

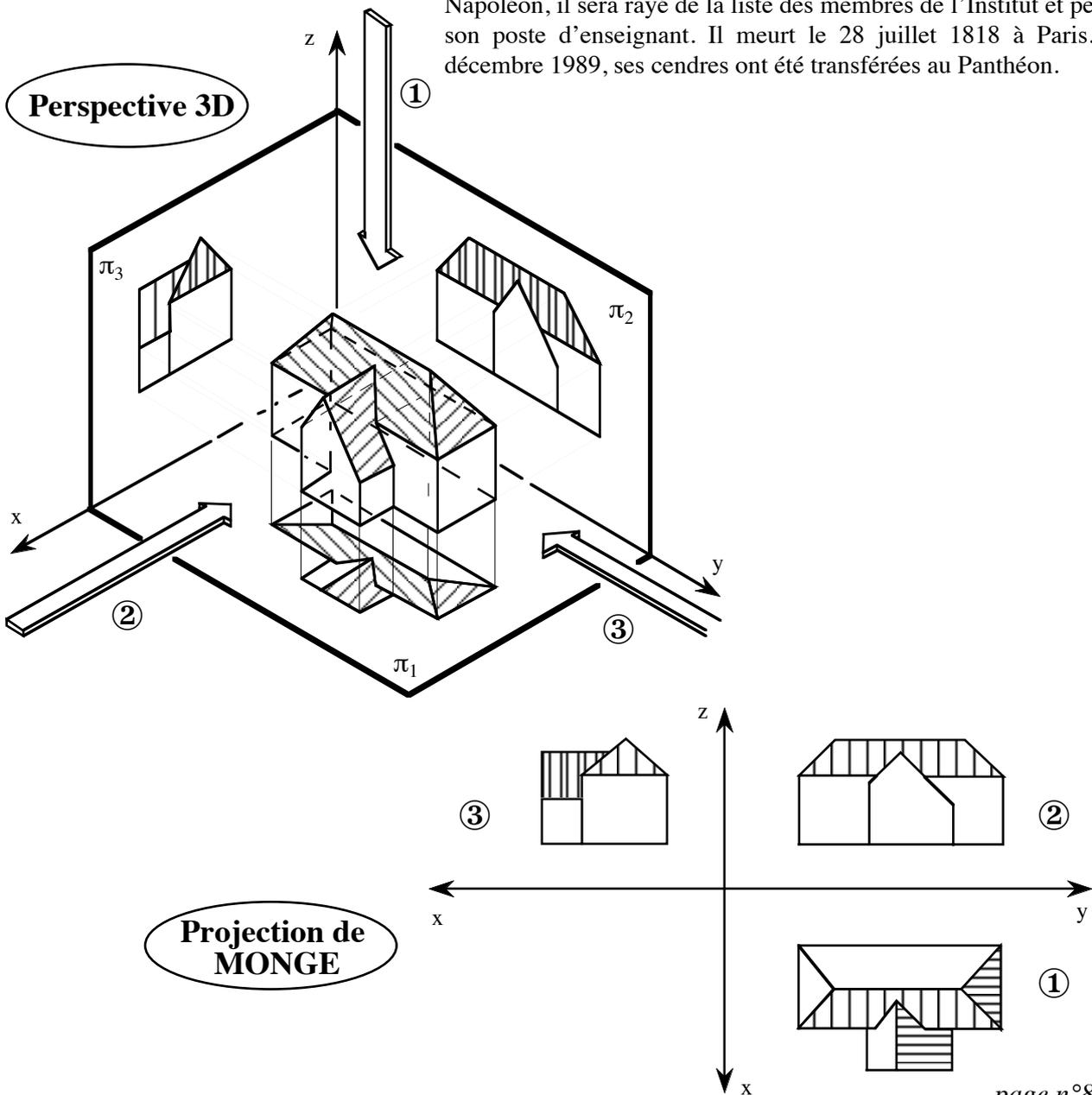
# CHAPITRE 4: La projection de MONGE

## §1. Introduction

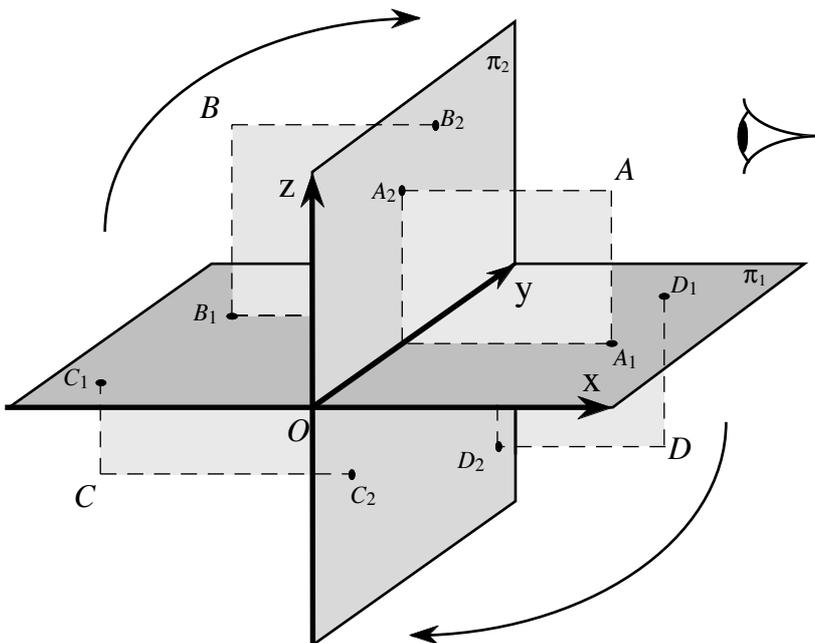
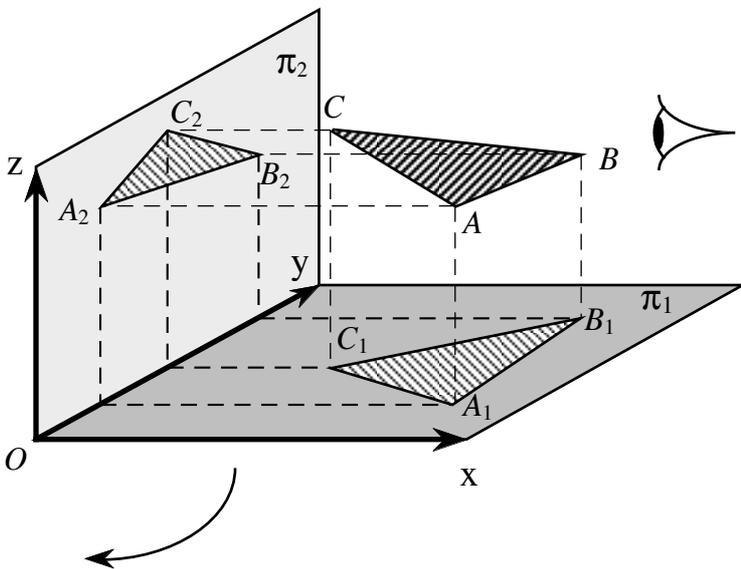
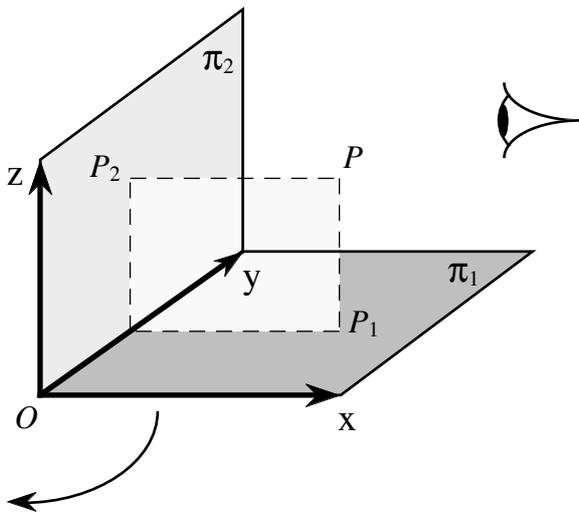


Gaspard Monge est né à Beaune (France) le 9 mai 1746. À l'âge de 17 ans, auteur d'un plan de sa ville natale, il est remarqué par l'état-major de l'école du génie de Mézières. Étant d'origine trop modeste pour y être admis comme élève, il s'y fait engager comme dessinateur. Ses talents de géomètre ne tardent pas à s'exprimer lorsqu'il dresse les plans de nouvelles fortifications considérées alors comme imprenables. Ses méthodes graphiques rapides et élégantes seront à l'origine de ce que l'on appellera **la géométrie descriptive**.

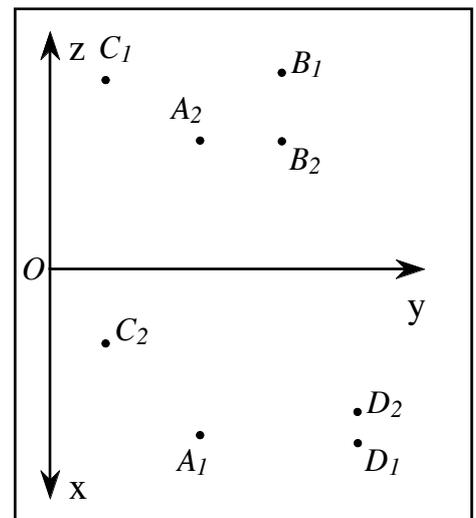
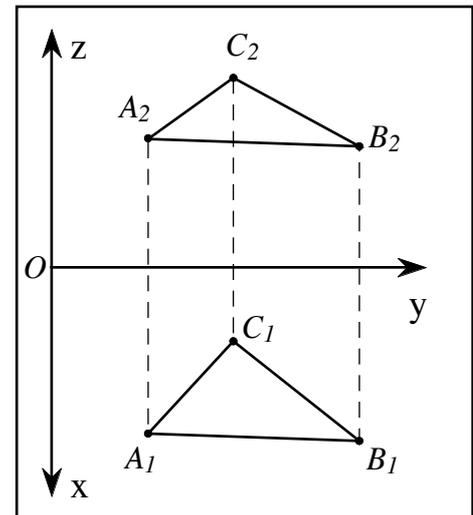
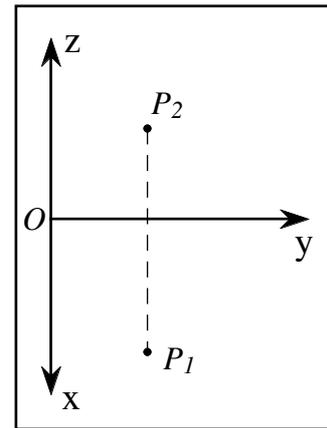
Partisan de la Révolution, il devient ministre de la Marine. Il fonde peu après l'École Polytechnique, et peut enfin publier ses travaux sur la géométrie descriptive, vieux de vingt-cinq ans, mais restés "secret militaire" jusque là. Grand ami de Bonaparte, qui le nommera président de l'Institut d'Égypte, il devient sénateur et est anobli sous le titre de Comte de Péluse. En 1816, après la défaite de Napoléon, il sera rayé de la liste des membres de l'Institut et perdra son poste d'enseignant. Il meurt le 28 juillet 1818 à Paris. En décembre 1989, ses cendres ont été transférées au Panthéon.



