Logique formelle

Algèbre de Boole

et

Applications en Informatique

Introduction

Genèse de la logique

Discerner le vrai du faux est un questionnement philosophique dont les origines connues se situent en Grèce antique. C'est ainsi que le philosophe Aristote est souvent reconnu comme étant le père de la logique. L'objectif initial est de discerner dans le langage argumentatif les raisonnements valides ou fallacieux.

Dans la même période naissent les premiers traités mathématiques dont le but est également de distinguer le vrai du faux, le plus connu étant Les éléments d'Euclide. Cet ouvrage pose notamment les bases de la géométrie plane telle que nous la connaissons encore aujourd'hui. Dès cette époque, une théorie mathématique est basée sur des axiomes – principes que l'on ne peut démontrer et que l'on admet sans justification car ils paraissent suffisamment évidents – à partir desquels on démontre par des suites de déductions logiques des théorèmes.

Au XVII^e siècle, Descartes achève la révolution du calcul symbolique : un langage simplifié et symbolique pour écrire les calculs et les mathématiques. Dans le même temps, Leibniz initie la logique formelle et son traitement par du calcul algorithmique. La transformation de la logique en langage symbolique sera poursuivie par de Morgan et Boole au milieu du XIX^e puis achevée par Hilbert, Russel et finalement Whitehead au début du XX^e.

La langue usuelle et ses imprécisions est peu à peu abandonnée en logique formelle au profit d'un langage abstrait construit avec une dizaine de symboles et des règles. Le programme de Hilbert ambitionne de décider de toute vérité à l'aide de ces quelques symboles et d'un nombre fini d'opérations. Mais Gödel mettra un terme au rêve de pouvoir trancher assurément le vrai du faux grâce au calcul algorithmique. Il montre notamment que, dans tout système d'axiomes, il existe des propositions indécidables – propositions dont on ne peut dire si elles sont vraies ou fausses. Les mystères de la pensée humaine sont saufs !

L'entrée en scène des machines

Claude Shannon (1916 - 2001), ingénieur en génie électrique et mathématicien américain, utilise la logique pour les premières applications dans les circuits électriques. Il est l'un des pères fondateurs de la théorie de l'information. « Shannon entreprend de mettre en équation les circuits électriques où des relais électriques sont considérés comme des variables logiques en agissant sur des contacts ouverts (0) ou fermés (1). » selon *courstechinfo.be*.

L'information est donc codée dans une machine par une suite de circuits qui peuvent être ouverts (le courant ne passe pas) ou fermés (le courant passe). Cette information codée est modélisée par un code binaire formé de 1 (vrai, le courant passe) et de 0 (faux, le courant ne passe pas).

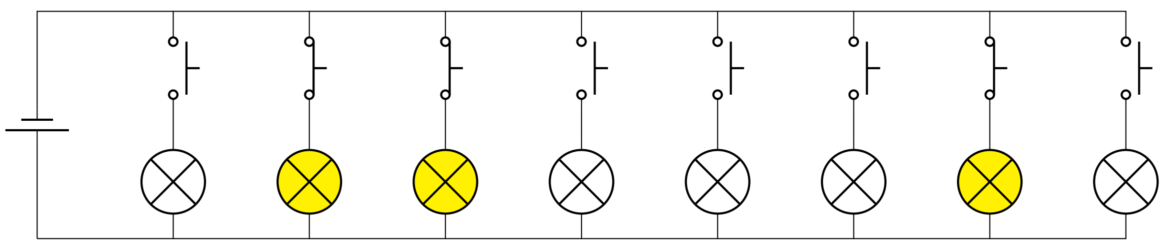


FIGURE 1 – L'information 01100010. Le regroupement de 8 bit est un standard de la mémoire des ordinateurs et s'appelle un octet (byte en anglais).

L'information est traitée en combinant des circuits pour en créer de nouveaux dont le statut (ouvert ou fermé) dépend des premiers.

Organisation du cours

Ce cours sera divisé en trois parties.

Dans la première, nous allons introduire les bases d'un langage propre à la logique inventé pour analyser des propositions pouvant être *vraies* ou *fausses*.

Dans la deuxième, nous allons étudier l'algèbre de Boole : un modèle algébrique permettant de manipuler des variables pouvant prendre 0 et 1 comme valeurs et représentant des propositions *fausses* (0) ou *vraies* (1).

Dans la troisième, nous allons finalement appliquer l'algèbre de Boole afin de conceptualiser des circuits électroniques permettant de combiner des statuts *ouvert* ou *fermé* et représentant les valeurs 0 et 1.

Les exercices d'application sont inspirés de *Mathématiques appliquées à l'informatique*, André Ross, 2001, Éditions Le Griffon d'argile.

Pour en savoir plus : https ://www.electronique-et-informatique.fr/

Première partie

Logique formelle

1 Sur le sens des mots « non », « ou », « et »

La logique traditionnelle a été développée dans le but de pouvoir attribuer aux énoncés déclaratifs affirmatifs produits par les phrases du langage ordinaire de la vie courante une valeur de vérité « vrai » ou « faux » tout en respectant deux principes de base :

Le principe de non contradiction
— Un énoncé ne peut être à la fois « vrai » et « faux ».

Le principe du tiers exclu
— Un énoncé ne peut prendre d'autre valeur que « vrai » ou « faux ».

Exercice corrigé

Les phrases suivantes admettent-elles une unique valeur de vérité ? Si oui, laquelle ?

a) La Fête des Vignerons a lieu à Vevey. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

b) Il y a un carnaval à Aigle. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

c) Quelle belle fête ! ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

d) Cette phrase est fausse. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

Définition

On appelle donc **proposition** une phrase déclarative dont on peut décider si elle est vraie ou fausse, mais jamais les deux (qui respecte donc les deux principes énoncés précédemment). Toute proposition P admet donc une unique valeur de vérité, notée $\nu(P)$, dont les valeurs possibles sont « vrai » ou « faux ».

Exercice corrigé

Nom : . . Dom . . . .
Langues parlées :
☒ français ☐ anglais ☐ italien

Selon les résultats de l'enquête ci-dessus, donner les valeurs de vérité des énoncés ci-dessous.

a) Dom parle français. ☐ vrai ☐ faux

b) Dom ne parle pas français. ☐ vrai ☐ faux

c) Dom parle italien. ☐ vrai ☐ faux

d) Dom ne parle pas italien. ☐ vrai ☐ faux

La négation $\boxed{\text{non } P \text{ notée } \neg P}$

Examinons le lien entre une proposition P et sa négation non P, notée $\neg P$.

— « Dom ne parle pas français » est une proposition fausse. C'est la négation d'une proposition vraie « Dom parle français ».

— « Dom ne parle pas italien » est une proposition vraie. C'est la négation d'une proposition fausse « Dom parle italien ».

La valeur de vérité de la négation d'une proposition $\nu(\neg P)$ ne dépend que de la valeur de vérité de la proposition $\nu(P)$ et pas du sens de l'énoncé, qui lui, dépend de la situation d'énonciation. Elle est donnée par la table de vérité :

NÉGATION

P	$\neg P$
faux	
vrai	

Exercice corrigé

Nom : ..Dom...............	Nom : ..Jo.................	Nom : ..Cary..............
Langues parlées :	Langues parlées :	Langues parlées :
☒ français ☐ anglais ☐ italien	☒ français ☒ anglais ☐ italien	☐ français ☒ anglais ☒ italien

Selon les résultats de l'enquête ci-dessus, donner les valeurs de vérité des énoncés ci-dessous.

a) Dom parle français ou anglais. ☐ vrai ☐ faux

b) Jo parle français ou anglais. ☐ vrai ☐ faux

c) Cary parle français ou anglais. ☐ vrai ☐ faux

d) Dom parle italien ou anglais. ☐ vrai ☐ faux

La disjonction $\boxed{P \text{ ou } R \text{ notée } P \vee R}$

Examinons le lien entre deux propositions P, R et leur disjonction : P ou R, notée $P \vee R$.

— « Dom parle français ou anglais » est une proposition vraie. C'est la disjonction d'une proposition vraie « Dom parle français » avec une proposition fausse « Dom parle anglais ».

— « Jo parle français ou anglais » est une proposition vraie. C'est la disjonction de deux propositions vraies « Jo parle français » avec « Jo parle anglais ».

— « Cary parle français ou anglais » est une proposition vraie. C'est la disjonction d'une proposition fausse « Cary parle français » avec une proposition vraie « Cary parle anglais ».

— « Dom parle italien ou anglais » est une proposition fausse. C'est la disjonction de deux propositions fausses « Jo parle français » avec « Jo parle anglais ».

La valeur de vérité de la disjonction de deux propositions $\nu(P \vee R)$ ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui la composent $\nu(P)$ et $\nu(R)$ et pas du sens des énoncés. Elle est donnée par la table de vérité :

DISJONCTION

P	R	$P \vee R$
faux	faux	
faux	vrai	
vrai	vrai	
vrai	faux	

Avertissement

Dans le langage courant, il arrive que le connecteur logique « ou » soit utilisé dans le sens d'une disjonction exclusive : soit l'un, soit l'autre mais pas les deux. Parfois, les deux ne sont pas une alternative comme dans « répondre par oui ou par non ». Dans le langage logique ou mathématique « ou » est toujours utilisé dans le sens d'une disjonction inclusive : l'un, l'autre ou les deux.

Exercice corrigé

Nom : ..Dom..............	Nom : ..Jo................	Nom : ..Cary..............
Langues parlées :	Langues parlées :	Langues parlées :
☒ français ☐ anglais ☐ italien	☒ français ☒ anglais ☐ italien	☐ français ☒ anglais ☒ italien

Selon les résultats de l'enquête ci-dessus, donner les valeurs de vérité des énoncés ci-dessous.

a) Jo parle français et anglais. ☐ vrai ☐ faux

b) Cary parle français et italien. ☐ vrai ☐ faux

c) Dom parle français et anglais. ☐ vrai ☐ faux

d) Dom parle italien et anglais. ☐ vrai ☐ faux

La conjonction $\boxed{P \text{ et } R \text{ notée } P \wedge R}$

Examinons le lien entre deux propositions P, R et leur conjonction : P et R notée $P \wedge R$.

— « Jo parle français et anglais » est une proposition vraie. C'est la conjonction de deux propositions vraies « Jo parle français » avec « Jo parle anglais ».
— « Cary parle français et italien » est une proposition fausse. C'est la conjonction d'une proposition fausse « Cary parle français » avec une proposition vraie « Cary parle italien ».
— « Dom parle français et angalais » est une proposition fausse. C'est la conjonction d'une proposition vraie « Dom parle français » avec une proposition fausse « Dom parle anglais ».
— « Dom parle italien et anglais » est une proposition fausse. C'est la conjonction de deux propositions fausses « Dom parle italien » avec « Dom parle anglais ».

La valeur de vérité de la conjonction de deux proposition $\nu(P \wedge R)$ ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui la composent $\nu(P)$ et $\nu(R)$ et pas du sens des énoncés. Elle est donnée par la table de vérité :

CONJONCTION

P	R	$P \wedge R$
faux	faux	
faux	vrai	
vrai	vrai	
vrai	faux	

En résumé, ces premiers exemples nous permettent de comprendre comment l'on peut composer des propositions élémentaires dites « atomiques » à l'aide de connecteurs comme « non », « ou », « et », pour en construire des nouvelles, plus complexes, dont la valeur de vérité ne dépend que des valeurs de vérité des composants et des connecteurs utilisés.

Définition

Si p, q, r, ...désignent des variables propositionnelles qui peuvent prendre pour valeur des propositions, une expression contenant les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et les lettres p, q, r, ...est une **formule logique** ou **proposition formelle**.

Une proposition formelle est aux propositions ce qu'un polynôme est aux nombres. Cependant, dans la littérature, il est courant de ne pas distinguer les propositions formelles des propositions.

La valeur de vérité d'une proposition formelle ne dépend que des valeurs de vérité des n variables qui la composent et elle est donnée par une table de vérité.

Deux propositions formelles sont **équivalentes** ($\equiv$) si elles ont la même table de vérité.

Exercice corrigé

Montrer les lois de de Morgan $\neg(p \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg r$ et $\neg(p \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg r$.

p	r	$p \vee r$	$\neg(p \vee r)$	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge \neg r$
faux	faux					
faux	vrai					
vrai	vrai					
vrai	faux					

p	r	$p \wedge r$	$\neg(p \wedge r)$	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg r$
faux	faux					
faux	vrai					
vrai	vrai					
vrai	faux					

2 Notion de prédicat et lien avec les ensembles

Une proposition élémentaire typique est constituée, au sens syntaxique ou grammatical, d'un « sujet » et d'un « prédicat ». Dans l'exemple « Jo parle français », « Jo » est le sujet tandis que « parle français » est le prédicat.

Il est intéressant de rendre le sujet d'une proposition variable. On l'indique alors en le remplaçant par un nom de variable comme dans « x parle français ».

Définition

On appelle **prédicat à une variable** un énoncé du type « x possède la propriété P » ou « x satisfait la condition P » tel que, lorsqu'on substitue à x un terme convenablement choisi, on obtienne une proposition.

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le prédicat $P(x)$ est une proposition est appelé l'**univers** ou domaine de définition de $P(x)$.

