f(x)$	$+$	0	$-$

d)

x		$\frac{15}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

4.2

a)

x		6	
$f(x)$	$-$	0	$-$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

c)

x		$-\frac{23}{2}$		$-\frac{17}{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

d)

x		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4.3

a)

x		-3		2		4	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x		-3		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

c)

x		-3		2	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$

d)

x		-3		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

e)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

f)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

4.4

a)

x		-3		6	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

b)

x		-3		6	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

c)

x		-2		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

d)

x		-2		2		3	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$

e)

x		1	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$

f)

x		-3		2		5	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

4.5

a)

x		-3		0.5	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

b)

x		0		1		1.5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$

c)

x		-5		0		5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

d)

x		-1		0		6	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	0	$-$

e)

x		-5		11	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$

f)

x		0		1		2	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$

4.6

a) $S = [-2; +\infty[$
b) $S =]-\infty; 2]$
c) $S =]-2; +\infty[$
d) $S =]\frac{15}{2}; +\infty[$
e) $S = [-\frac{3}{10}; +\infty[$
f) $S =]-\infty; \frac{15}{17}[$

4.7

a) $S = \{-7\}$
b) $S = \mathbb{R}$
c) $S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]3; +\infty\right[$
d) $S =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$
e) $S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
f) $S = \{-3\}$
g) $S =]6; 8[$
h) $S =]2; 4[$
i) $S = \varnothing$
j) $S = \{7\}$

4.8

a) $S =]-1 \ ; \ 2[\cup] \ 3 \ ; \ +\infty[$
b) $S =]-\infty \ ; \ -2] \ \cup \ [-1 \ ; \ 0] \ \cup \ [1 \ ; \ 2]$
c) $S =]-\infty \ ; \ -1] \ \cup \ \{1\}$
d) $S =]-3 \ ; \ 1[\cup] \ 1 \ ; \ 2[$

4.9

a) $S =]-\infty; -2[\ \cup \ ]0; 1[\ \cup \ ]2; +\infty[$
b) $S =]-\infty; -2[\ \cup \ ]0; \frac{3}{2}[\ \cup \ ]\frac{3}{2}; 2[$
c) $S =]-\infty; -2[\ \cup \ ]-2; -1[\ \cup \ ]1; +\infty[$
d) $S = [-1; 0[\ \cup \ ]0; +\infty[$
e) $S =]1; 2[\ \cup \ ]3; +\infty[$
f) $S =]-6; -\frac{5}{3}] \ \cup \ ]2; 4]$
g) $S =]-\infty; -1[\ \cup \ [0; 1[$
h) $S =]-\frac{1}{2}; 4[$
i) $S =]-\infty; 3[$
j) $S =]-\infty; -1] \ \cup \ ]0; 1]$
k) $S =]-\infty; -\frac{1}{3}[\ \cup \ ]2; +\infty[$
l) $S =]-\infty; -4] \ \cup \ ]\frac{4}{3}; +\infty[$
m) $S =]-3; -1[\ \cup \ ]2; +\infty[$
n) $S =]-\infty; 1[\ \cup \ ]4; +\infty[$

4.10

$\frac{6}{5} < x \leq 2$

4.11

$0 < x < \frac{16}{\pi}$

4.12

a) 3.2 m ; 2) $[0.5; 1.1]$

4.13

a) 46.875 km ; b) $[30; 45]$

4.14

b) $]0; 4'000[$

Bibliographie

[1] E. W. Swokowski et J. A. Cole *: Algèbre*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1998.

[2] Monographie de la commission romande de mathématique 27 *: Fundamentum de mathématique : Notions élémentaires,* Editions du Tricorne, 2007.

[3] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 1,* Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[4] Louis Gred, *: Notions fondamentales de la mathématique élémentaire, tome 2*, Editions L.E.P Loisirs et Pédagogie, 1980.

[5] Deborah Hughes-Hallet et Andrew M Gleason, Traduction française de Michel Beaudin *: Fonctions d'une variable*,

[6] Hubert Bovet, *: Algèbre, cours et exercices*, Editions Polymath, 1998

[7] Gymnase d'Yverdon : *Polycopié d'exercices sur les fonctions affines*