### Perspective 3D



### Projection de Monge (qui s'appelle aussi épure)

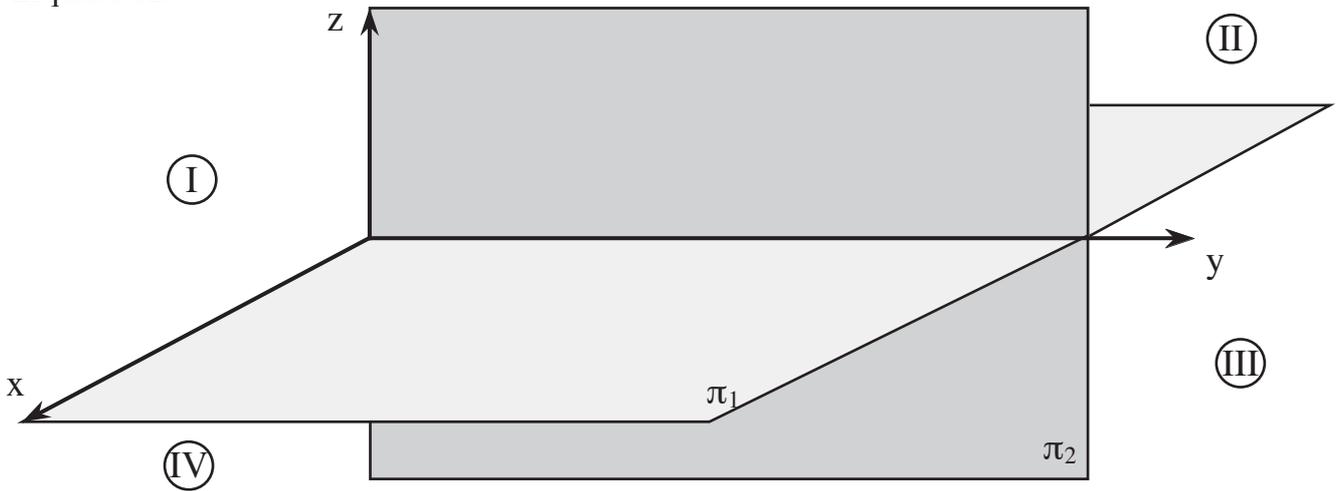


**Exercice 4.1:**

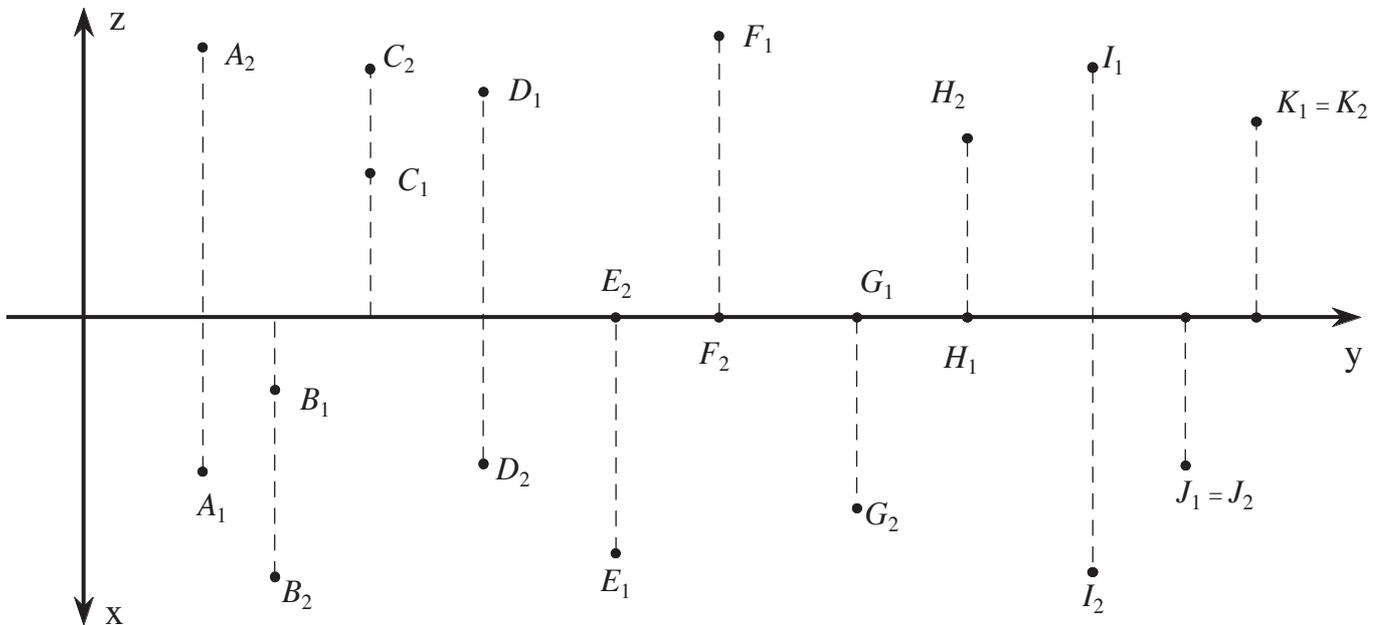
On considère les 2 plans habituels  $\pi_1$  (sol) et  $\pi_2$  (le mur). Ils partagent l'espace en 4 régions appelées quadrants.

Dans la représentation de Monge, on a représenté les points  $A, B, \dots$   
Placer approximativement ces mêmes points dans l'esquisse 3D puis déduire le quadrant dans lequel ils sont situés.

Esquisse 3D



Projection de Monge



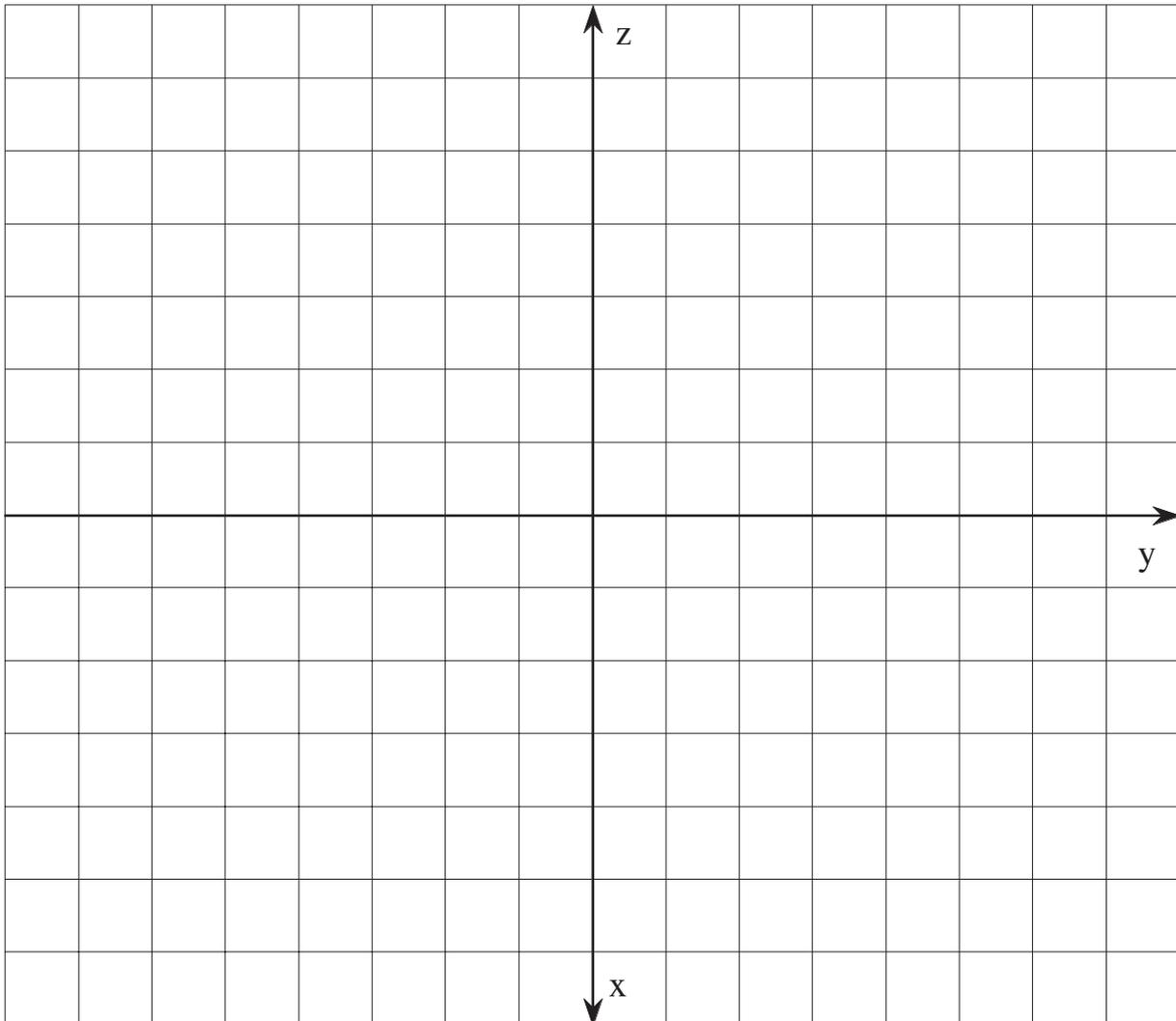
**Exercice 4.2:**

Dessiner les projections des points suivants:

$A(3 ; 2 ; 4)$  ,  $B(-4 ; 3 ; 2)$  ,  $C(4 ; -1 ; 3)$  ,  $D(-4 ; 8 ; 1)$  ,  $E(-2 ; 5 ; -3)$  ,  $F(4 ; 6,5 ; -2)$

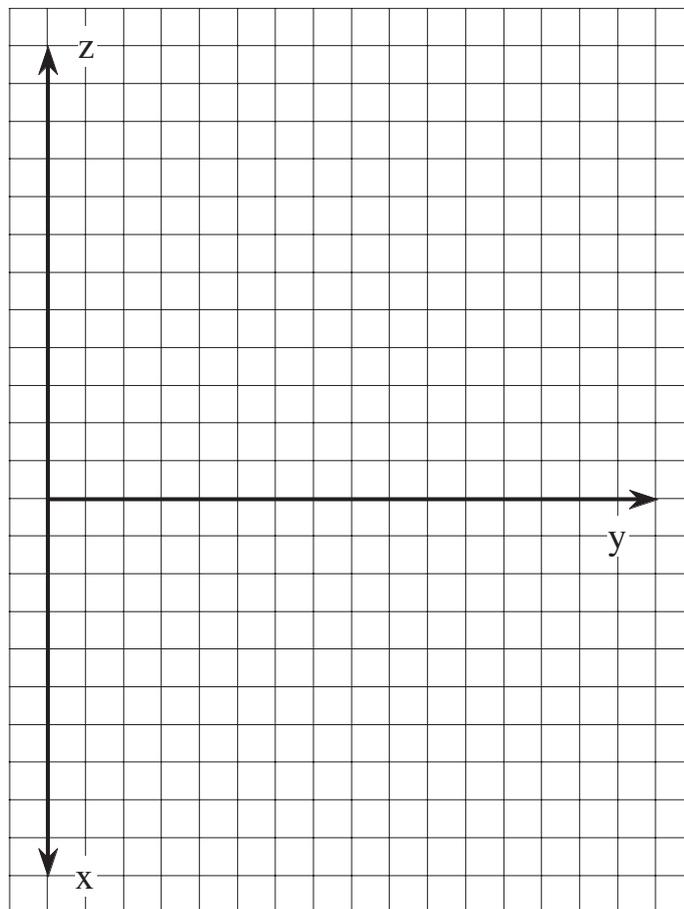
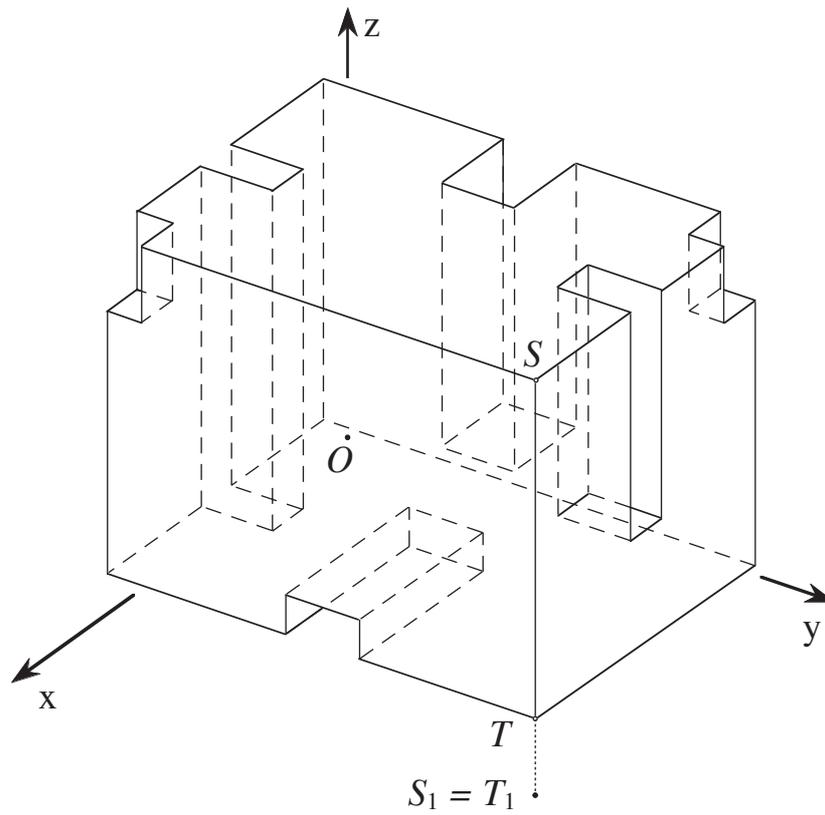
$G(3 ; -3 ; -4)$  ,  $H(-5 ; 6 ; 5)$  et  $K(-1 ; -8 ; -3)$ .