Le prédicat $P(x)$ peut être vu comme une fonction $U \to \{\text{faux}; \text{vrai}\}$ qui associe à toute valeur de la variable x prise dans l'univers U la valeur de vérité de la proposition correspondante $x \mapsto \nu(P(x))$:

Le prédicat à une variable « x parle français »

U	$\to$	$\{\text{faux}; \text{vrai}\}$		
Dom	$\mapsto$	ν(« Dom parle français »)	$=$	vrai
Jo	$\mapsto$	ν(« Jo parle français »)	$=$	vrai
Cary	$\mapsto$	ν(« Cary parle français »)	$=$	faux

Les prédicats à une variable servent communément à définir des parties d'un ensemble référent U. Par exemple la partie $A \subset U$ (A incluse dans U) définie par l'ensemble des x qui appartiennent à U tels que $P(x)$ soit vrai, ce qui se note

$$A = \{x \in U | P(x)\}$$

Pour $A = \{x \in U |$ « x parle français » $\}$ on aurait alors

- Dom $\in A$
- Jo $\in A$
- Cary $\notin A$

Remarquons qu'avec ces notations $x \in A$ est une nouvelle écriture pour le prédicat « x parle français ».

Exercice corrigé

On pose $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Donner sous forme énumérative les parties suivantes de l'ensemble U.

a) $A = \{x \in U | x \text{ est pair}\}$ ....

b) $B = \{x \in U | x \text{ est diviseur de } 12\}$ ....

c) $C = \{x \in U | x \leqslant 4\}$ ....

d) $D = \{x \in U | x > 8\}$ ....

Exercice corrigé

On pose $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Trouver un prédicat pour décrire les parties suivantes de l'ensemble U.

a) $E = \{1; 2; 3; 5; 6; 10\}$ ....

b) $F = \{0; 3; 6; 9; 12\}$ ....

c) $G = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ....

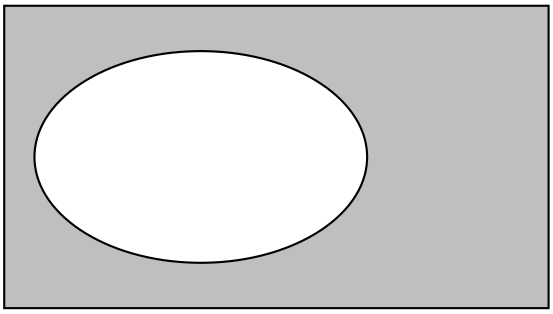
d) $H = \{11; 12\}$ ....

Les connecteurs logiques « non », « ou », « et » permettent de composer des prédicats comme nous l'avons vu pour des propositions. Dans le langage des ensembles, ils définissent le complémentaire, la réunion, l'intersection et la différence de parties de U.

Définition

On appelle **complémentaire** d'une partie $A \subset U$ dans U l'ensemble dont les éléments appartiennent à l'ensemble U mais pas à l'ensemble A. On le note $\bar{A}$. Cet ensemble est défini à l'aide de la négation d'un prédicat.

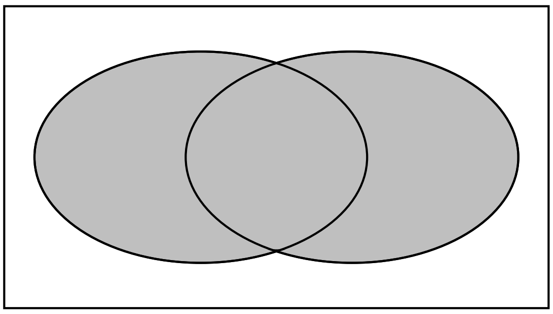
$$\text{Si } A = \{x \in U | P(x)\} \text{ alors } \bar{A} = \{x \in U | \neg P(x)\} = \{x \in U | x \notin A\}$$



On appelle **réunion** des ensembles A et B l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B (ou aux deux). On note $A \cup B$. Cet ensemble est défini à l'aide de la disjonction de deux prédicats.

$$\text{Si } A = \{x \in U | P(x)\} \text{ et } B = \{x \in U | R(x)\} \text{ alors}$$

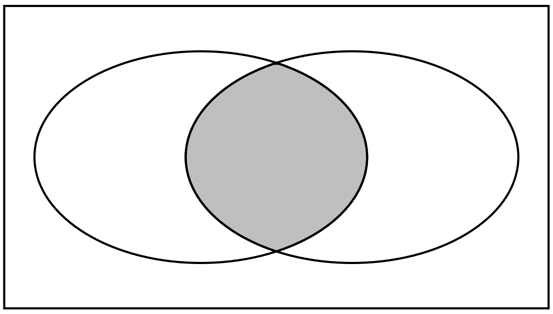
$$A \cup B = \{x \in U | P(x) \vee R(x)\} = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$$



On appelle **intersection** des ensembles A et B l'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à A et à B. On note $A \cap B$. Cet ensemble est défini à l'aide de la conjonction de deux prédicats.

Si $A = \{x \in U | P(x)\}$ et $B = \{x \in U | R(x)\}$ alors

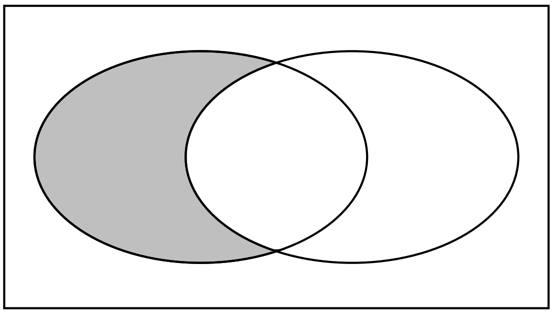
$$A \cap B = \{x \in U | P(x) \wedge R(x)\} = \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$$



On appelle **différence** de deux ensembles A et B l'ensemble dont les éléments appartiennent à l'ensemble A mais pas à l'ensemble B. On le note $A \setminus B$. Cet ensemble est défini à l'aide de la conjonction et de la négation de prédicats.

Si $A = \{x \in U | P(x)\}$ et $B = \{x \in U | R(x)\}$ alors

$$A \setminus B = \{x \in U | P(x) \wedge \neg R(x)\} = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$$



Exercice corrigé

On considère $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ et ses parties décrites dans les exercices précédents :

$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\} = \{x \in U | x$ est pair$\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} = \{x \in U | x$ est diviseur de $12\}$

$C = \{0; 1; 2; 3; 4\} = \{x \in U | x \leqslant 4\}$

$D = \{9; 10; 11; 12\} = \{x \in U | x > 8\}$

$E = \{1; 2; 3; 5; 6; 10\} = \{x \in U | x$ divise $30\}$

$F = \{0; 3; 6; 9; 12\} = \{x \in U | x$ multiple de $3\}$

$G = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} = \{x \in U | x \leqslant 5\}$

$H = \{11; 12\} = \{x \in U | x > 10\}$

Énumérer et décrire par une composition de prédicats les parties suivantes de U.

a) $\bar{A}$ ....

....

b) $\bar{G}$ ....

....

c) $A \cup B$ ....

....

d) $\bar{C} \cup E$ ....

....

e) $B \cap F$ ....

....

f) $C \cap \bar{D}$ ....

....

g) $D \setminus H$ ....

....

h) $\bar{G} \setminus F$ ....

....

Mais il n'y a pas que le sujet qui peut être variable dans une proposition et plusieurs noms de variables peuvent apparaître dans un prédicat comme dans « x parle y ».

Définition

On appelle **prédicat à plusieurs variables** un énoncé du type « x, y, z, ... sont en relation selon $R(x;y;z;\dots)$ » ou « x, y, z, ... satisfont la condition $R(x;y;z;\dots)$ » tel que, lorsqu'on substitue à x, y, z, ... des termes convenablement choisis, on obtienne une proposition.

L'ensemble des valeurs de x, y, z, ... pour lesquelles le prédicat $R(x;y;z;\dots)$ est une proposition est appelé l'**univers** ou domaine de définition de $R(x;y;z;\dots)$.

Prenons par exemple la proposition « 6 est divisible par 2 ». Cette proposition admet le nombre 6 comme sujet et la propriété « est divisible par 2 » comme prédicat. En rendant le sujet x variable dans la collection de valeurs $\{3;4;6\}$ le prédicat « x est divisible par 2 » définit la fonction

$$\begin{array}{ccccc} \{3;4;6\} & \to & \{\text{faux};\text{vrai}\} & & \\ 3 & \mapsto & \nu(\text{« } 3 \text{ est divisible par } 2 \text{ »}) & = & \text{faux} \\ 4 & \mapsto & \nu(\text{« } 4 \text{ est divisible par } 2 \text{ »}) & = & \text{vrai} \\ 6 & \mapsto & \nu(\text{« } 6 \text{ est divisible par } 2 \text{ »}) & = & \text{vrai} \end{array}$$

Mais on peut également considérer que 6 et 2 constituent deux sujets de cette proposition et la relation « est divisible par » le prédicat au sens linguistique. Le prédicat « x est divisible par y », si y est variable dans la collection de valeurs $\{2;3\}$, définit la fonction de deux variables

$$\begin{array}{ccccccc}
\{3;4;6\} & \times & \{2;3\} & \to & \{\textsf{faux};\textsf{vrai}\} & & \\
(\ 3 & ; & 2\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 3 est divisible par 2 »}) & = & \textsf{faux} \\
(\ 3 & ; & 3\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 3 est divisible par 3 »}) & = & \textsf{vrai} \\
(\ 4 & ; & 2\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 4 est divisible par 2 »}) & = & \textsf{vrai} \\
(\ 4 & ; & 3\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 4 est divisible par 3 »}) & = & \textsf{faux} \\
(\ 6 & ; & 2\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 6 est divisible par 2 »}) & = & \textsf{vrai} \\
(\ 6 & ; & 3\ ) & \mapsto & \nu(\text{« 6 est divisible par 3 »}) & = & \textsf{vrai}
\end{array}$$

On peut également utiliser les prédicats à plusieurs variables pour définir des ensembles, comme par exemple :

$$\Big\{(x;y) \in \{3;4;6\} \times \{2;3\} \,\Big|\, \text{« } x \text{ est divisible par } y \text{ »}\Big\} = \Big\{(3;3);(4;2);(6;2);(6;3)\Big\}$$

3 Exercices

Exercice 1.

Les phrases suivantes sont-elles des propositions et si oui, quelle est leur valeur de vérité ?

a) Huit est un nombre pair. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

b) Deux fois cinq égale onze. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

c) x est plus petit ou égal à trois. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

d) x est strictement plus grand que x. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

e) x est strictement plus grand que y. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

f) Zurich est la capitale de la Suisse. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

g) Quel temps fait-il ? ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

h) Un quadrilatère a quatre côtés. ☐ oui, vrai ☐ oui, faux ☐ non

Exercice 2.

On donne les propositions P « Il y a du vent. » et R « Il neige. ». Exprimer les propositions suivantes par des phrases du langage ordinaire.

a) $\neg P$ ....

b) $P \vee R$ ....

c) $\neg P \vee R$ ....

d) $P \wedge R$ ....

e) $R \wedge \neg P$ ....

f) $\neg\neg R$ ....

Exercice 3.

On donne les propositions P « Je fais mes exercices. » et R « Je relis mes notes de cours. ». Écrire sous forme symbolique les phrases suivantes.

a) Je ne fais pas mes exercices. ....

b) Je ne fais pas mes exercices et ne relis pas mes notes de cours. ....

c) Je fais mes exercices ou je relis mes notes de cours. ....

d) Il est faux que je ne fais pas mes exercices et relis uniquement mon cours. ....

Exercice 4.

Construire les tables de vérités des propositions formelles suivantes et identifier lesquelles sont équivalentes.

a) $\neg p \wedge r$

p	r		
faux	faux		
faux	vrai		
vrai	vrai		
vrai	faux		

b) $\neg p \vee r$

p	r		
faux	faux		
faux	vrai		
vrai	vrai		
vrai	faux		

c) $\neg(p \wedge \neg r)$

p	r			
faux	faux			
faux	vrai			
vrai	vrai			
vrai	faux			

d) $\neg(p \vee \neg r)$

p	r			
faux	faux			
faux	vrai			
vrai	vrai			
vrai	faux			

Exercice 5.

On considère les prédicats

$P(x)$ **:** le fleuve x prend sa source dans les Alpes

$Q(x)$ **:** le fleuve x se jette dans la Méditerranée

$R(x;y)$ **:** le nombre x est un multiple du nombre y

$S(x;y)$ **:** le nombre y est un multiple du nombre x.

Traduire les prédicats suivants et attribuer aux variables des valeurs faisant de ces prédicats des assertions vraies ou fausses (si c'est possible).

a) $P(x) \wedge Q(x)$ ....

....

....

b) $P(x) \vee Q(x)$ ....

....

....

c) $R(x;y) \wedge S(x;y)$ ....

....

....

d) $R(x;y) \vee S(x;y)$ ....

....

....

Exercice 6.

On donne un ensemble $U = \{1;2;3;4{,}5;6{,}7{,}8;9;10;11;12\}$, deux prédicats et les parties de U leur correspondant :

$P(x)$ **:** « x est divisible par 3 » et $P = \{x \in U | P(x)\}$;

$R(x)$ **:** « x est diviseur de 12 » et $R = \{x \in U | R(x)\}$.

Pour chacune des descriptions suivantes :

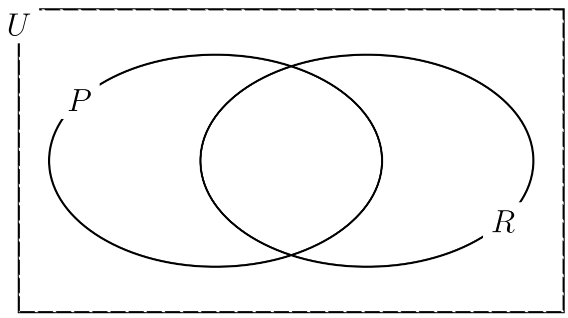
1. la réécrire sous forme d'un prédicat à l'aide de $P(x)$, $R(x)$ et des connecteurs logiques ;
2. remplir un diagramme en représentant U, P, R et mettre en évidence la partie de U correspondant au prédicat ;
3. décrire cette partie à l'aide de l'écriture ensembliste.

a) les x qui ne sont ni divisibles par 3 ni diviseurs de 12 ; . . . .

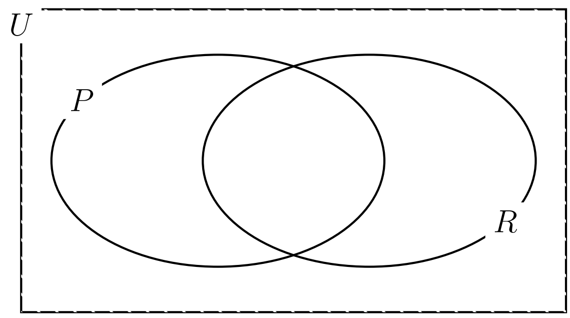
b) les x qui ne sont pas divisibles par 3 ou qui ne sont pas des diviseurs de 12 ; . . . .
. . . .

c) les x qui ne sont pas des diviseurs de 12 divisibles par 3 ; . . . .

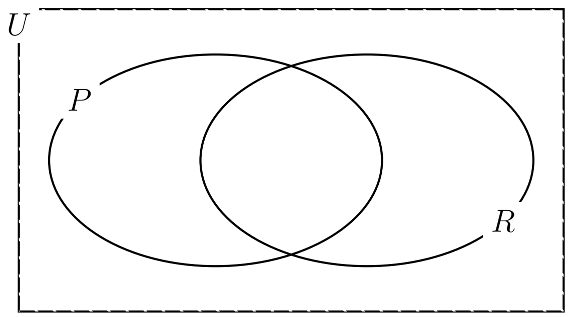
d) les x qui ne sont pas des diviseurs de 12 ou divisibles par 3. . . . .



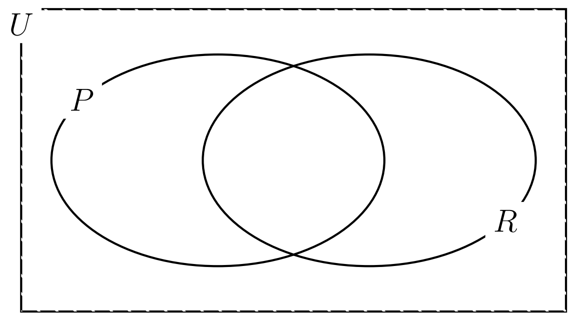
a) . . . .



b) . . . .



c) . . . .



d) . . . .

Exercice 7.

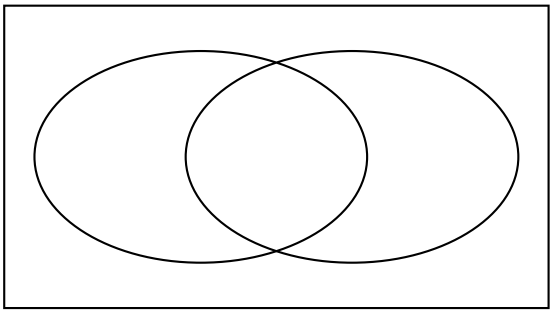
Compléter la table de vérité de la disjonction exclusive notée $p \oplus q$ et définie par $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \oplus q$
faux	faux					
faux	vrai					
vrai	vrai					
vrai	faux					

Puis montrer que $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \oplus q$
faux	faux				
faux	vrai				
vrai	vrai				
vrai	faux				

Finalement, si $A = \{x \in U | P(x)\}$ et $B = \{x \in U | R(x)\}$ indiquer sur ce diagramme de Venn l'ensemble $A \oplus B = \{x \in U | P(x) \oplus R(x)\}$ et l'écrire à l'aide des opérations sur les ensembles.



disjonction exclusive $A \oplus B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4 Solutions des exercices

Solution 1.

a) oui, vrai

b) oui, faux

c) non

d) oui, faux

e) non

f) oui, faux

g) non

h) oui, vrai

Solution 2.

a) Il n'y a pas de vent

b) Il y a du vent ou il neige.

c) Il n'y a pas de vent ou il neige.

d) Il y a du vent et il neige.

e) Il neige et il n'y a pas de vent.

f) Il est faux qu'il ne neige pas (il neige).

Solution 3.

a) $\neg P$

b) $\neg P \wedge \neg R$

c) $P \vee R$

d) $\neg(\neg P \wedge R)$.

Solution 4.

a) $\neg p \wedge r$

p	r	$\neg p$	$\neg p \wedge r$
faux	faux	vrai	faux
faux	vrai	vrai	vrai
vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	faux	faux

b) $\neg p \vee r$

p	r	$\neg p$	$\neg p \vee r$
faux	faux	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	vrai
vrai	vrai	faux	vrai
vrai	faux	faux	faux

c) $\neg(p \wedge \neg r)$

p	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg(p \wedge \neg r)$
faux	faux	vrai	faux	vrai
faux	vrai	faux	faux	vrai
vrai	vrai	faux	faux	vrai
vrai	faux	vrai	vrai	faux

d) $\neg(p \vee \neg r)$

p	r	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$\neg(p \vee \neg r)$
faux	faux	vrai	vrai	faux
faux	vrai	faux	faux	vrai
vrai	vrai	faux	vrai	faux
vrai	faux	vrai	vrai	faux

Les propositions formelles $\neg p \wedge r$ et $\neg(p \vee \neg r)$ sont équivalentes.
Les propositions formelles $\neg p \vee r$ et $\neg(p \wedge \neg r)$ sont équivalentes.

Solution 5.

a) x prend sa source dans les Alpes et se jette dans la Méditerranée ; vrai pour le Rhône.

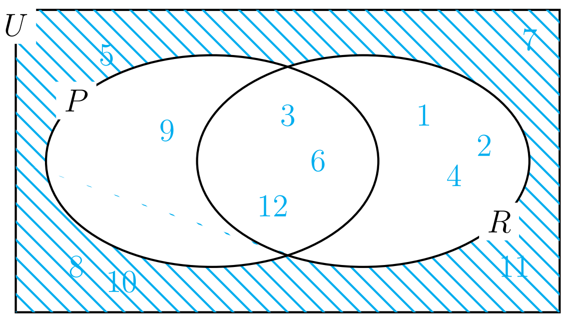
b) x prend sa source dans les Alpes ou se jette dans la Méditerranée ; vrai pour le Rhône, le Rhin, le Pô, l'Ebre, le Tibre, mais pas pour le Danube.

c) x prend sa source dans les Alpes ou se jette dans la Méditerranée ; vrai si et seulement si $x = y$.

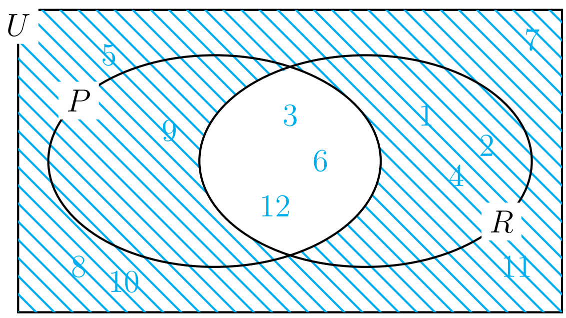
d) x est multiple de y ou y est multiple de x ; vrai pour $(2;6)$ ou $(6;3)$ faux pour $(4;6)$.

Solution 6.

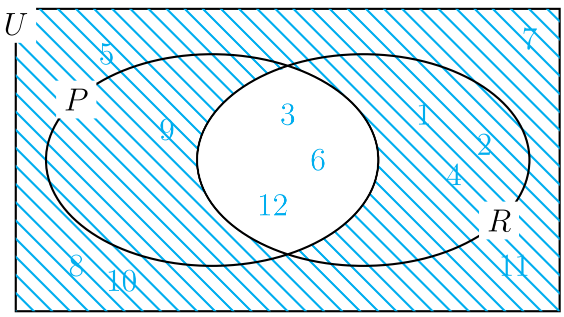
a) $\neg P(x) \wedge \neg R(x)$ b) $\neg P(x) \vee \neg R(x)$ c) $\neg(P(x) \wedge R(x))$ d) $\neg(P(x) \vee R(x))$



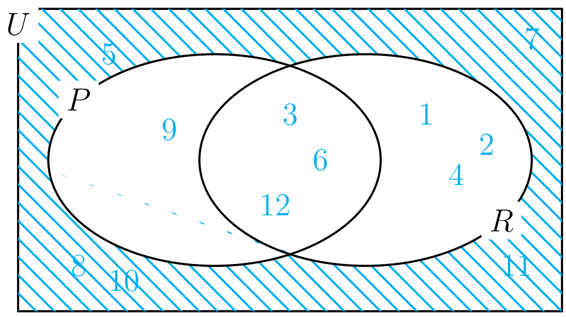
a) .... $\overline{P} \cap \overline{R}$ ....



b) .... $\overline{P} \cup \overline{R}$ ....



c) .... $\overline{P \cap R}$ ....



d) .... $\overline{P \cup R}$ ....

Solution 7.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \oplus q$
faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai
vrai	vrai	faux	faux	faux	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai

$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \oplus q$
faux	faux	faux	faux	vrai	faux
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai
vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai

$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ou $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Deuxième partie

L'algèbre de Boole

> **Le saviez-vous?**
> GEORGE BOOLE *était un mathématicien anglais qui a vécu entre 1815 et 1864. Il publia en 1854 l'ouvrage dans lequel il expose les fondements de la logique algébrique et symbolique moderne. Il développa notamment l'aspect algébrique que nous présentons ci-après.*

5 Opérations booléennes

En logique, les propositions formelles mettent directement en relation les valeurs de vérité de leurs variables propositionnelles avec leur propre valeur de vérité sans tenir compte du sens des énoncés et sont entièrement décrites par leur table de vérité. Nous allons maintenant nous détacher de la notion d'énoncé et travailler uniquement avec un modèle algébrique basé sur deux opérations notées comme une addition $+$ et une multiplication $\cdot$ et obéissant à des règles de calcul qui seront détaillées page 24. Pour ce faire, remplaçons les valeurs de vérité par les nombres 1 pour vrai et 0 pour faux.

Nous travaillons donc avec l'ensemble des valeurs de vérité modélisé par l'ensemble

$$\mathbb{B} = \{0; 1\} .$$

Et nous voulons étudier toutes les fonctions booléennes de n variables

$$\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B} .$$

En effet, toute fonction booléenne est donnée par une table de vérité à $n+1$ colonnes : une par variable et une pour les valeurs de la fonction, et 2^n lignes pour lister toutes les combinaisons de valeurs des variables.

Voici, par exemple une fonction $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ définie par sa table de vérité :

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
1	0	0	0

TABLE 1 – Table de vérité d'une fonction à 3 variables x, y, et z. Les 3 premières colonnes contiennent toutes les valeurs possibles des 3 variables – il y en a 2^3. La dernière colonne définit la fonction, c'est un exemple.

Trois fonctions booléennes jouent un rôle particulier et permettent d'écrire toutes les autres à la manière des constructions de propositions formelles du chapitre précédent. Elles correspondent aux trois connecteurs logiques et les voici définies par leur table de vérité :

Définition

La négation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

la conjonction, notée comme un produit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \to & \mathbb{B} \\ (x;y) & \mapsto & x \cdot y = x\,y \end{array}$$

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

la disjonction, notée comme une somme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \to & \mathbb{B} \\ (x;y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	1	1 !
1	0	1

Théorème

Toute fonction booléenne $\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ peut s'écrire à l'aide de négations, de sommes et de produits. Une telle écriture s'appelle un **énoncé booléen**.

Exercice corrigé

Donner la table de vérité de la fonction booléenne $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ définie par l'énoncé booléen

$$f(x;y) = \overline{x} + x\,y\,.$$

x	y	$f(x;y)$
0	0	
0	1	
1	1	
1	0	

Plus particulièrement, toute fonction peut être définie par une somme de produits constitués des n variables x_i, $i = 1, \ldots n$ ou de leurs négations $\overline{x_i}$, $i = 1, \ldots n$.

Algorithme

Soit $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ donnée par sa table de vérité.

- Pour chaque ligne de la table de vérité ayant un 1 dans la colonne de f :
  - Pour chaque colonne de variable x_1, x_2, ..., x_n :
    - Si la case contient 1 prendre x_i,
    - sinon prendre sa négation $\overline{x_i}$.
  - Effectuer le produit des n expressions ainsi obtenues pour cette ligne.
- Effectuer la somme des expressions ainsi obtenues pour chaque ligne.

Le résultat de de procédé s'appelle la **somme canonique** de la fonction f.

Exercice corrigé

Appliquer l'algorithme afin de déterminer la somme canonique de la fonction f.

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
1	0	0	0

$f(x;y;z) =$ ....

Exercice corrigé

Comparer la table de vérité de la fonction f de l'exemple ci-dessus avec la table de vérité de l'énoncé $z + x\,y$.

x	y	z	$x\,y$	$z + x\,y$	$f(x;y;z)$
0	0	0			0
0	0	1			1
0	1	1			1
0	1	0			0
1	1	0			1
1	1	1			1
1	0	1			1
1	0	0			0

Nous constatons que l'algorithme précédent est loin de fournir le meilleur énoncé dont la table de vérité coïncide avec celle de la fonction booléenne $f(x;y;z) = z + x\,y$ et nous allons chercher à faire mieux.