Puis préciser le quadrant dans lequel ils se situent.



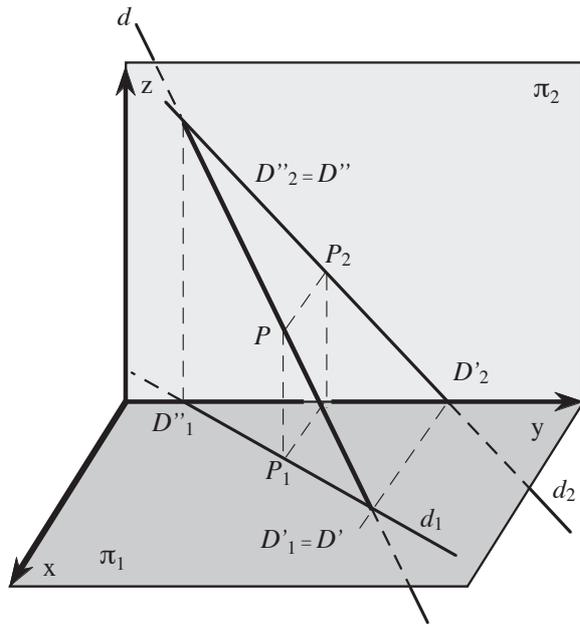
**Exercice 4.3:**

On donne un objet en axonométrie isométrique (1 unité = 1 cm sur les 3 axes).  
Construire son image en projection de Monge (unité: 2 carrés = 1 cm)

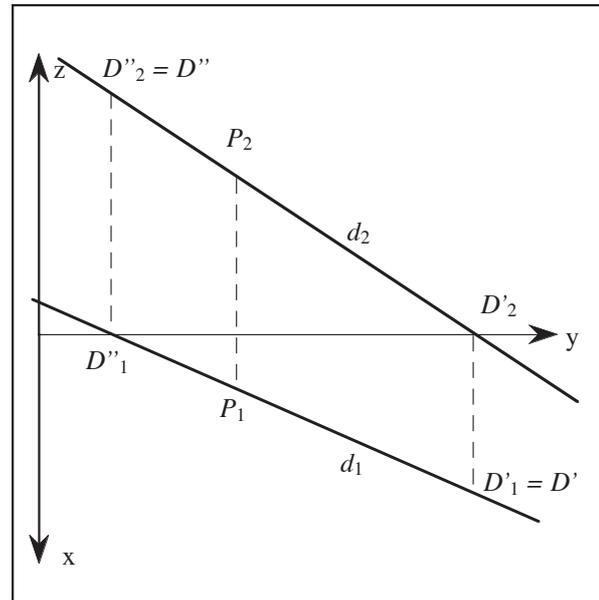


## §2. Représentation d'une droite en Monge

Perspective 3D

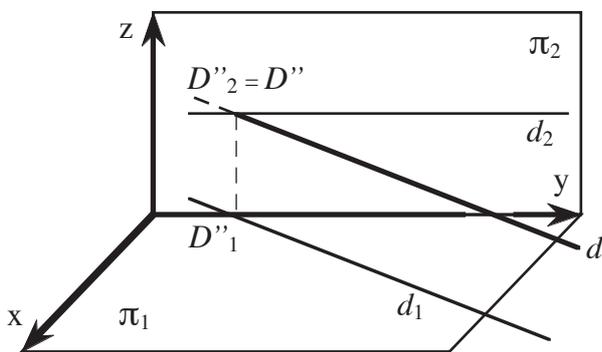


Projection de Monge

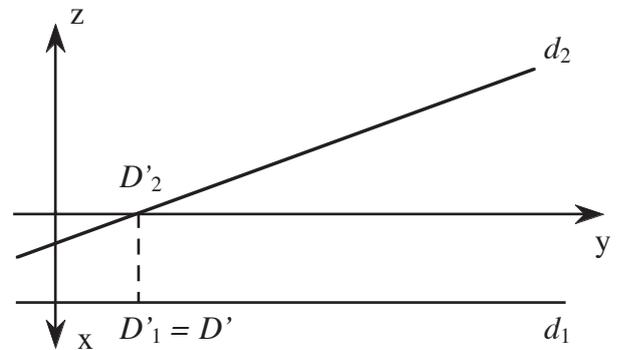
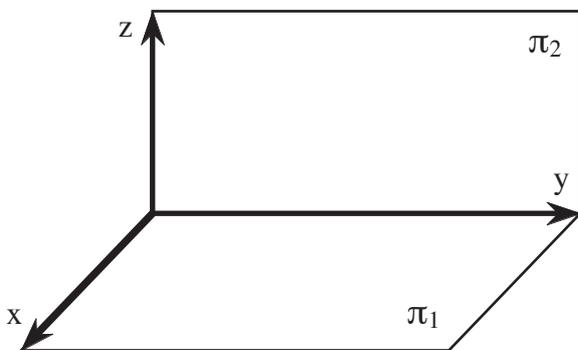


### Exercice 4.4:

Compléter une des deux représentations de ces droites particulières:



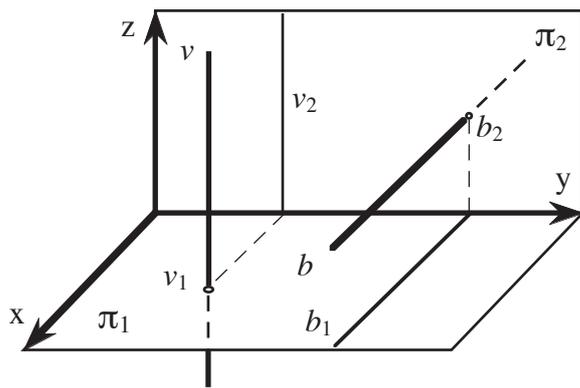
Une droite est **horizontale** si elle est parallèle au sol  $\pi_1$



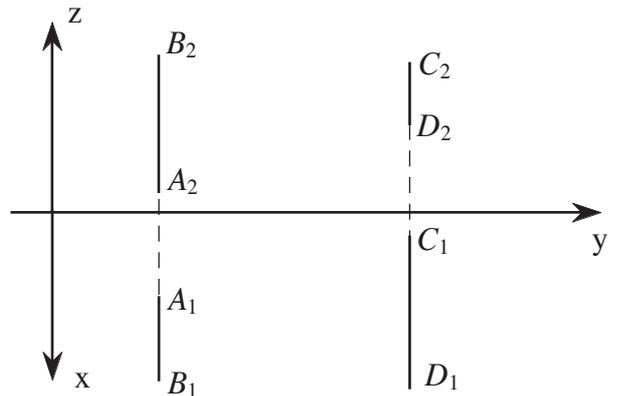
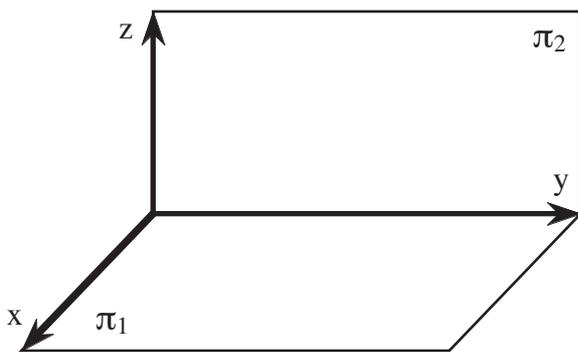
Une droite est **frontale** si elle est parallèle au mur  $\pi_2$

**Exercice 4.4 (suite):**

Compléter une des deux représentations de ces droites **particulères**:

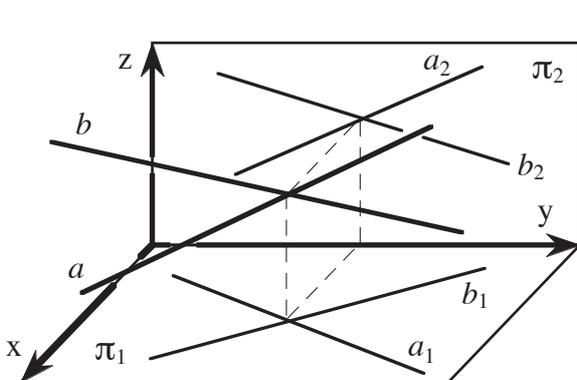


Une droite  $v$  est **verticale** si elle est perpendiculaire au sol  $\pi_1$   
 Une droite  $b$  est **de bout** si elle est perpendiculaire au mur  $\pi_2$



Une droite est de **profil** si elle est contenue dans un plan perpendiculaire à  $Oy$ .

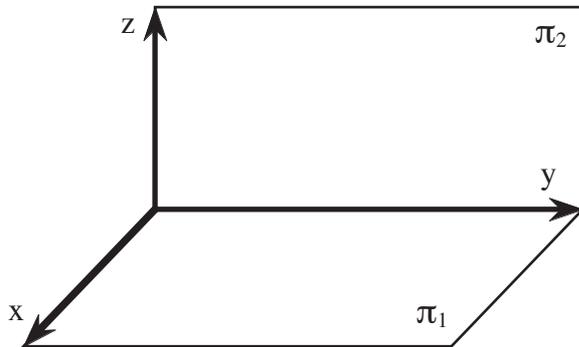
*Remarque: Les 2 projections de la droite ne suffisent à déterminer une droite de profil; on doit préciser les projections de deux points de la droites.*



On repère en projection de Monge que deux droites  $a$  et  $b$  sont **concourantes** si .....

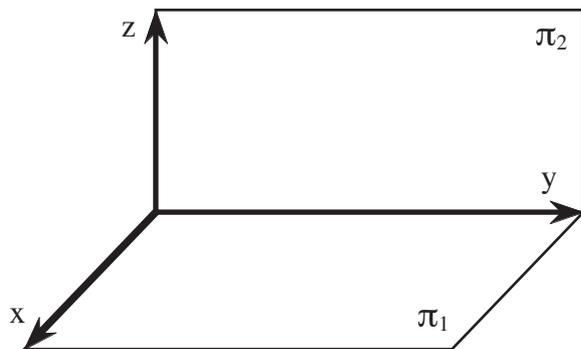
**Exercice 4.5:**

Construire dans les 2 représentations 2 droites  $a$  et  $b$  **parallèles**



On repère en projection de Monge que deux droites  $a$  et  $b$  sont **parallèles** si .....