Propriétés algébriques des opérations booléennes

La première stratégie pour simplifier un énoncé est d'utiliser les règles de calcul de l'algèbre de Boole.

Propriétés algébriques des opérations booléennes.

Idempotence	
$\boldsymbol{p+p=p}$	$\boldsymbol{p\cdot p=p}$
Associativité	
$(p+q)+r=p+(q+r)$	$(p\cdot p)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$
Commutativité	
$p+q=q+p$	$p\cdot q=q\cdot p$
Distributivité	
$\boldsymbol{p+(q\cdot r)=(p+q)\cdot(p+r)}$	$p\cdot(q+r)=(p\cdot q)+(p\cdot r)$
Élément neutre	
$p+0=p$	$p\cdot 1=p$
Élément absorbant	
$\boldsymbol{p+1=1}$	$p\cdot 0=0$
Involution	
$\boldsymbol{\overline{\overline{p}}=p}$	
Complémentarité	
$\boldsymbol{p+\overline{p}=1}$	$\boldsymbol{p\cdot\overline{p}=0}$
Loi de DE MORGAN	
$\boldsymbol{\overline{p+q}=\overline{p}\cdot\overline{q}}$	$\boldsymbol{\overline{p\cdot q}=\overline{p}+\overline{q}}$

Priorité des opérations

1)	Les parenthèses ( )
2)	La négation $\overline{\cdot\cdot}$
3)	La conjonction $\cdot$
4)	La disjonction $+$

Exercice corrigé

Les règles de calcul permettent de simplifier l'énoncé de la fonction obtenu précédemment :

$$
\begin{aligned}
f(x;y;z) &= \overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,y\,z+x\,y\,\overline{z}+\underbrace{x\,y\,z}_{\textit{idempotence}}+x\,\overline{y}\,z\\
&= \underbrace{\overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,y\,z}_{\textit{distributivité}}+\underbrace{x\,y\,\overline{z}+x\,y\,z}_{\textit{distributivité}}+\underbrace{x\,y\,z+x\,\overline{y}\,z}_{\textit{distributivité}}\\
&= \overline{x}\,z\,\underbrace{(\overline{y}+y)}_{\textit{complémentarité}}+x\,y\,\underbrace{(\overline{z}+z)}_{\textit{complémentarité}}+x\,z\,\underbrace{(y+\overline{y})}_{\textit{complémentarité}}\\
&= \underbrace{\overline{x}\,z\cdot 1}_{\textit{él.neutre}}+\underbrace{x\,y\cdot 1}_{\textit{él.neutre}}+\underbrace{x\,z\cdot 1}_{\textit{él.neutre}}\\
&= \underbrace{\overline{x}\,z}_{\textit{distributivité avec}\,\to\,\ldots}+x\,y+\underbrace{x\,z}_{\ldots\,\uparrow}\\
&= \underbrace{(\overline{x}+x)}_{\textit{complémentarité}}\,z+x\,y\\
&= \underbrace{1\cdot z}_{\textit{él.neutre}}+x\,y\\
&= z+x\,y
\end{aligned}
$$

Mais c'est tout de même un peu laborieux. Le chapitre suivant exposera un algorithme permettant de simplifier plus efficacement l'énoncé d'une fonction booléenne.

Avant cela, précisons encore que les opérations somme et produit sont redondantes et que l'on peut se passer de l'une ou de l'autre, selon les contextes.

Théorème

Toute fonction booléenne $\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ peut s'écrire sous forme d'un énoncé contenant exclusivement des négations et des sommes.

On utilise les lois de De Morgan pour transformer tous les produits en sommes.

$$\overline{p \cdot q} = \overline{p} + \overline{q} \qquad \Leftrightarrow \qquad p \cdot q = \overline{\overline{p} + \overline{q}}$$

Exercice corrigé

Écrire la fonction f exclusivement avec des négations et des sommes :

$f(x; y; z) = z + x\,y =$ ....

Théorème

Toute fonction booléenne $\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ peut s'écrire à l'aide de négations et de produits exclusivement.

On utilise les lois de De Morgan pour transformer toutes les sommes en produits.

$$\overline{p + q} = \overline{p} \cdot \overline{q} \qquad \Leftrightarrow \qquad p + q = \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$$

Exercice corrigé

Écrire la fonction f exclusivement avec des négations et des produits :

$f(x; y; z) = z + x\,y =$ ....

6 Tables de Karnaugh

Ces tables permettent de déduire un énoncé optimal d'une fonction booléenne f à partir de sa table de vérité.

Il s'agit de répartir les valeurs de la fonction f dans un tableau à double entrée en plaçant verticalement la première moitié des variables et horizontalement les autres, en prenant soin que **deux cases adjacentes ne diffèrent que par la valeur d'une seule variable**.

Pour deux variables

$x \backslash y$	0	1
0		
1		

Pour trois variables

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0				
1				

Pour quatre variables

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Pour cinq variables

$vw \backslash xyz$	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Par exemple, la fonction f à trois variables de l'exemple donnera le tableau suivant.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1

Dans ce tableau on cherche un plus grand rectangle ne couvrant que des 1 **dont les côtés sont des puissances de 2**. Ici il s'agit du carré grisé de taille 2×2 caractérisé par la condition $z = 1$ qui correspond à la proposition formelle z.

$x \backslash yz$	00	$0\mathbf{1}$	$1\mathbf{1}$	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1

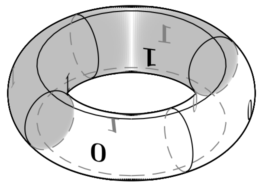
On cherche alors un plus grand rectangle couvrant des 1 non tous encore couverts et **dont les côtés sont des puissances de 2**. Ici il s'agit du rectangle grisé de taille 1×2 caractérisé par la condition $x = 1$ et $y = 1$ qui correspond à la proposition formelle $x\,y$.

$x \backslash yz$	00	01	$\mathbf{1}1$	$\mathbf{1}0$
0	0	1	1	0
$\mathbf{1}$	0	1	1	1

Une fois tous les 1 recouverts, la disjonction des propositions formelles ainsi obtenues donne une écriture de f. Ici il s'agit de $f(x;y;z) = z + x\,y$.

Remarquons encore que parfois un rectangle peut se trouver découpé. Dans ce tableau qui correspond aussi à la fonction f, le carré de taille 2×2 caractérisé par z se trouve à cheval sur les extrémités gauche et droite du tableau. Le tableau doit donc être vu, non pas comme un rectangle plan, mais comme un tore (forme de donut) sur lequel les lignes et les colonnes s'enroulent et se rejoignent.

x \ yz	11	10	00	01
1	1	0	0	1
0	1	1	0	1



7 Exercices

Exercice 8.

Appliquer l'algorithme page 22 aux fonctions suivantes données par leur table de vérité afin de déterminer leur somme canonique.

a)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x;y;z) =$ ....
....

b)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(x;y;z) =$ ....
....

c)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x;y;z) =$ ....
....

d)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

e)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

f)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

g)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

h)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

i)

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(x;y;z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Exercice 9.

On considère la LA DISJONCTION EXCLUSIVE $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ notée $(x;y) \mapsto x \oplus y$ et définie par $x \oplus y = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$.

a) Donner sa table de vérité :

x	y	$x \oplus y$
0	0	
0	1	
1	1	
1	0	

b) En appliquant les propriétés algébriques des opérations booléennes, montrer que

$$x \oplus y = (x + y) \cdot \overline{x\,y}$$

....

....

....

....

....

c) Ne l'écrire qu'avec des négations et des sommes en utilisant les lois de de Morgan :

$$x \oplus y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) Ne l'écrire qu'avec des négations et des produits en utilisant les lois de de Morgan :

$$x \oplus y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 10.

Démontrer les égalités suivantes à l'aide des propriétés algébriques des opérations booléennes.

a) $\overline{\overline{x}\,\overline{y} + x\,y} = x\,y\,(\overline{x} + \overline{y})$

....

....

b) $\overline{x\,\overline{y} + \overline{x}\,y} = \overline{x}\,\overline{y} + x\,y$

....

....

Exercice 11.

Simplifier les énoncés suivants à l'aide des des propriétés algébriques des opérations booléennes.

a) $x\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z$

....

....

b) $x\,(\overline{y}\,z + z) + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z$

....

....

c) $y\,(\overline{y}\,z + x\,z) + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z$

....

....

Exercice 12.

Démontrer les égalités suivantes à l'aide des propriétés algébriques des opérations booléennes.

a) $(x + y)\,(x + \overline{y}) = x$

....

....

b) $x + x\,y = y$

....

....

c) $x\,(x + y) = x$

....

....

d) $x + \overline{x}\,y + x\,y = x + y$

....

....

e) $x\,(\overline{x}+y)\,(x+y)=x\,y$

. . . .

. . . .

f) $x\,y+\overline{x}\,y\,z+\overline{x}\,\overline{y}\,z=x\,y+\overline{x}\,z$

. . . .

. . . .

g) $(x+y)\,(\overline{x}+y+z)\,(\overline{x}+\overline{y}+z)=(x+y)\,(\overline{x}+z)$

. . . .

. . . .

. . . .

h) $x\,y+x\,\overline{y}\,z+x\,y\,z=x\,y+x\,z$

. . . .

. . . .

. . . .

i) $(x+y)\,(x+\overline{y}+z)\,(x+y+z)=(x+y)\,(x+z)$

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 13.

Simplifier la négation des énoncés suivants à l'aide des propriétés algébriques des opérations booléennes.

a) $x+y\,z+x\,y$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

b) $(x+\overline{y})\,(y+\overline{z})\,(x+z)$

....
....
....
....
....

c) $x+y\,z+x\,y\,z$

....
....
....
....
....
....

d) $(x+y\,z)\,(y+x\,z)$

....
....
....
....
....

Exercice 14.

Réécrire les énoncés booléens suivants en utilisant uniquement la négation et la somme.

a) $x\,\overline{y}$

....

b) $x\,(\overline{y}+z)$

....

c) $x\,\overline{y}+\overline{x}\,y$

....

Exercice 15.

Réécrire les énoncés booléens suivants en utilisant uniquement la négation et le produit.

a) $x + \overline{y}$

. . . .

b) $x\,(\overline{y} + z)$

. . . .

c) $x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$

. . . .

Exercice 16.

Écrire l'énoncé simplifié des tableaux suivants.

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1

. . . .

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

. . . .

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

. . . .

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	0

. . . .

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	0	0

. . . .

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

. . . .

Exercice 17.

Écrire l'énoncé simplifié des tableaux suivants.

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

Exercice 18.

Utiliser les tables de Karnaugh afin de simplifier l'écriture des énoncés des fonctions de l'exercice 8.

8 Solutions des exercices

Solution 8.

a) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z$

b) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z}$

c) $f(x;y;z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z$

d) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z$

e) $f(x;y;z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z}$

f) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z$

g) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,y\,z$

h) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z$

i) $f(x;y;z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$

Solution 9.

a)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

b)
$$\begin{aligned}(x+y)\cdot\overline{x\,y} &= (x+y)\,(\overline{x}+\overline{y})\\ &= x\,\bar{x} + x\,\bar{y} + y\,\bar{x} + y\,\bar{y}\\ &= 0 + x\,\bar{y} + y\,\bar{x} + 0\\ &= x\,\bar{y} + \bar{x}\,y\end{aligned}$$

c) $x \oplus y = \overline{\overline{x}+y} + \overline{x+\overline{y}}$

d) $x \oplus y = \overline{\overline{x\,\overline{y}}\cdot\overline{\overline{x}\,y}}$

Solution 10.

a) $\underbrace{\overline{\overline{x\,y}+x\,y}}_{\overline{1}} = \underbrace{x\,y\cdot\overline{x\,y}}_{0} = x\,y\cdot(\overline{x}+\overline{y}) = \underbrace{x\,y\,\overline{x}}_{0\cdot y=0} + \underbrace{x\,y\,\overline{y}}_{x\cdot 0=0} = 0$

b) $\overline{x\,\overline{y}+\overline{x}\,y} = \overline{x\,\overline{y}}\cdot\overline{\overline{x}\,y} = (\overline{x}+y)\cdot(x+\overline{y}) = \underbrace{\overline{x}\,x}_{0} + \overline{x}\,\overline{y} + y\,x + \underbrace{y\,\overline{y}}_{0} = \overline{x}\,\overline{y} + x\,y$

Solution 11.

a) $x\,\overline{y}\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z = x\,(\overline{y} + y\,z)$

b) $x\,(\overline{y}\,z + z) + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z = x\,y\,\overline{z} + z$

c) $y\,(\overline{y}\,z + x\,z) + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z = x\,y + \overline{x}\,z$

Solution 12.

a) $(x+y)\,(x+\overline{y}) = x$

b) $x + x\,y = x$

c) $x\,(x+y) = (x+0)\,(x+y) = x + \underbrace{0 \cdot y}_{0} = x$

d) $x + \overline{x}\,y + x\,y = x + y$

e) $x\,(\overline{x}+y)\,(x+y) = x\,y$

f) $x\,y + \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,z = x\,y + \overline{x}\,z$

g) $(x+y)\,(\overline{x}+y+z)\,(\overline{x}+\overline{y}+z) = (x+y)\,(\overline{x}+z)$

h) $x\,y + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z = x\,y + x\,z$

i) $(x+y)\,(x+\overline{y}+z)\,(x+y+z) = (x+y)\,(x+z)$

Solution 13.

a) $\overline{x + y\,z + x\,y} = \overline{x}\,(\overline{y}+\overline{z})$

b) $\overline{(x+\overline{y})\,(y+\overline{z})\,(x+z)} = \overline{x}\,y + \overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{z}$

c) $\overline{x + y\,z + x\,y\,z} = \overline{x}\,(\overline{y}+\overline{z})$

d) $\overline{(x+y\,z)\,(y+x\,z)} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}$

Solution 14.

a) $x\,\overline{y} = \overline{\overline{x}+y}$

b) $x\,(\overline{y}+z) = \overline{\overline{x}+\overline{\overline{y}+z}}$

c) $x\,\overline{y} + \overline{x}\,y = \overline{\overline{x}+y} + \overline{x+\overline{y}}$

Solution 15.

a) $x + \overline{y} = \overline{\overline{x}\cdot y}$

b) $x\,(\overline{y}+z) = x \cdot \overline{y \cdot \overline{z}}$

c) $x\,\overline{y} + \overline{x}\,y = \overline{(\overline{x\,\overline{y}} \cdot \overline{\overline{x}\,y})}$

Solution 16.

a) $\overline{x}\,\overline{y} + x\,y + \overline{y}\,z$

b) $\overline{x}\,y + x\,\overline{y} + \overline{y}\,z$

c) $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{z}$

d) $\overline{x} + \overline{y}$

e) $\overline{x} + y\,z$

f) $x + z$

Solution 17.

a) $y\,\overline{w}\,x + \overline{y}\,\overline{z}\,x + y\,z\,w + w\,x\,\overline{y}$

b) $\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{w}\,x\,\overline{y}\,z + w\,x\,y\,z + w\,\overline{x}\,y\,\overline{z}$

c) $y\,z + \overline{w}\,x$

d) $x\,\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}\,z$

e) $\overline{z}\,\overline{x} + z\,\overline{w}\,x + y\,z\,x$

f) $x + z$

Solution 18.

a)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$\overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z$

b)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z}$

c)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	0

$\overline{x}\,y + y\,z + x\,\overline{y}$

d)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	1	1

$\overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + x\,y$

e)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	0

$\overline{x}\,y + x\,\overline{y}\,\overline{z}$

f)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$\overline{x}\,\overline{z} + x\,z$

g)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

$\overline{x} + y\,z$

h)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0

$\overline{x}\,y + \overline{y}\,z$

i)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

z

Troisième partie

Applications en informatique

9 Circuits logiques

En électronique, les fonctions booléennes dont nous avons parlé précédemment NON, ET et OU peuvent être réalisées à partir de transistors. Ces derniers sont composés de trois parties : une base B, un collecteur C et un émetteur E. Dans ce cours et de manière très schématique, nous considérerons le transistor comme un interrupteur contrôlé par la base. Ainsi la base, selon sa tension ($5V$ ou $0V$), permet de connecter ou non le collecteur à l'émetteur afin que le courant circule. Dans la technologie MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor), il existe deux types de transistors, appelés n-MOS et p-MOS. Le transistor n-MOS connecte le collecteur à l'émetteur lorsque la base est à $5V$, alors qu'il est considéré comme un circuit ouvert lorsque la base est à $0V$. Dans un transistor p-MOS, c'est le contraire : le collecteur et l'émetteur sont connectés uniquement lorsque la base est à $0V$ et ne sont pas connectés dans le cas où la base est à $5V$.

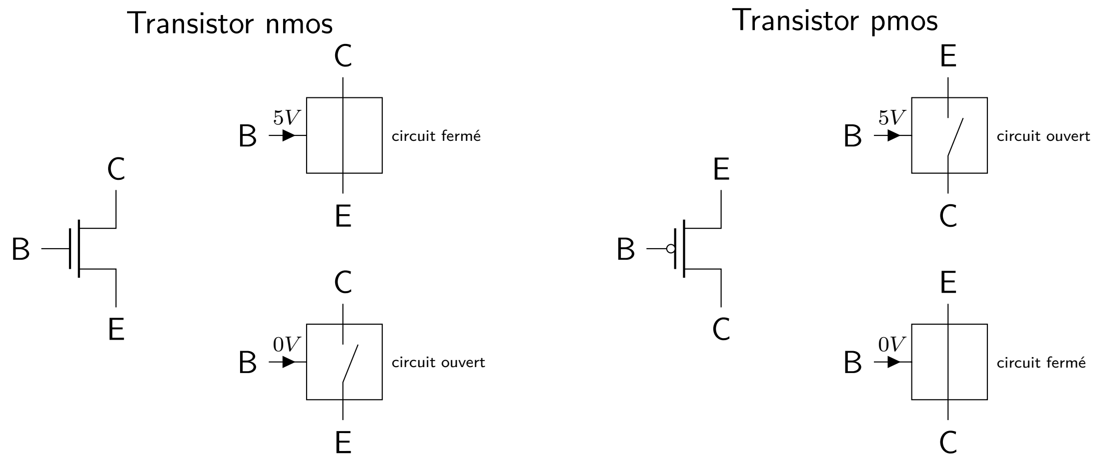


FIGURE 2 – Le courant circule entre C et E lorsque B est sous tension dans un transistor n-mos. Il ne circule pas lorsque B est sous tension dans un transistor p-mos.

À l'aide des transistors, on peut réaliser les fonctions booléennes que nous avons étudiées précédemment. Ces fonctions booléennes sont appelées des portes logiques en électronique. La porte NON peut être réalisée par un circuit composé de deux transistors, un de type n et un de type p. Ce circuit est appelé inverseur.

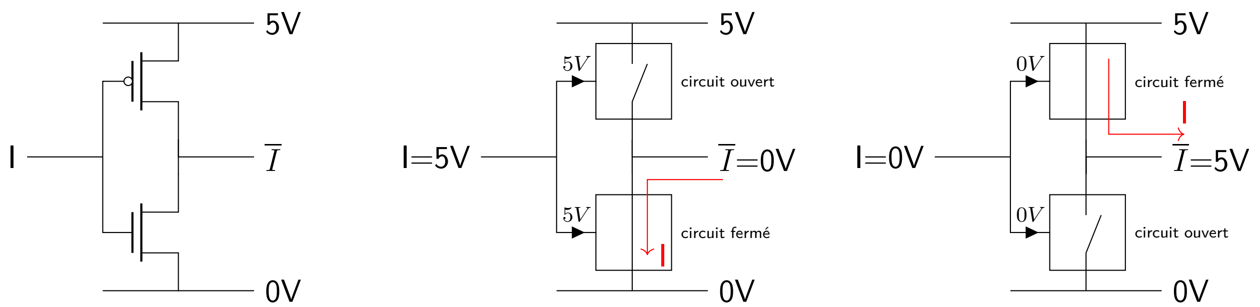


FIGURE 3 – Schéma d'un inverseur

Si on associe la valeur 0 à $0V$ et la valeur 1 à $5V$, on obtient bien la fonction booléenne NON en sortie. Pour ne pas surcharger un schéma et garder de la lisibilité, l'inverseur est représenté par le symbole suivant :

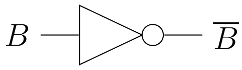


FIGURE 4 – Symbole de la porte logique NON, appelée aussi inverseur

De manière analogue, on peut construire les portes logiques NON ET (NAND) et NON OU (NOR) avec 4 transistors. Pour construire les portes ET (AND) et OU (OR) de manière efficace, on utilise 6 transistors. C'est pourquoi les fonctions NAND et NOR sont utilisées le plus possible dans les circuits logiques. Ces différentes portes logiques sont symbolisées de la manière suivante :

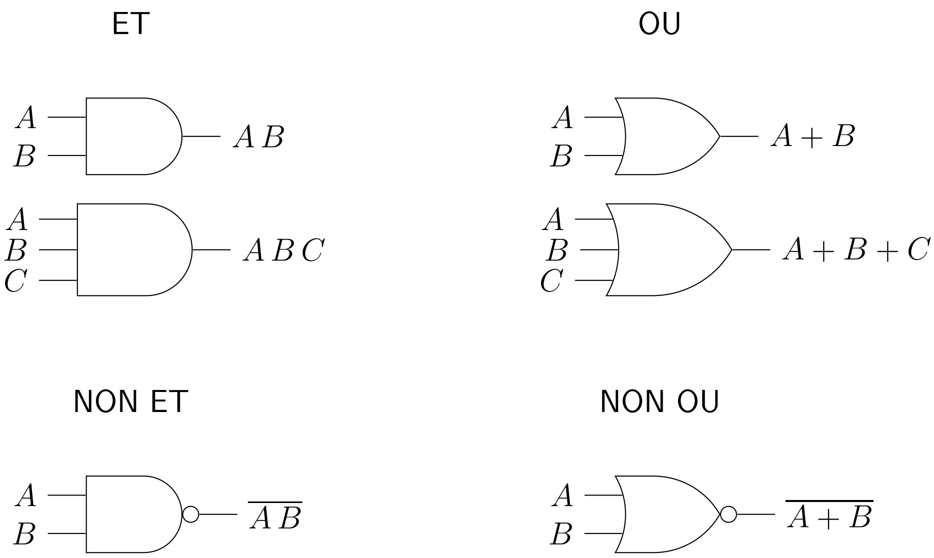


FIGURE 5 – Symboles représentant les portes logiques ET, OU, NON, NON ET et NON OU

Maintenant que nous sommes convaincus de la possibilité de réaliser des portes logiques NON, ET respectivement OU, nous allons relier un ensemble de portes entre elles pour pouvoir évaluer une expressions algébrique.

Définition

Un **circuit logique** est un schéma qui relie plusieurs portes logiques entre elles pour pouvoir évaluer une expression algébrique. Il permet de transcrire en schéma électrique une expression algébrique. La valeur retournée par le schéma électrique s'appelle **la sortie**, dont on donne en général l'énoncé de sortie. Certains circuits logiques retournent plusieurs sorties.

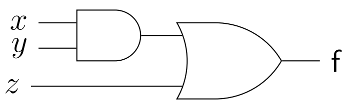
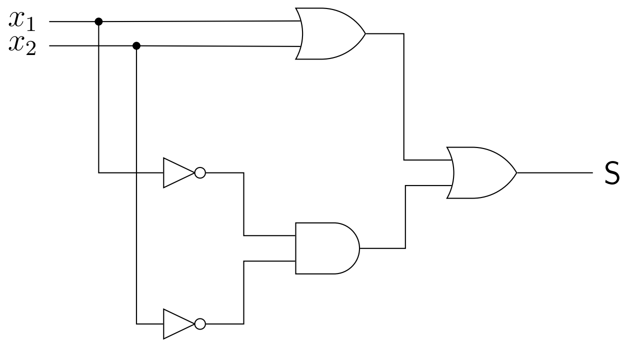


FIGURE 6 – La fonction de 3 variables définie par $f(x;y;z) = z + x\,y$.

Exercice corrigé



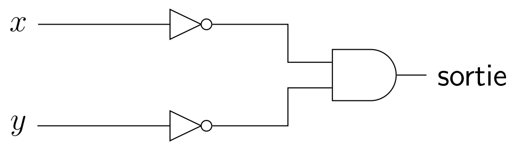
x_1	x_2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Enoncé de sortie : ....

Exercices

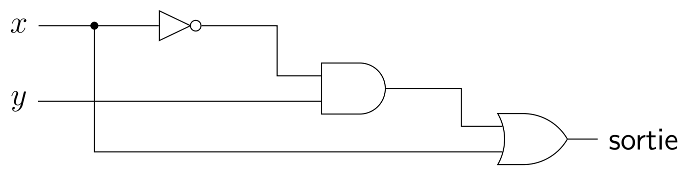
Exercice 19.

Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :



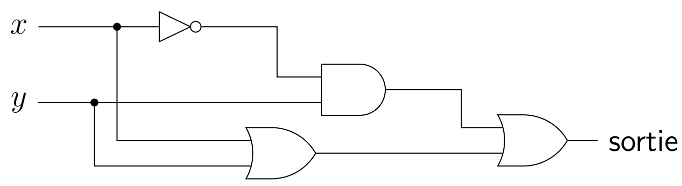
Exercice 20.

Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :



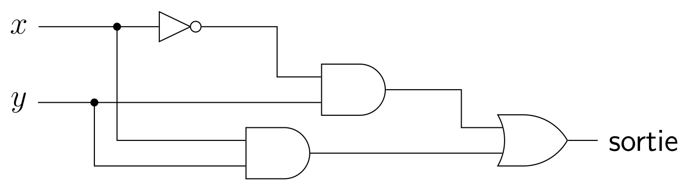
Exercice 21.

Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :



Exercice 22.

Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :

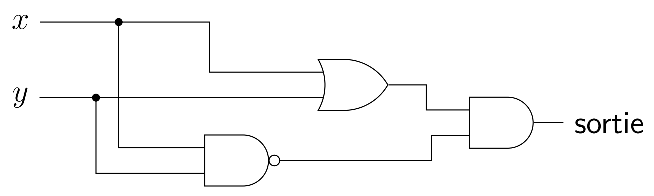


Exercice 23.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $(x + y) \cdot (\bar{y} + z)$.

Exercice 24.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $(x+y)\cdot\overline{x\,y}$.



Exercice 25.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $\overline{\overline{x}\,y + x\,y}$.

Exercice 26.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $x\,y + x\,\overline{y}\,z$.

Exercice 27.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $(x+y)\,(x+\overline{y})$.

Exercice 28.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $x\,y+\overline{y}\,z$.

Exercice 29.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $x+y\,z+x\,y$.