Construire dans les 2 représentations 2 droites  $a$  et  $b$  **gauches**



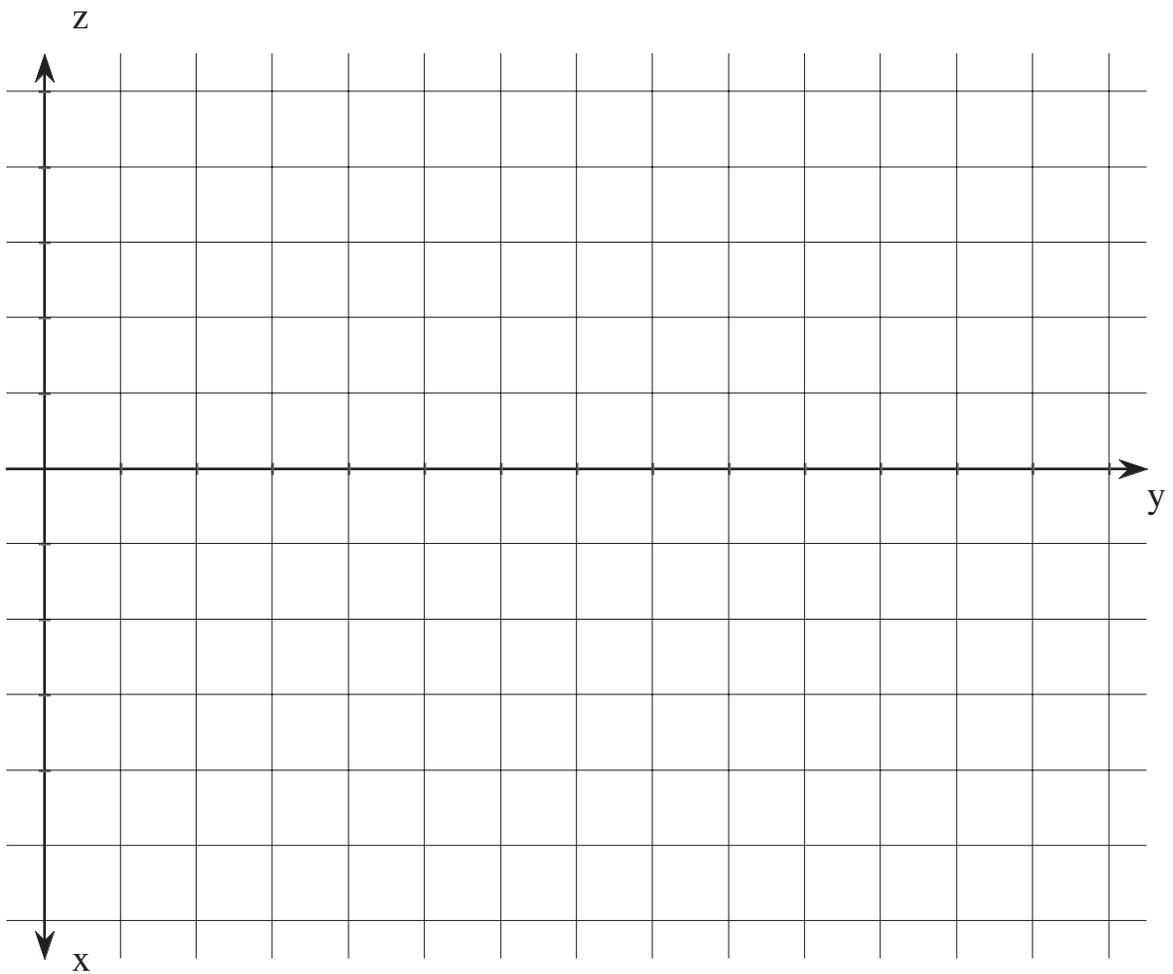
On repère en projection de Monge que deux droites  $a$  et  $b$  sont **gauches** si .....

**Exercice 4.6:**

Construire les 2 projections du triangle  $ABC$  dont le côté  $[AB]$  est horizontal,  $[BC]$  de profil et  $[AC]$  frontal.

On donne  $A(1,5 ; 10 ; 4)$  ,  $B(5 ; 6,5 ; ?)$  et  $C(? ; ? ; 2)$ .

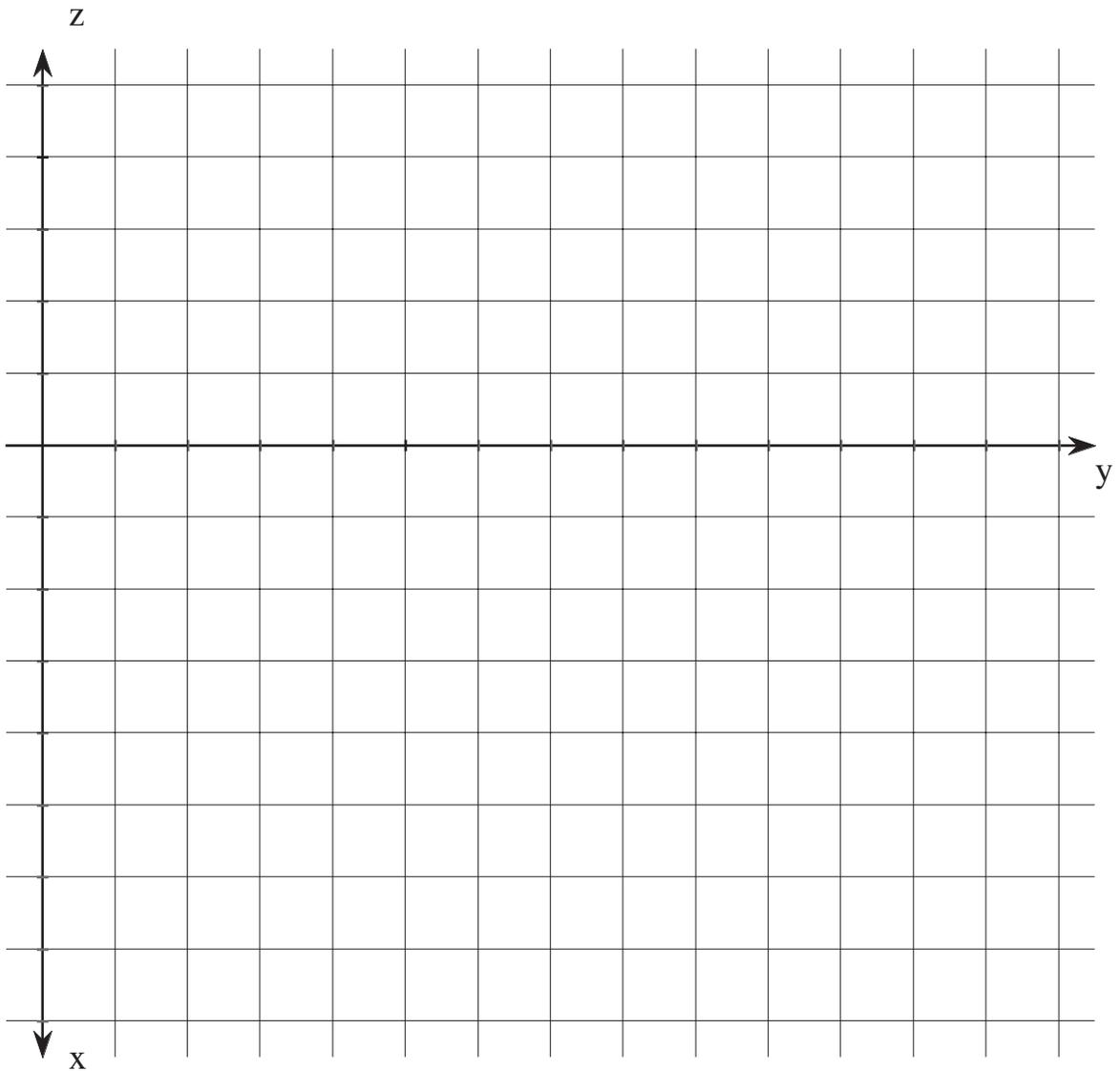
*Indication: commencez-ci dessous par une petite esquisse 3D*



**Exercice 4.7:**

Construire les 2 projections du triangle  $ABC$  dont le sommet  $A$  est situé sur l'axe des  $y$ ,  $[BC]$  de bout.  
On donne  $A(? ; 10 ; ?)$  ,  $B(2 ; 4 ; 5)$  et  $C(7 ; ? ; ?)$ .

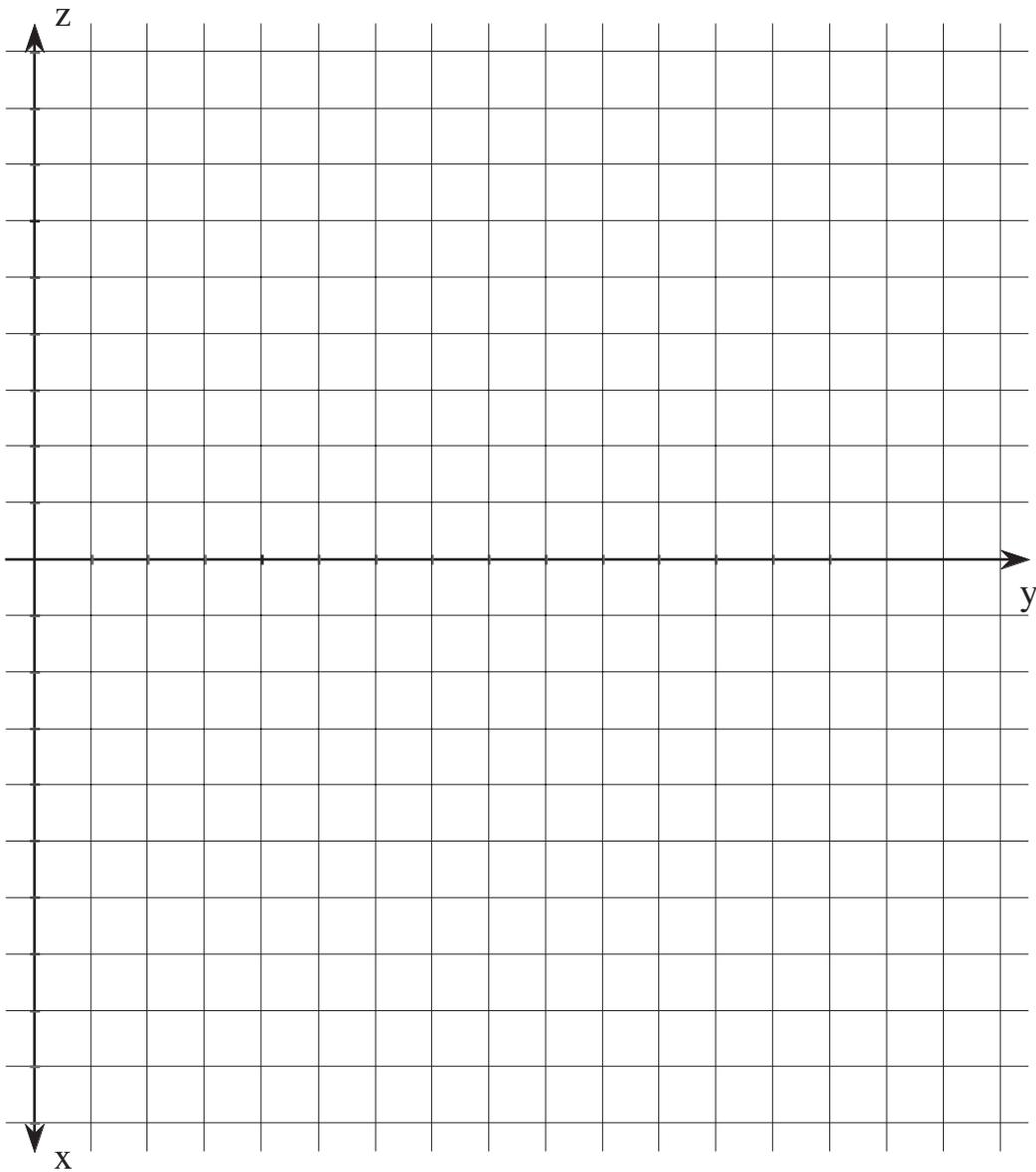
*Indication: commencez-ci dessous par une petite esquisse 3D*



**Exercice 4.8:**

Construire les 2 projections du triangle  $ABC$  dont le sommet  $A$  appartient à  $\pi_2$ , le côté  $[BC]$  est frontal, le côté  $[AB]$  est horizontal et le sommet  $C$  est situé sur l'axe  $Ox$ .  
On donne  $A(? ; 15 ; 8)$  ,  $B(9 ; 8 ; ?)$  et  $C(? ; ? ; ?)$ .

*Indication: commencez-ci dessous par une petite esquisse 3D*

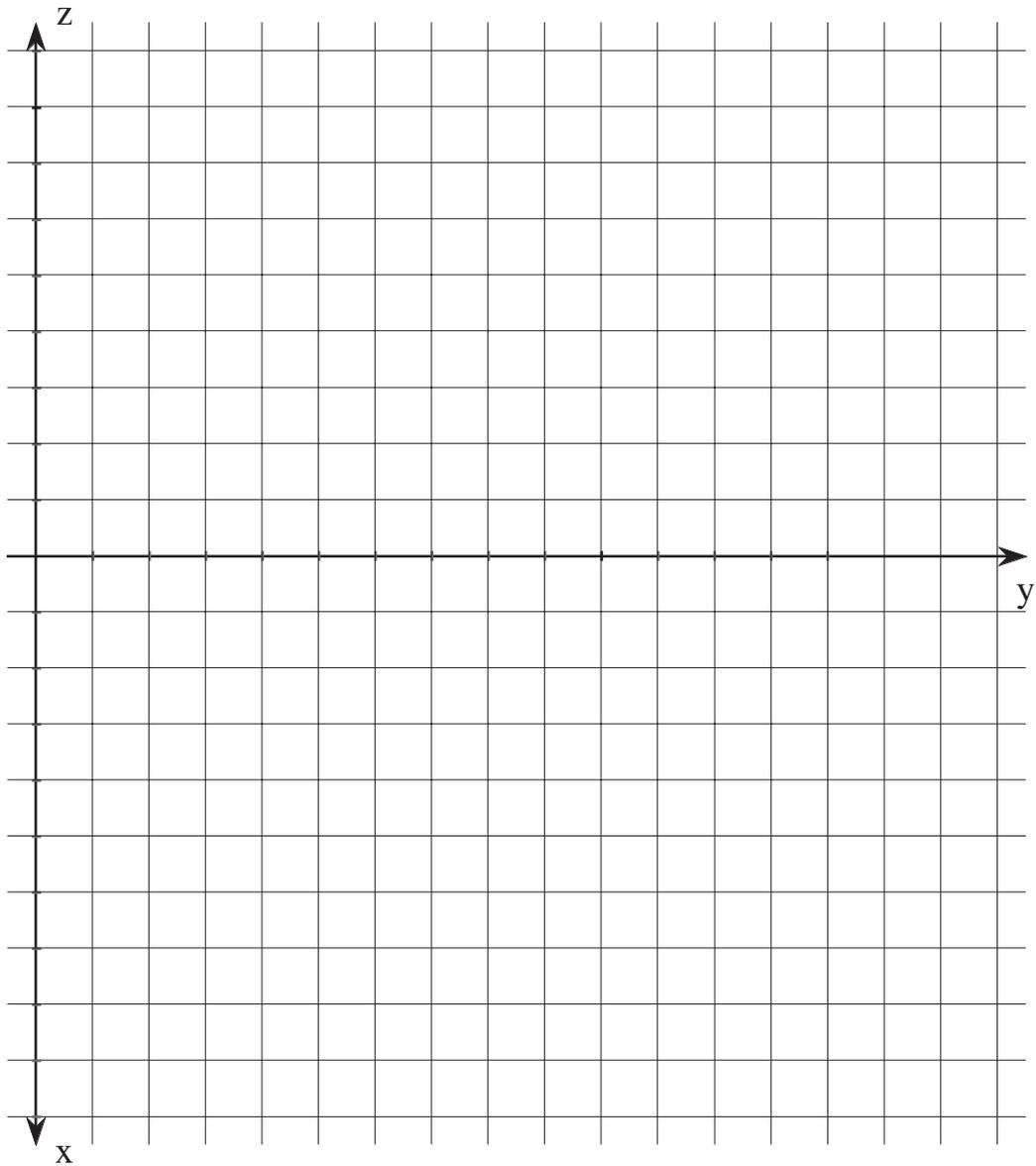


**Exercice 4.9:**

Construire les deux projections d'un quadrilatère **plan**  $ABCD$  dont on donne les coordonnées

$$A(3 ; 12 ; 7) , B(9 ; 9 ; 2) , C(7 ; 4 ; 1) \text{ et } D(2 ; 2 ; ?).$$

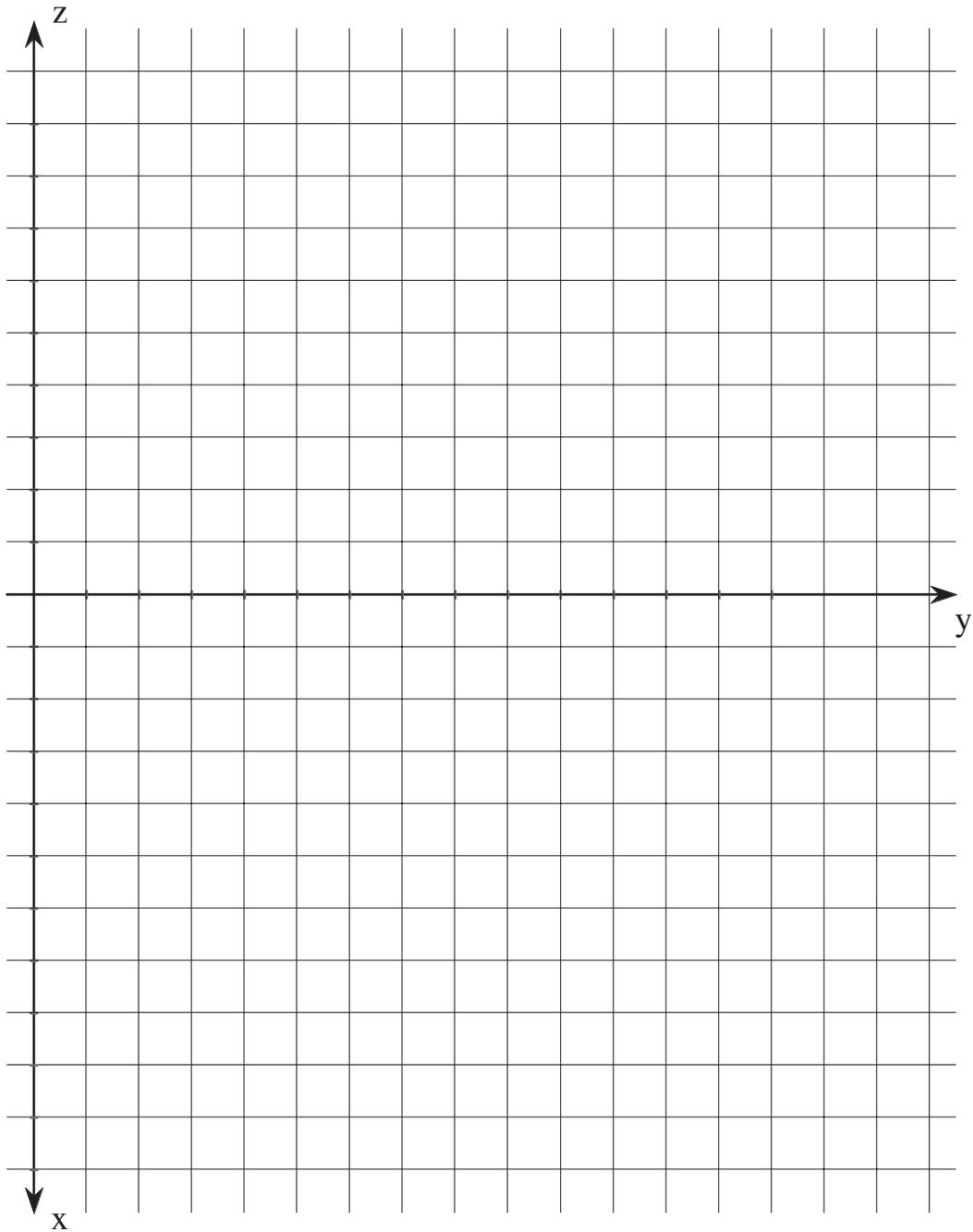
*Indication: commencez-ci dessous par une petite esquisse 3D*



**Exercice 4.10:**

Déterminer les deux projections d'un tétraèdre  $ABCD$ :  $A(10 ; 10 ; 7)$  ,  $B(4 ; 3 ; 10)$  ,  $C(7 ; 4 , 3)$  et  $D(1 ; 7 ; 2)$ .

*(Attention à la visibilité)*

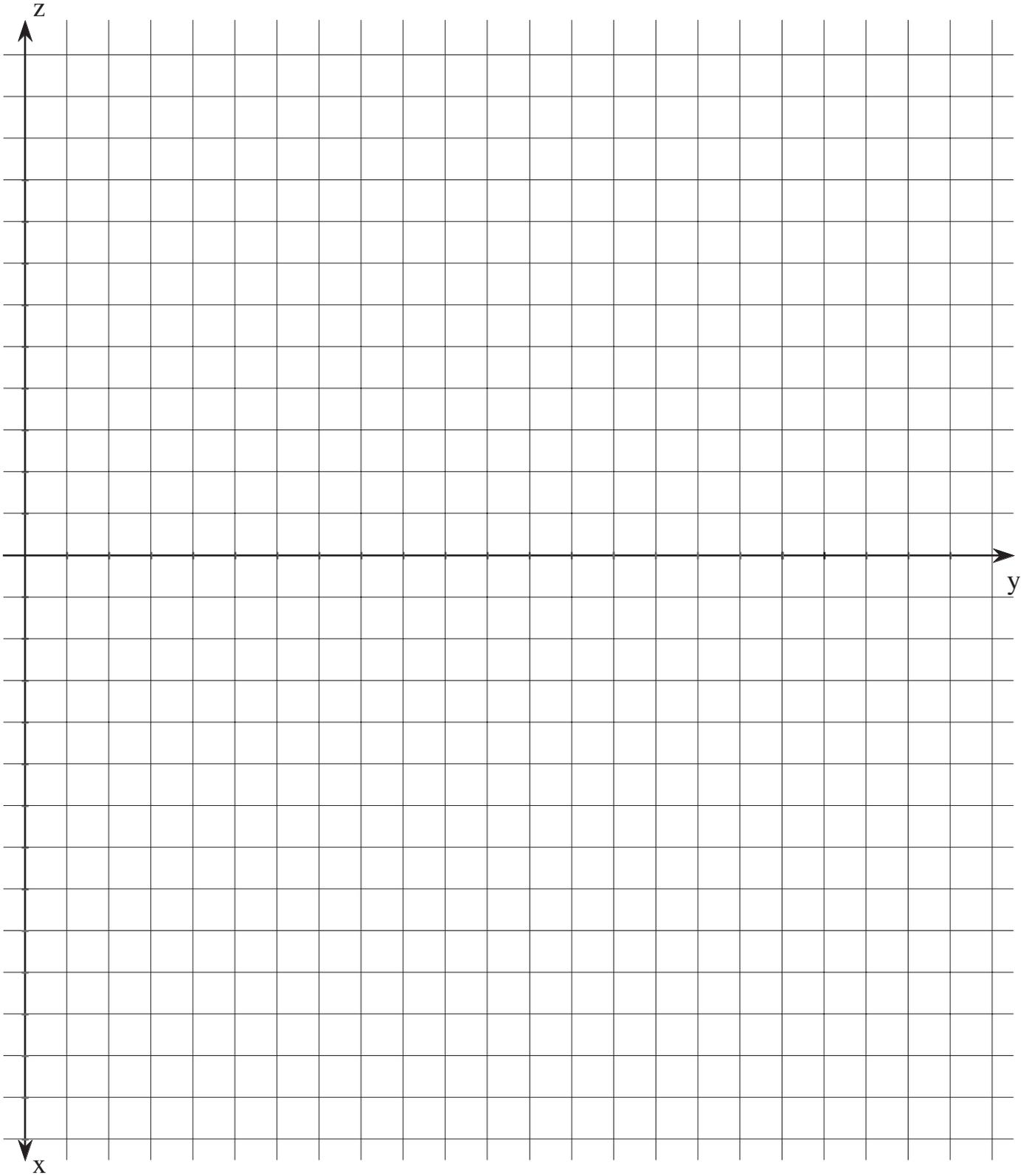


**Exercice 4.11:**

Déterminer les deux projections d'un parallélépipède  $ABCDEFGH$  dont la base  $ABCD$  est situé dans le plan  $\pi_1$ .