Exercice 30.

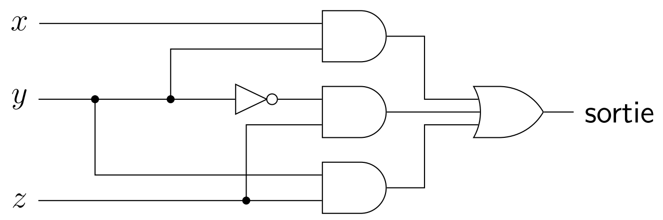
Représenter le circuit dont la variable de sortie est $x\,(y+z)\,(\overline{y}+\overline{x})$.

Exercice 31.

Représenter le circuit dont la variable de sortie est $x\,y\cdot(\overline{y}+\overline{x})$.

Exercice 32.

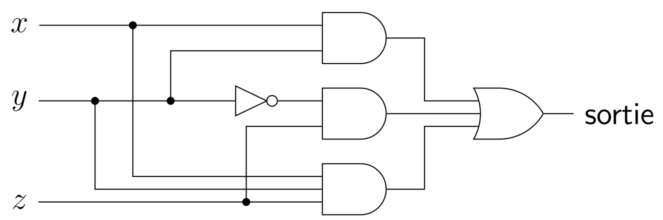
Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :



Puis simplifier l'énoncé et représenter le circuit simplifié.

Exercice 33.

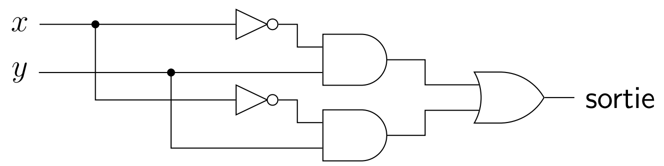
Écrire l'énoncé de sortie du circuit suivant :



Puis simplifier l'énoncé et représenter le circuit simplifié.

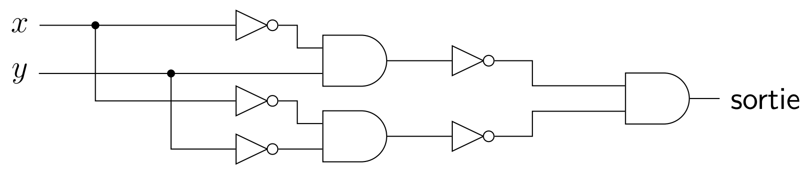
Exercice 34.

Simplifier le circuit suivant :



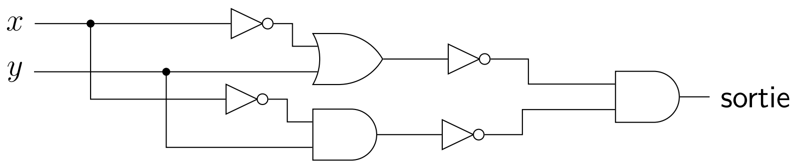
Exercice 35.

Simplifier le circuit suivant :



Exercice 36.

Simplifier le circuit suivant :



Exercice 37.

Représenter les circuits logiques des énoncés simplifiés de l'exercice 11 page 30.

a)

b)

c)

10 Solutions des exercices

Solution 19.

$\overline{x}\,\overline{y}$

Solution 20.

$\overline{x}\,y + x$

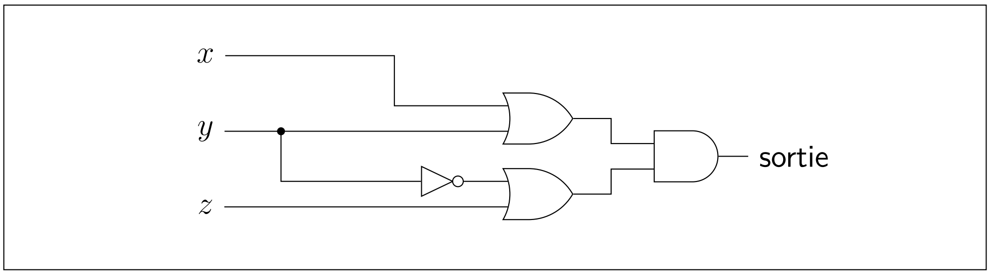
Solution 21.

$\overline{x}\,y + (x + y) = x + y$

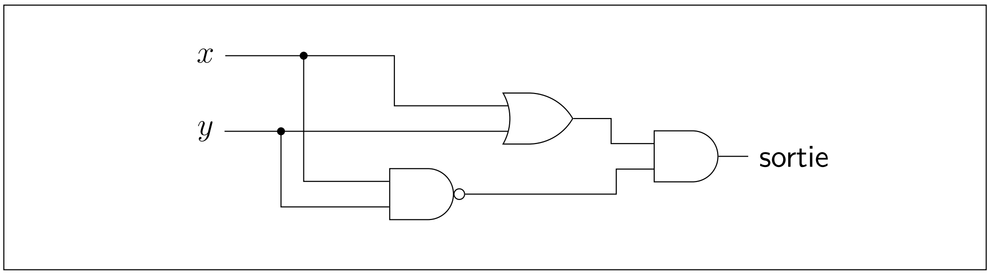
Solution 22.

$\overline{x}\,y + x\,y = y$

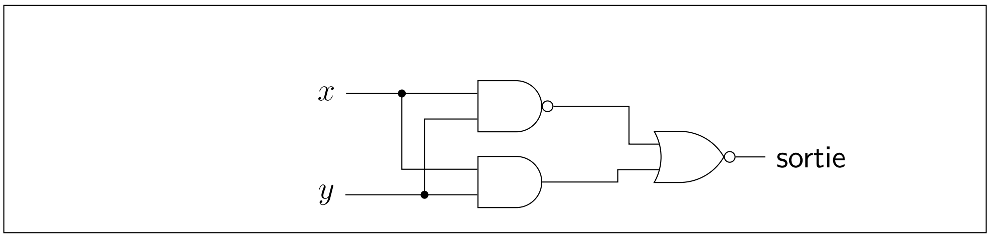
Solution 23.



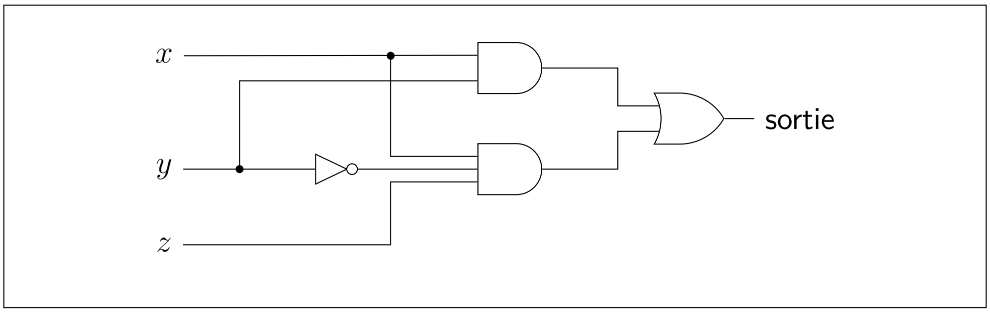
Solution 24.



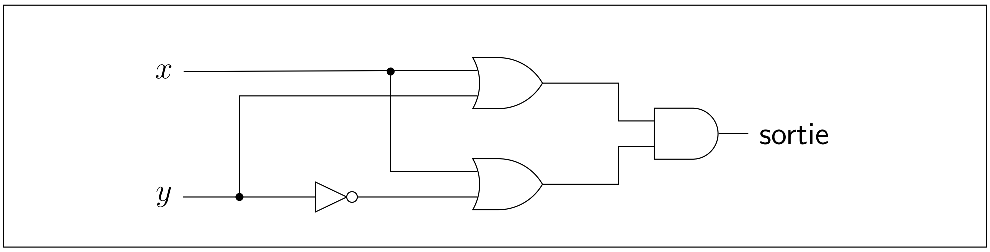
Solution 25.



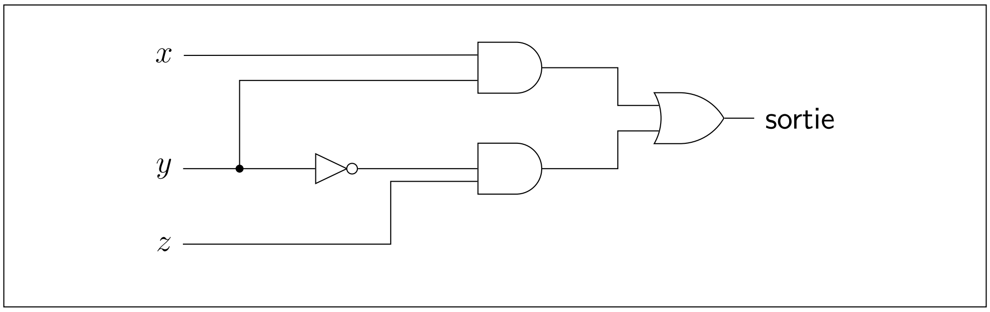
Solution 26.



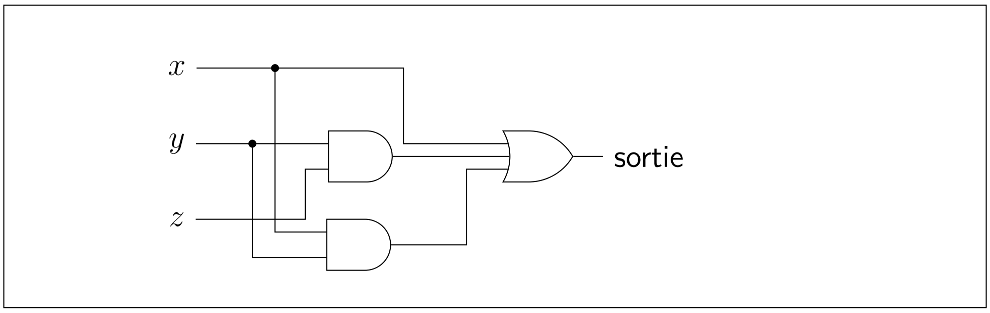
Solution 27.



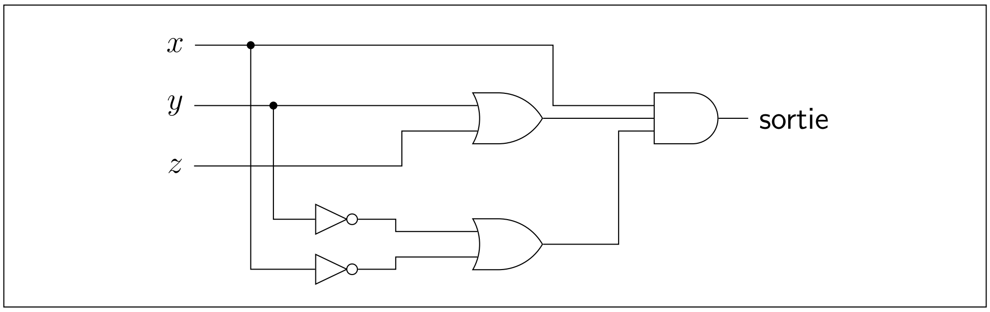
Solution 28.



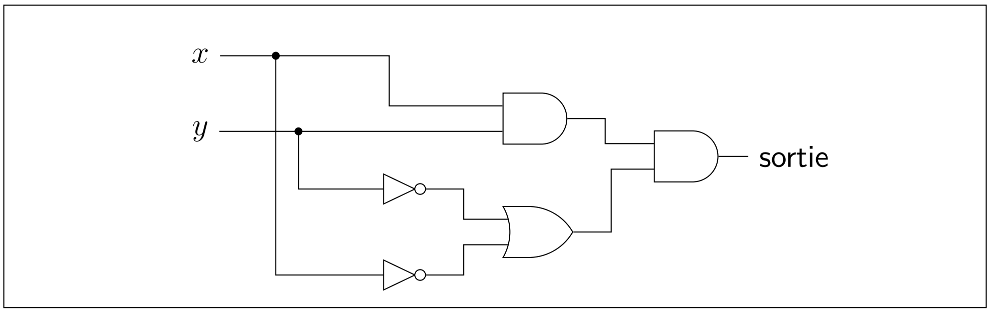
Solution 29.



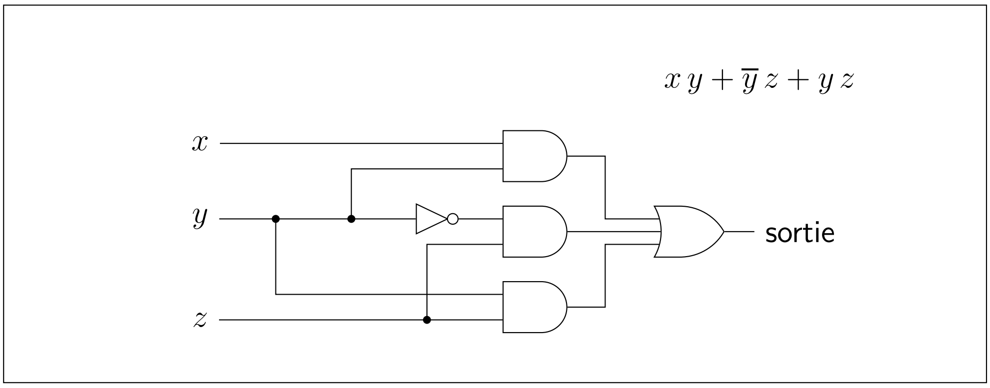
Solution 30.