Dessiner les arêtes cachées en traitillé

$A(5 ; 18 ; 0)$  ,  $B(9 ; 13 ; 0)$  ,  $C(13 ; 15 ; 0)$  ,  $D(9 ; 20 ; 0)$  et  $E(1 ; 8 ; 10)$

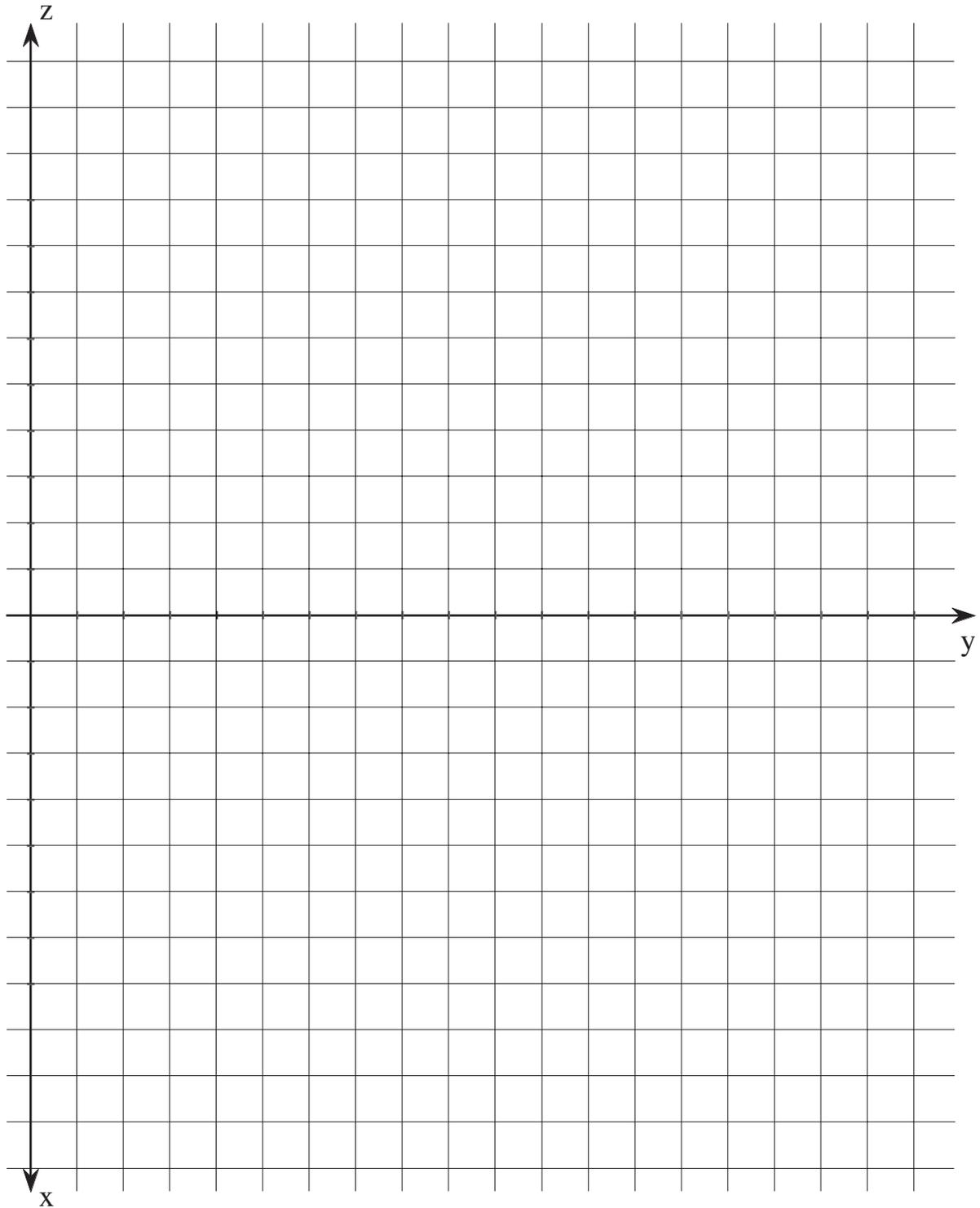


**Exercice 4.12:**

Déterminer les deux projections d'un cône de révolution dont la base est située dans le plan  $\pi_1$ .

Cercle de base: centre  $M(7 ; 8 ; 0)$  , rayon 5 , sommet  $S(? ; ? ; 12)$

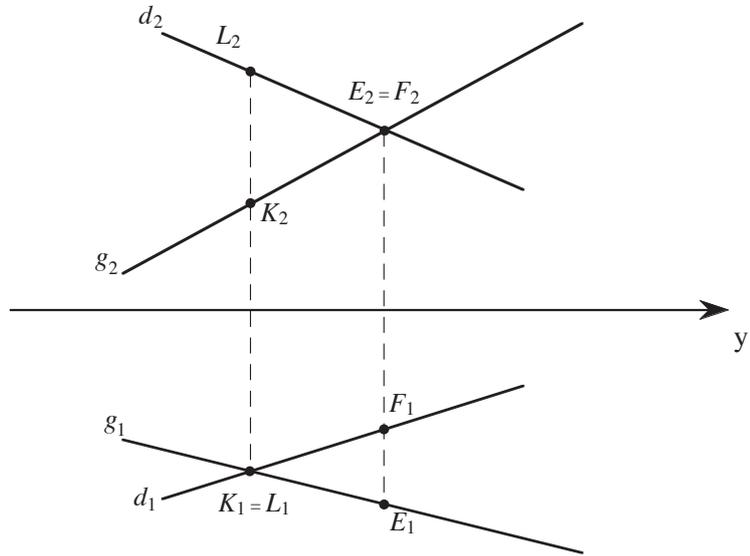
Se donner ensuite la première projection  $P_1$  d'un point  $P(10 ; 10 ; ?)$  appartenant à la surface, puis construire la 2ème projection de ce point.



**Exercice 4.13:**

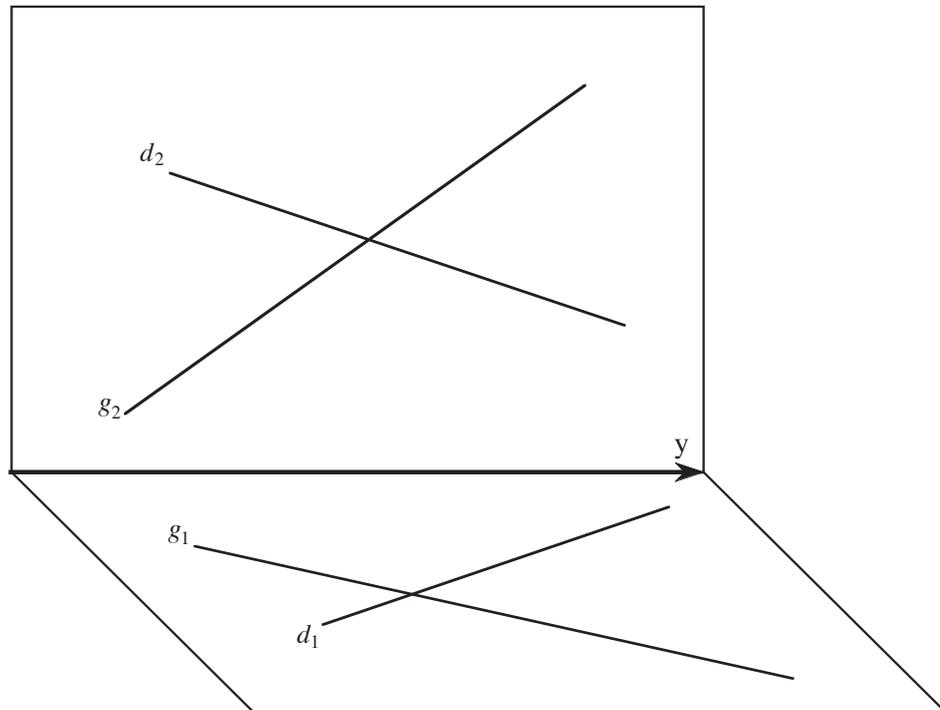
A l'aide de la projection de Monge suivante, répondre en justifiant aux questions suivantes:

- a) Les droites  $d$  et  $g$  sont-elles concourantes ?
- b) Lequel des points  $E$  et  $F$  est le plus proche de l'observateur ?
- c) Lequel des points  $E$  et  $F$  est le plus haut
- b) Lequel des points  $K$  et  $L$  est le plus proche de l'observateur ?
- c) Lequel des points  $K$  et  $L$  est le plus haut



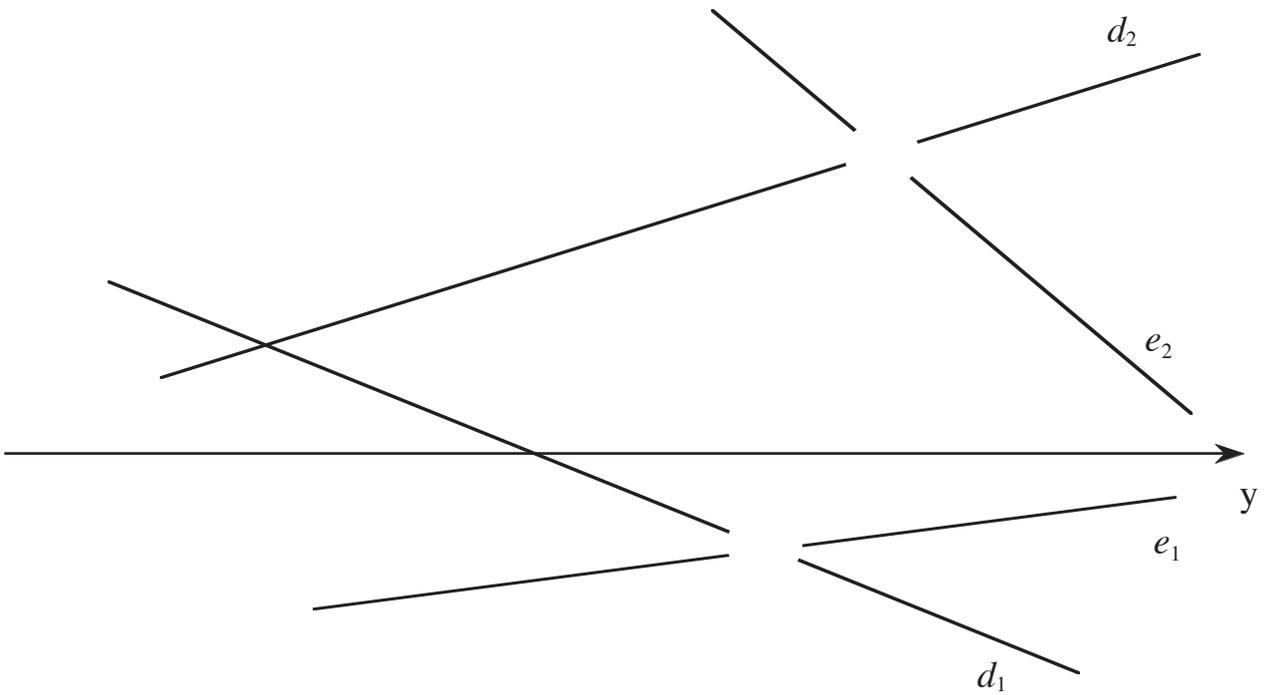
On a représenté ci-dessous la même situation en *perspective 3D*.  
 Compléter la figure pour faire apparaître les 2 droites  $d$  et  $g$ , les points  $E, F, K, L$

Cette figure confirme-t-elle vos réponses ci-dessus ?