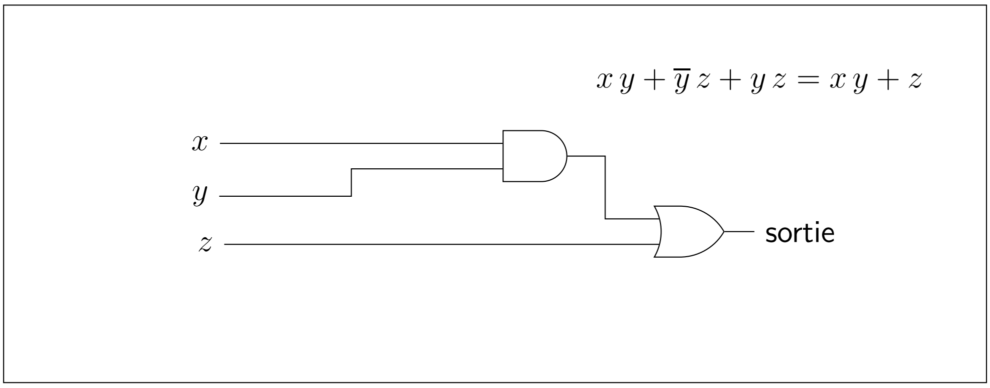
Solution 31.



Solution 32.

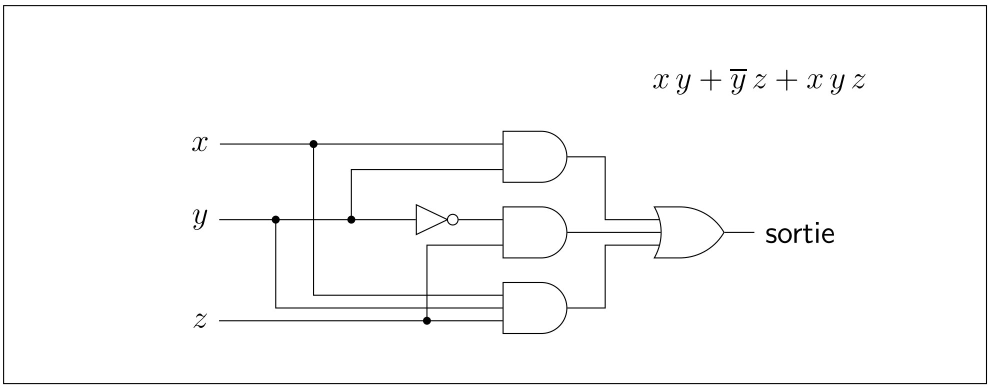


a)



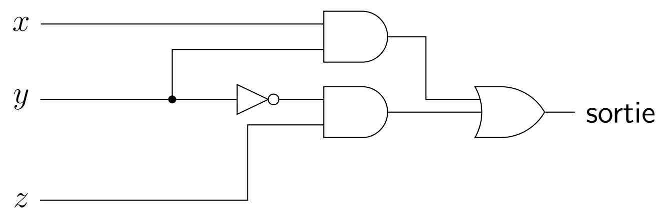
b)

Solution 33.



a)

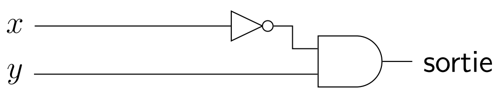
$$x\,y + \overline{y}\,z + x\,y\,z = x\,y + \overline{y}\,z$$



b)

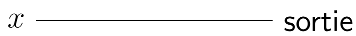
Solution 34.

$$\overline{x}\,y + \overline{x}\,y = \overline{x}\,y$$



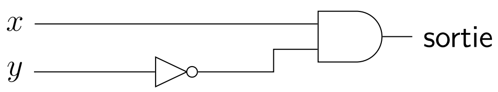
Solution 35.

$$\overline{\overline{x}\,y} \cdot \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{\overline{x}\,y + \overline{x}\,\overline{y}} = \overline{\overline{x}\,\underbrace{(y + \overline{y})}_{1}} = x$$

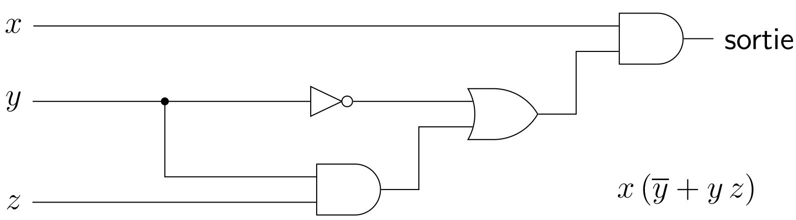


Solution 36.

$$\overline{\overline{x} + y} \cdot \overline{\overline{x}\,y} = \overline{(\overline{x} + y) + \overline{x}\,y} = \overline{\overline{x} + y} = x\,\overline{y}$$



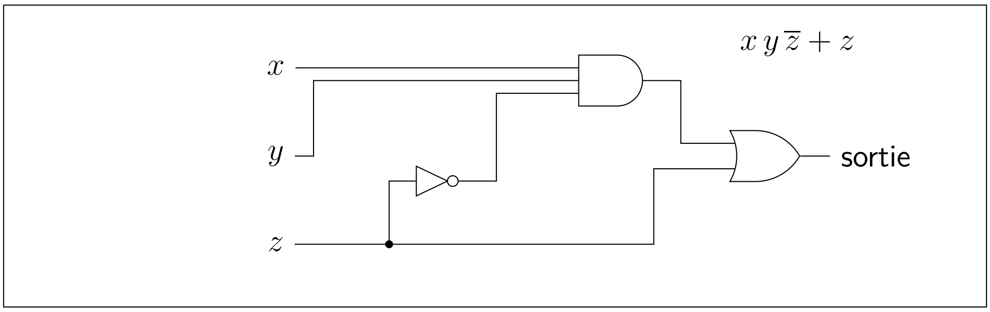
Solution 37.



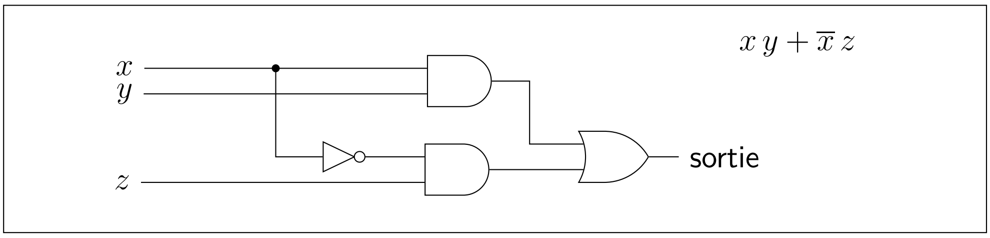
$$x\,(\overline{y} + y\,z)$$

a)

b)



c)



11 Applications

Exemple

Lors d'un jeu télévisé, un jury composé de trois personnes vote pour sélectionner ou pas des candidats pour une participation à la finale. Un candidat est sélectionné dès que deux jurés votent en sa faveur. Nous voulons concevoir un système électronique qui allume un voyant lumineux dès que deux jurés ont voté pour un candidat. (Lorsqu'un juré vote en faveur d'un candidat, il envoie la valeur 1, 0 dans le cas contraire). Nous cherchons donc une fonction qui retourne 1 si le voyant doit s'allumer et 0 dans le cas contraire. Nous cherchons donc une fonction qui retourne 1 si le voyant doit s'allumer, et 0 dans le cas contraire.

On établit la table de vérité de la fonction.

x	y	z	$f(x;y;z)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

On applique l'algorithme page 22 pour en trouver la forme canonique.

$f(x;y;z) =$ ....

on établit le diagramme de Karnaugh de cette fonction.

x \ yz	00	01	11	10
0				
1				

On l'utilise afin de simplifier l'écriture de cette fonction.

$f(x;y;z) =$ ....

Enfin on dessine le schéma logique.

Exercice 38.

Une entreprise possède deux salles de conférences. Il faut concevoir un circuit logique qui allumera un voyant lumineux lorsqu'au moins l'une des deux salles est disponible.

Exercice 39.

Un avion possède trois toilettes. Il faut concevoir un circuit logique qui allume un voyant lumineux lorsqu'au moins l'une des trois toilettes est disponible.

Exercice 40.

L'éclairage d'un corridor est contrôlé par deux interrupteurs. Construire un circuit logique allumant cet éclairage lorsque le nombre d'interrupteurs en position enclenchée est impair. Refaire l'exercice avec trois interrupteurs.

Exercice 41.

Un comité est formé d'un président et de trois vice-présidents. On souhaite concevoir un circuit logique permettant de compiler les votes de ce comité sachant que les propositions sont adoptées à la majorité simple – c'est-à-dire lorsque le nombre de vote "pour" est supérieur (strictement) au nombre de vote "contre" – et qu'aucune proposition ne peut être adoptée si le président vote contre.

Exercice 42.

Construire un circuit logique qui compare deux valeurs binaires A et B de 1 bit en entrée. Le circuit doit indiquer si $A < B$, $A = B$ ou $A > B$.

12 Additionner des entiers à l'aide de fonctions booléennes

Comment pouvons-nous réaliser des additions de nombres entiers à l'aide des portes logiques que nous avons vues ci-dessus ?
Tout d'abord, les fonctions booléennes ne prennent en entrée que des 0 et des 1. Il s'agit donc de transformer tout nombre en une suite de 0 et de 1, ou autrement dit de transformer en un nombre en base 2, c'est-à-dire de l'exprimer comme une somme de puissance de 2. Par exemple, $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = |110|_2 = \underbrace{0b}_{\text{binaire}}110$. Si l'ordinateur utilise 4 bits pour stocker un nombre, alors on écrira 6 comme 0110.

Exercice 43.

Ecrire 7, 13 et 14 en code binaire, sur 4 bits

Exercice 44.

Ecrire $7+4$, $3+2$ et $6+5$ en transformant tout d'abord les nombres en base 2, puis en faisant une addition en colonne avec la retenue. Donner la réponse en code binaire, sur 4 bits.

Exercice 45.

Un demi-additionneur binaire $(x + y)$ est un circuit logique ayant deux énoncés de sortie : S qui donne la somme modulo 2 des variables x et y et R qui donne la retenue de cette somme.

x	y	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

TABLE 2 – Demi-additionneur binaire.

a) Écrire la somme canonique de chacun des énoncés de sortie.

b) Représenter les circuits logiques simplifiés correspondants.

Chaque nombre entier x entre 0 et 14 possède un code binaire à 4 chiffres de 0000 à 1110. Nommons $x_3x_2x_1x_0$ le code binaire du nombre x avec les $x_i \in \{0;1\}$.

Additionner 1 à ce nombre c'est créer un nouveau code binaire à 4 chiffres de 0001 à 1111. Nommons $y_3y_2y_1y_0$ le code binaire du nombre $y = x+1$, et r_0, r_1 et r_2 les trois retenues lors de l'addition en base 2.

x	x_3	x_2	x_1	x_0	$y = x+1$	y_3	y_2	y_1	y_0	r_2	r_1	r_0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	2	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	3	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	4	0	1	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	5	0	1	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	6	0	1	1	0	0	0	1
6	0	1	1	0	7	0	1	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	8	1	0	0	0	1	1	1
8	1	0	0	0	9	1	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	1	10	1	0	1	0	0	0	1
10	1	0	1	0	11	1	0	1	1	0	0	0
11	1	0	1	1	12	1	1	0	0	0	1	1
12	1	1	0	0	13	1	1	0	1	0	0	0
13	1	1	0	1	14	1	1	1	0	0	0	1
14	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0	0	0

Nommons $x_3x_2x_1x_0$ le code binaire du nombre x avec les $x_i \in \{0;1\}$. Si $y_3y_2y_1y_0$ est le code binaire de $x+1$ il doit respecter les règles suivantes :

1. $y_0 = 1$ si et seulement si $x_0 = 0$
2. $y_1 = 1$ si et seulement si $[x_1 = 0$ et $x_0 = 1]$ ou $[x_1 = 1$ et $x_0 = 0]$
3. $y_2 = 1$ si et seulement si $[x_2 = 0$ et $x_1 = x_0 = 1]$ ou $[x_2 = 1$ et $(x_1 = 0$ ou $x_0 = 0)]$
4. $y_3 = 1$ si et seulement si $[x_3 = 0$ et $x_2 = x_1 = x_0 = 1]$ ou $[x_3 = 1$ et $(x_2 = 0$ ou $x_1 = 0$ ou $x_0 = 0)]$

Ces conditions se simplifient si on emploie les retenues :

1. $y_0 = 1$ si et seulement si $r_0 = 0$
2. $y_1 = 1$ si et seulement si $[x_1 = 0$ et $r_0 = 1]$ ou $[x_1 = 1$ et $r_0 = 0]$

3. $y_2 = 1$ si et seulement si $[x_2 = 0$ et $r_1 = 1]$ ou $[x_2 = 1$ et $r_1 = 0]$
4. $y_3 = 1$ si et seulement si $[x_3 = 0$ et $r_2 = 1]$ ou $[x_3 = 1$ et $r_2 = 0]$

À partir des 4 valeurs x_i, $i = 1, \ldots, 4$ en entrée, et des 3 retenues r_1, $i = 1, \ldots, 2$ nous pouvons construire les 4 fonctions booléennes y_i, $i = 1, \ldots, 4$ suivantes :

1. $y_0 = \overline{x_0}$,
2. $y_1 = \overline{x_1}\, r_0 + x_1\, \overline{r_0}$
3. $y_2 = \overline{x_2}\, r_1 + x_2\, \overline{r_1}$
4. $y_3 = \overline{x_3}\, r_2 + x_3\, \overline{r_2}$

Le circuit logique suivant, basé sur le demi-additionneur vu dans l'exercice 45 permet à une machine d'effectuer ce calcul. Selon que les entrées x_i sont sous tension ou non pour représenter le code binaire de x, les sorties y_i représentent le code binaire de $x + 1$.

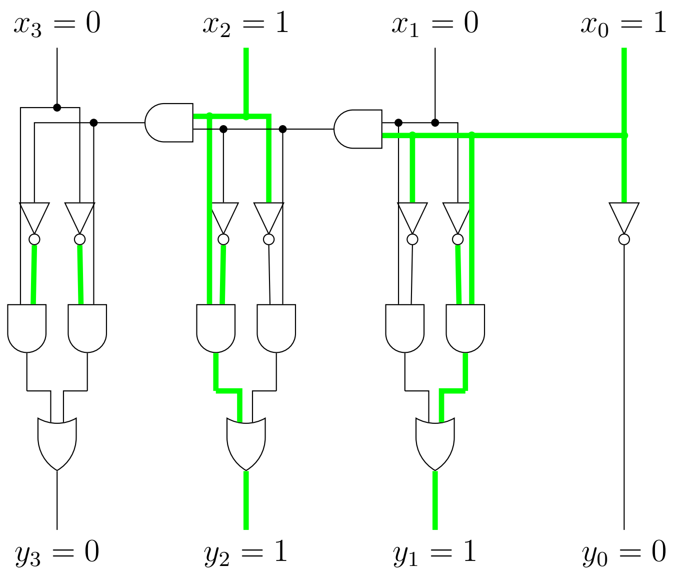
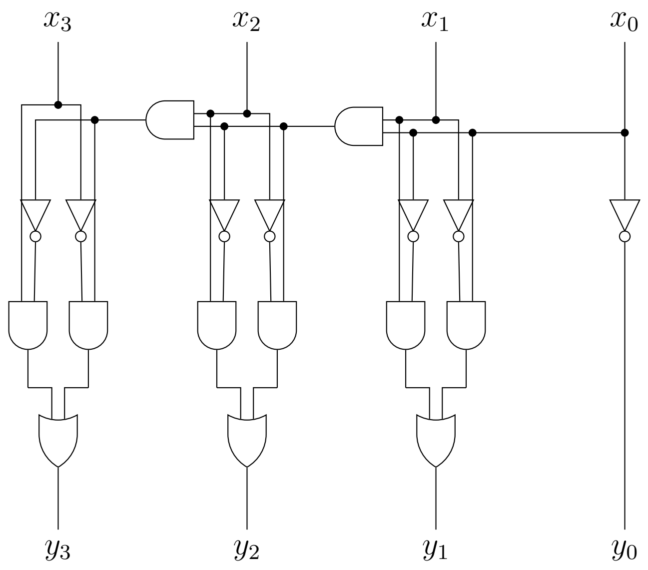
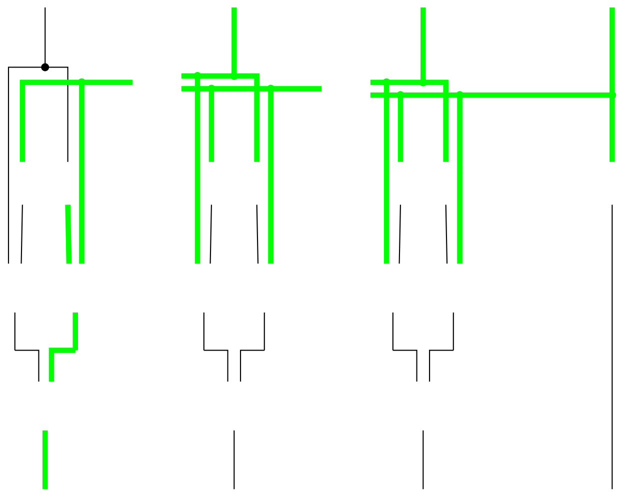


FIGURE 7 – Illustration de $5 + 1 = 6$. En vert, les parties du circuit sous tension.

Exercice 46.

Mettre en évidence les parties du circuit sous tension pour l'addition de $7 + 1 = 8$.





Exercice 47.

Un demi-soustracteur binaire $(x - y)$ est un circuit logique ayant deux énoncés de sortie : D qui donne la différence modulo 2 des variables x et y et E qui donne l'emprunt effectué pour pouvoir réaliser cette différence.

x	y	D	E
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

TABLE 3 – Demi-soustracteur binaire.

a) Écrire la somme canonique de chacun des énoncés de sortie.

b) Représenter les circuits logiques simplifiés correspondants.

13 Solutions des exercices

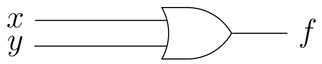
Solution 38.

Variables :

— $x = 1$ si la salle 1 est disponible, 0 sinon

— $y = 1$ si la salle 2 est disponible, 0 sinon

Fonction logique : $f(x; y) = x + y$



Solution 39.

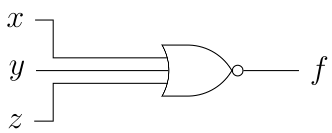
Variables :

— $x = 1$ si les toilettes 1 sont libres, 0 sinon

— $y = 1$ si les toilettes 2 sont libres, 0 sinon

— $z = 1$ si les toilettes 3 sont libres, 0 sinon

Fonction logique : $f(x; y; z) = \overline{x + y + z}$



Solution 40.

Avec deux interrupteurs :

Variables :

— $x = 1$ si l'interrupteur 1 est enclenché, 0 sinon

— $y = 1$ si l'interrupteur 1 est enclenché, 0 sinon

Table de Karnaugh :

$x \backslash y$	0	1
0	0	1
1	1	0

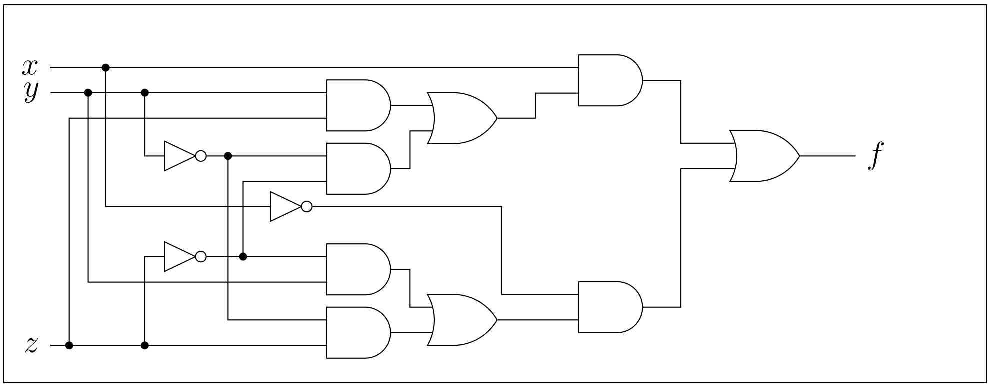
Fonction logique : $f(x; y; z) = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y = x \oplus y$

Avec trois interrupteurs :
Variables :
- $x = 1$ si l'interrupteur 1 est enclenché, 0 sinon
- $y = 1$ si l'interrupteur 1 est enclenché, 0 sinon
- $z = 1$ si l'interrupteur 1 est enclenché, 0 sinon

Table de Karnaugh :

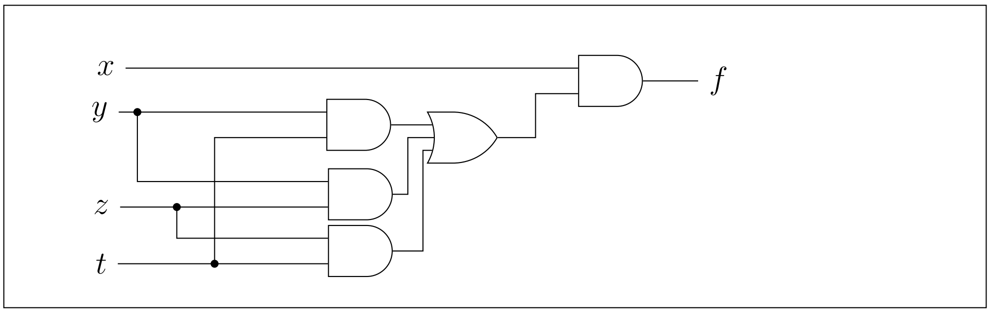
x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

Fonction logique : $f(x;y;z) = x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z + xyz = x(\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}(y\,\overline{z} + \overline{y}\,z)$



Solution 41.

$x = 1$ si le président vote oui, 0 sinon.
$y = 1$ si le premier vice-président vote oui, 0 sinon.
$z = 1$ si le deuxième vice-président vote oui, 0 sinon.
$t = 1$ si le troisième vice-président vote oui, 0 sinon.
$f(x;y;z;t) = x\cdot(ty + yz + tz)$

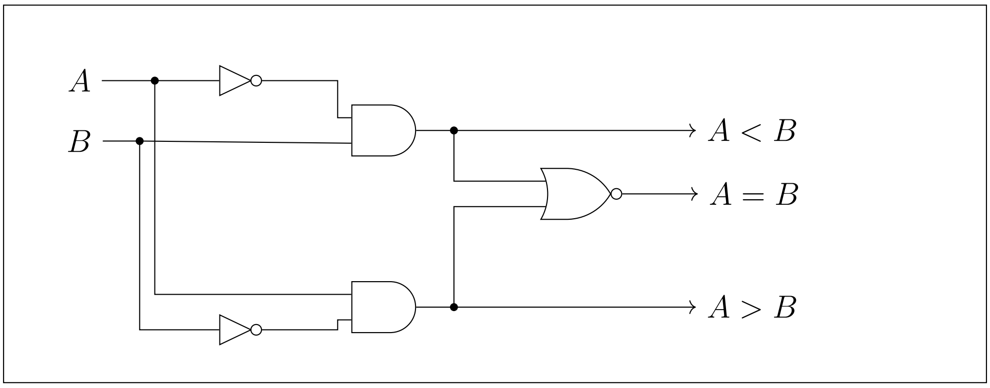


Solution 42.

Entrées		Sorties		
A	B	$A = B$	$A > B$	$A < B$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

$A > B$ correspond à la fonction booléenne $A \cdot \overline{B}$, $A < B$ correspond à la fonction $\overline{A} \cdot B$. On peut écrire $A = B$ comme

$$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B = \overline{A+B} + \overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})} = \overline{A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}}.$$



Solution 43.

$7 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = |111|_2 = 0111,$

$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = |1101|_2 = 1101,$

$14 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = |1110|_2 = 1110$

Solution 44.

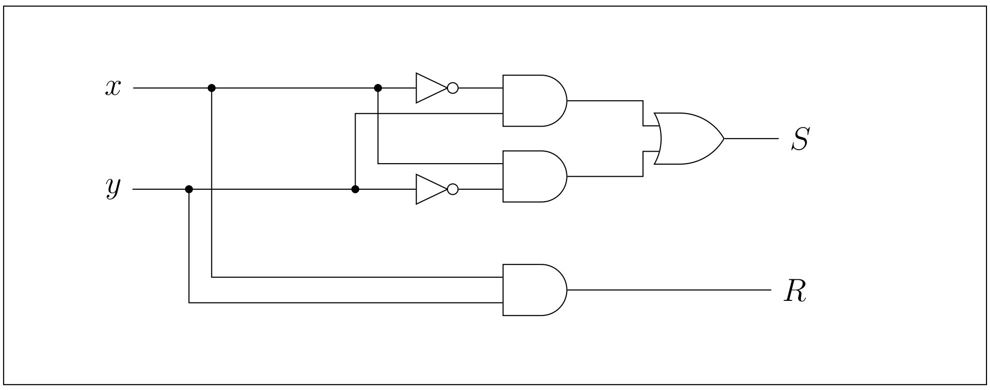
r	1			
7	0	1	1	1
+4	0	1	0	0
11	1	0	1	1

r		1		
3	0	0	1	1
+2	0	0	1	0
5	0	1	0	1

r	1		1	
5	0	1	0	1
+5	0	1	0	1
10	1	0	1	0

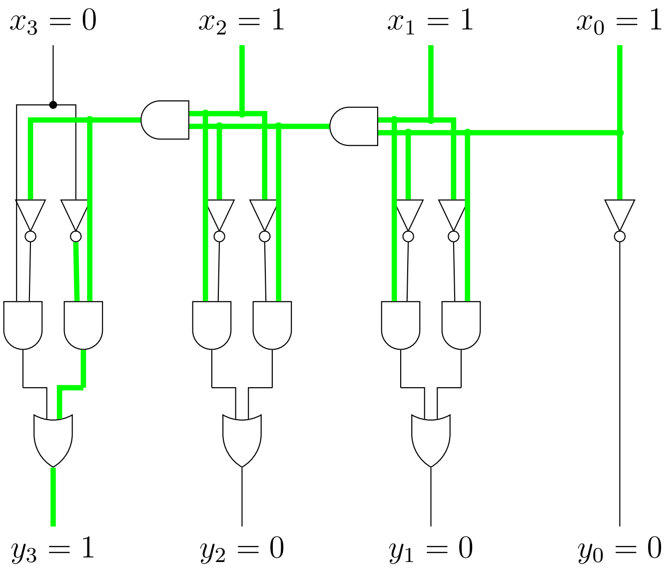
Solution 45.

a) $S = \overline{x}\,y + x\,\overline{y}$ et $R = x\,y$



b)

Solution 46.



Solution 47.

a) $D = \overline{x}\,y + x\,\overline{y}$ et $E = \overline{x}\,y$

b)