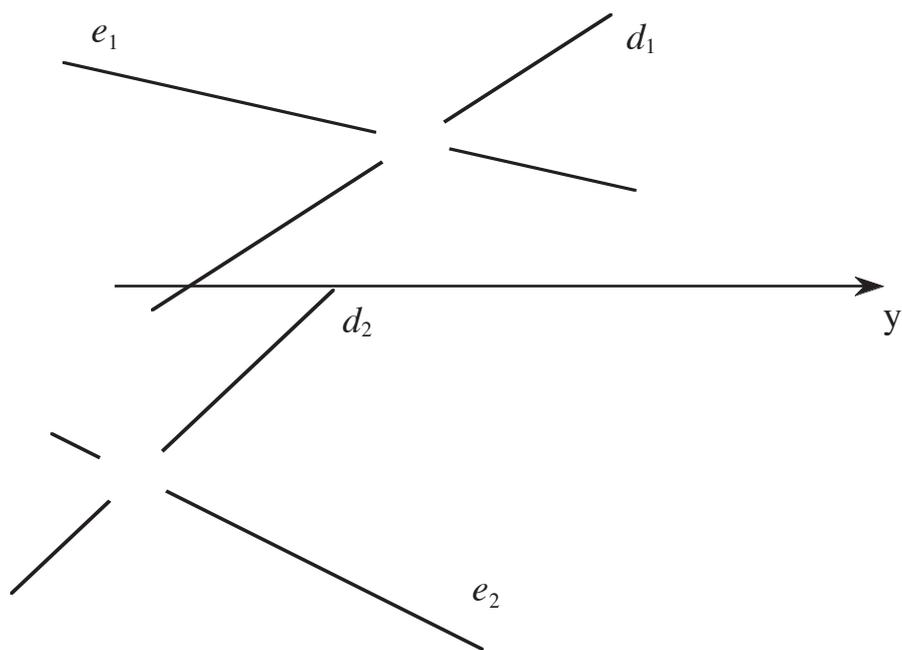


**Exercice 4.14:**

Déterminer la visibilité des droites  $d$  et  $e$ :

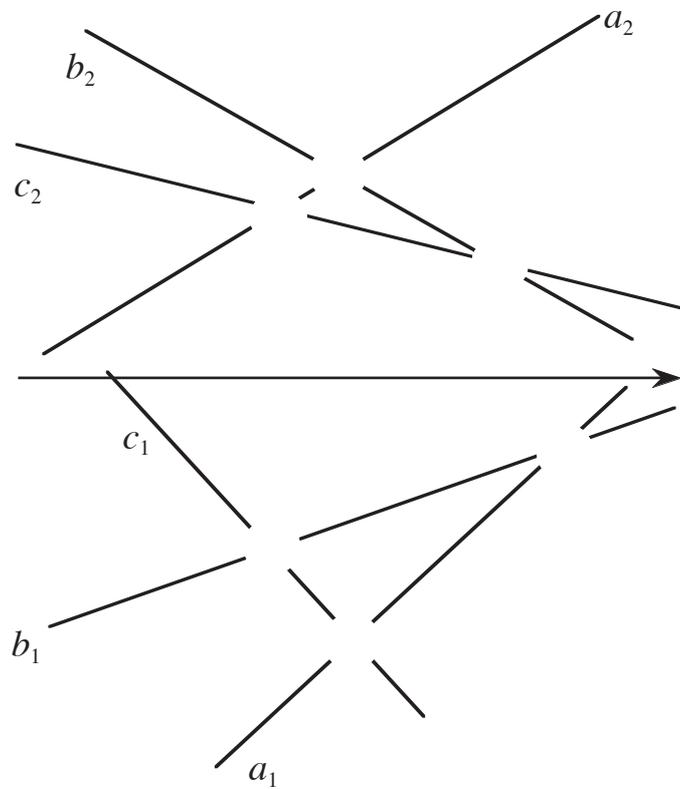


Même question:

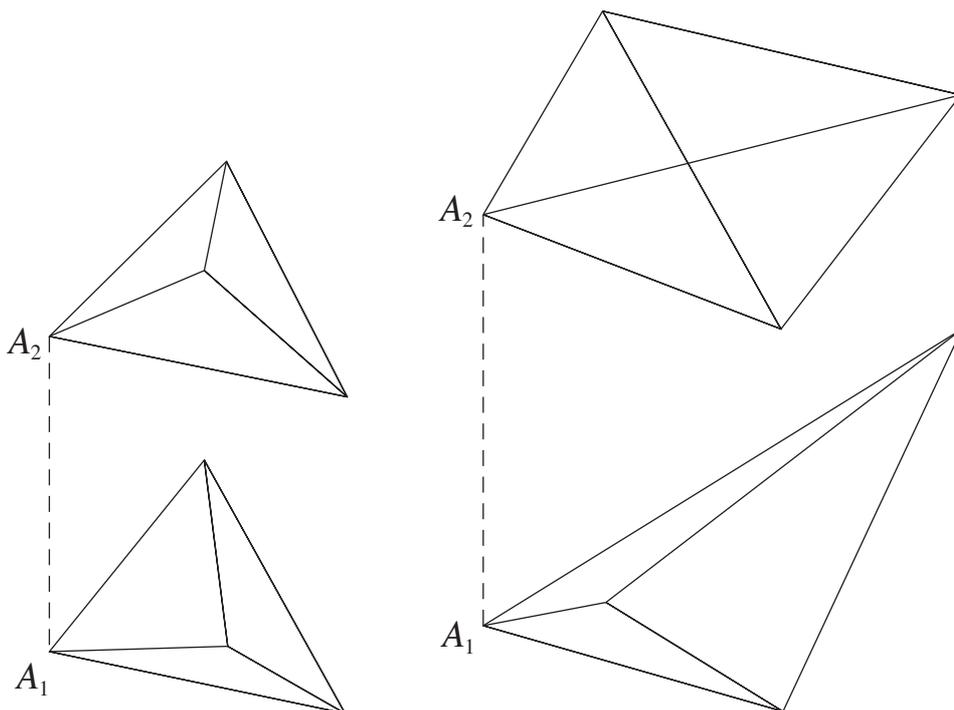


**Exercice 4.15:**

Déterminer la visibilité des droites  $a$ ,  $b$  et  $c$ :

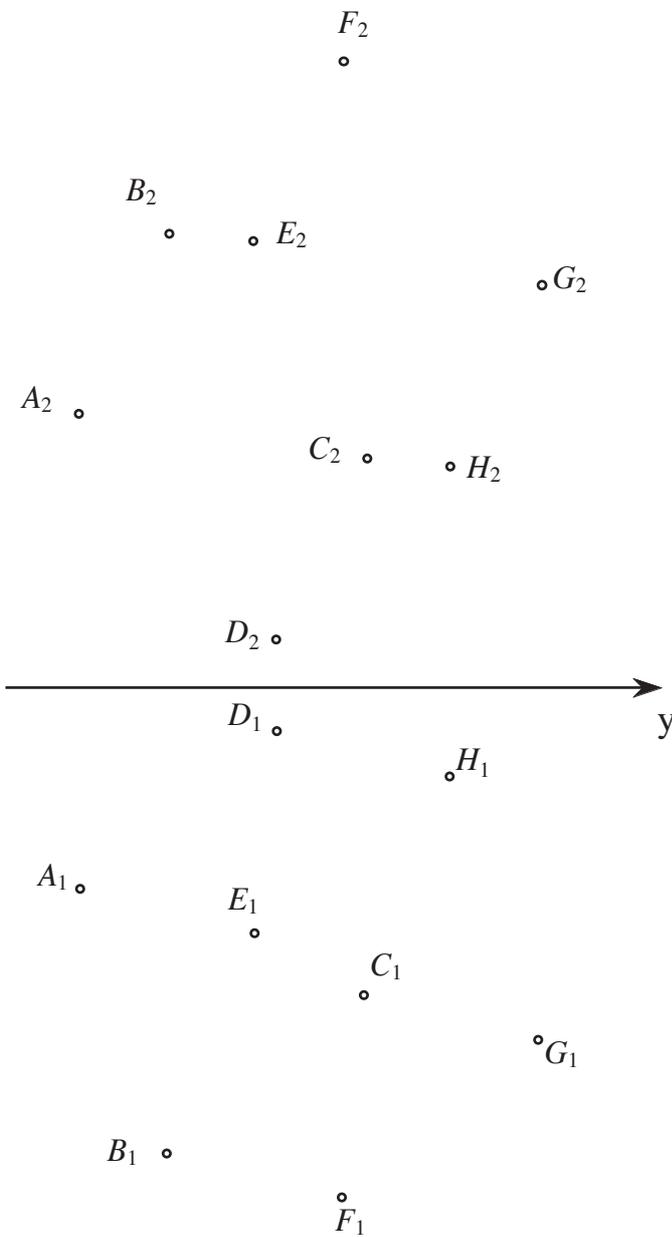
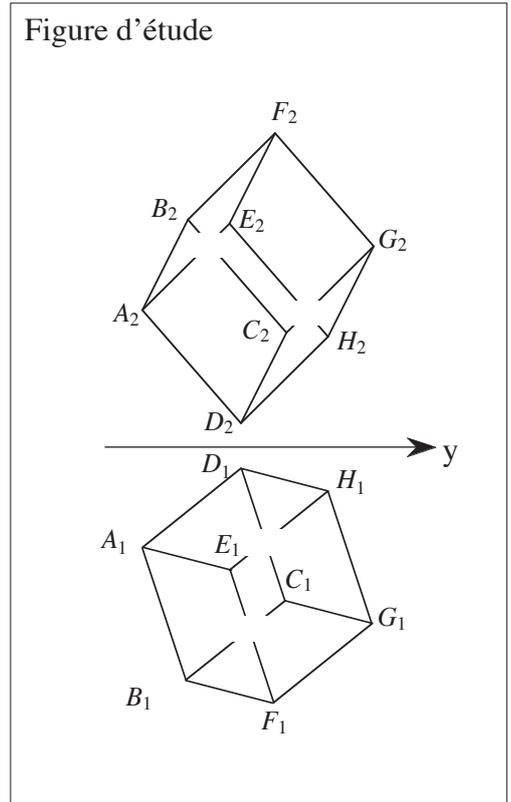


Représenter la visibilité des deux tétraèdres proposés ci-dessous en projection de Monge:



**Exercice 4.16:**

A l'aide de la figure d'étude, déterminer la position respective des différentes arêtes afin de pouvoir représenter la visibilité (traitillé pour les arêtes cachées) de la projection de Monge du parallélépipède  $ABCDEFGH$  ci-dessous



**Exercice 4.17:**

On donne les deux projections de Monge d'un prisme  $ABCDEFGH$ . A l'aide de traitillés, indiquer les visibilitées dans chaque projection

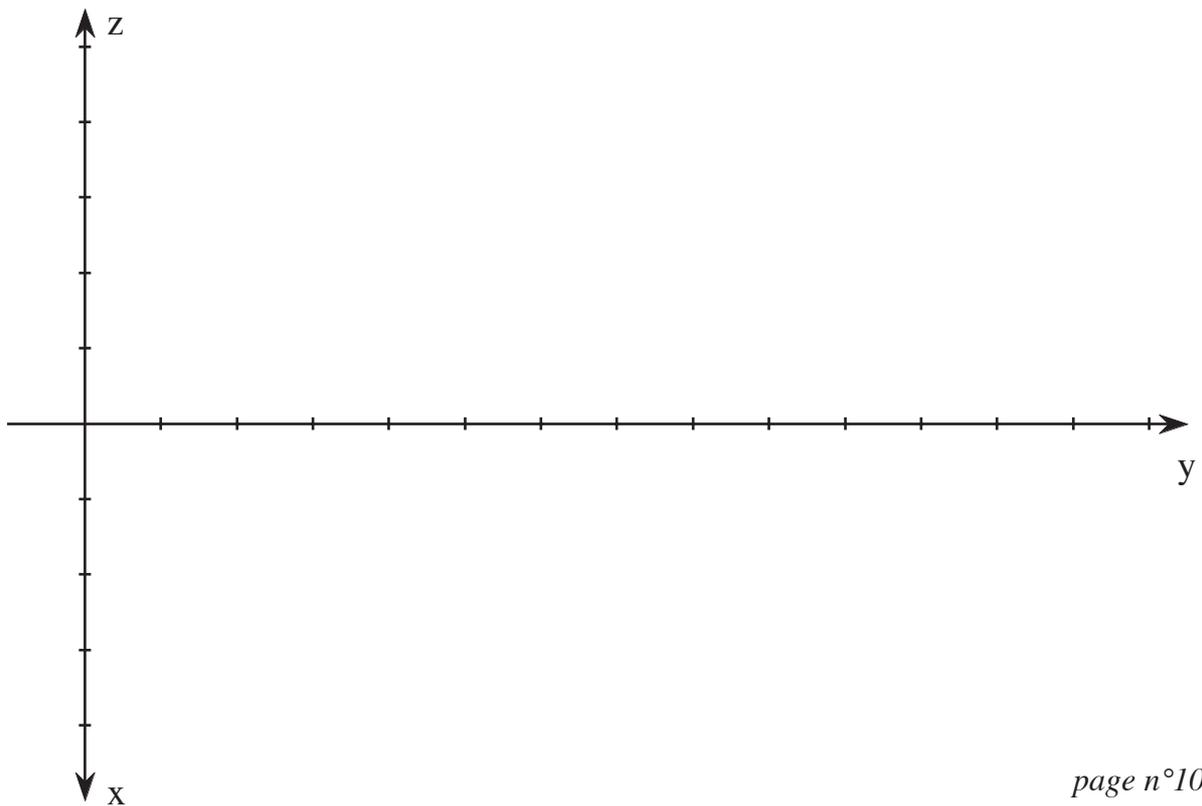
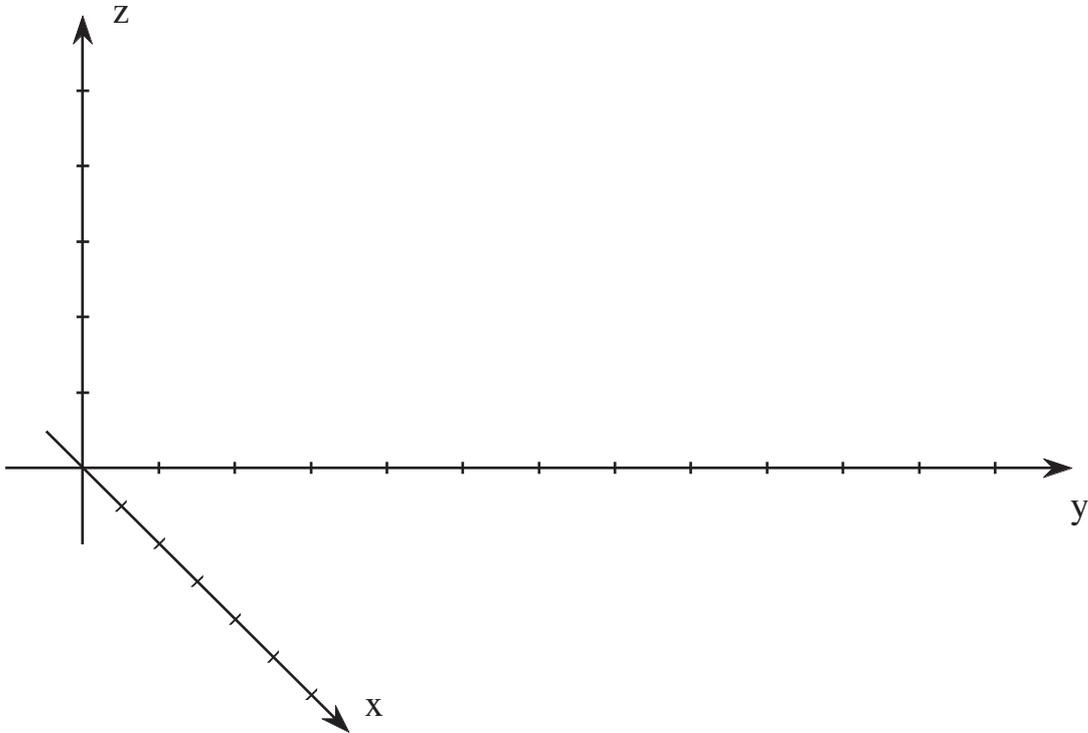


**Exercice 4.18 :**

La droite  $d$  passe par  $A(3 ; 4 ; -2)$  et  $B(1 ; 8 ; 4)$ .

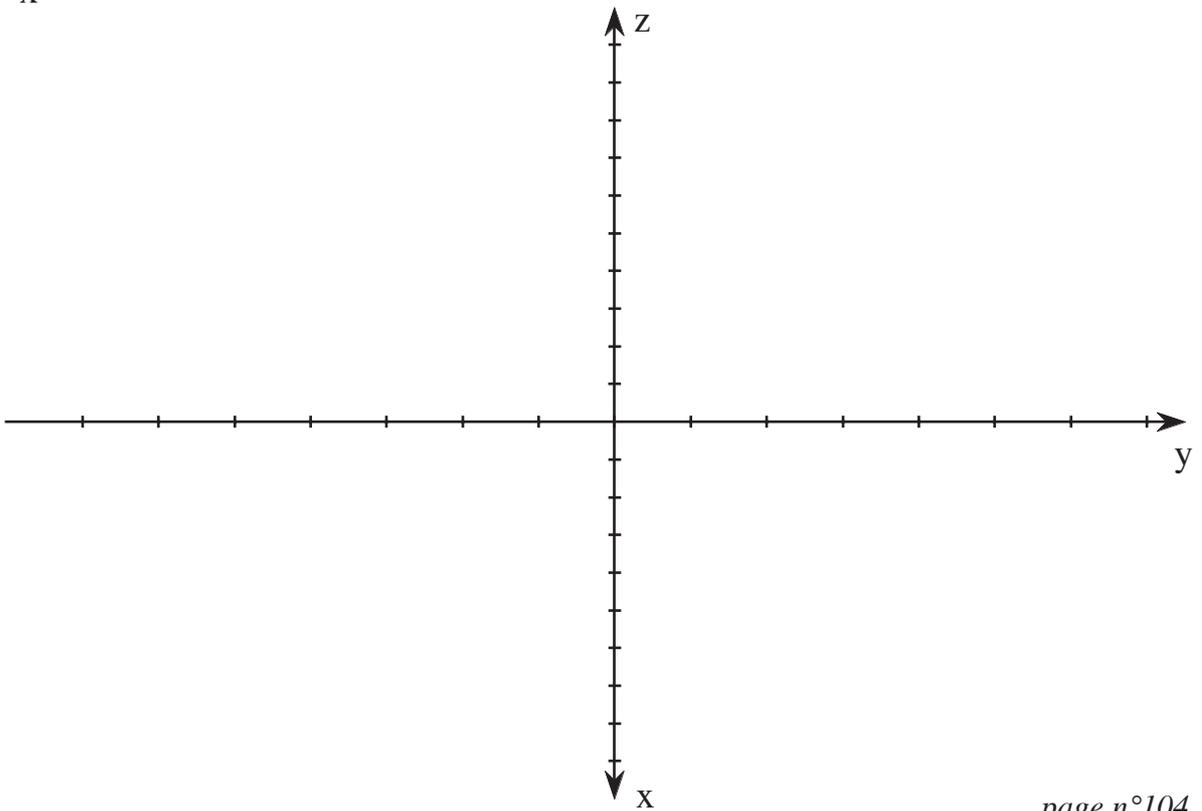
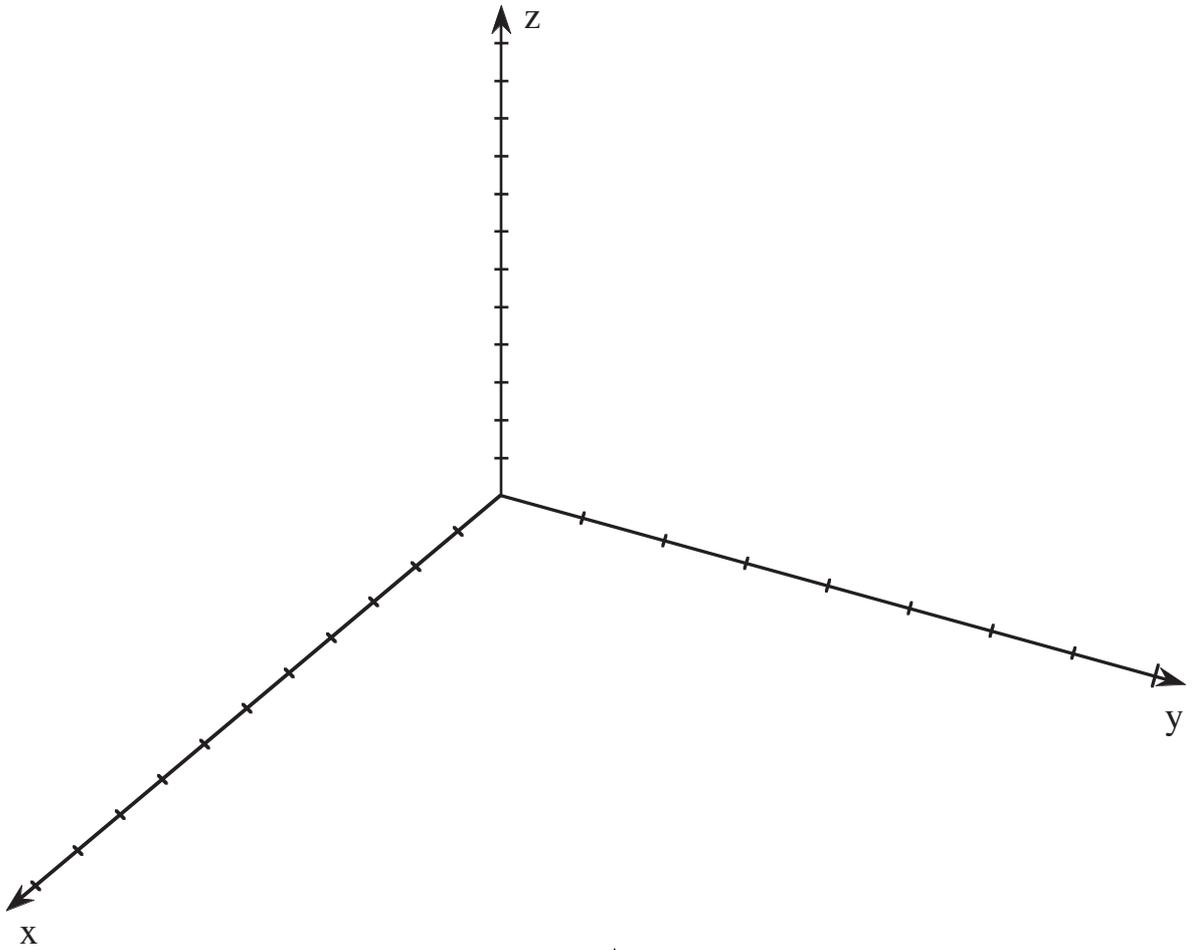
Représenter en axonométrie la droite  $d$ , ses projections sur le mur et le sol et en déduire ses traces  $D'$  et  $D''$  sur ces 2 plans.

Représenter cette même situation en projection de Monge

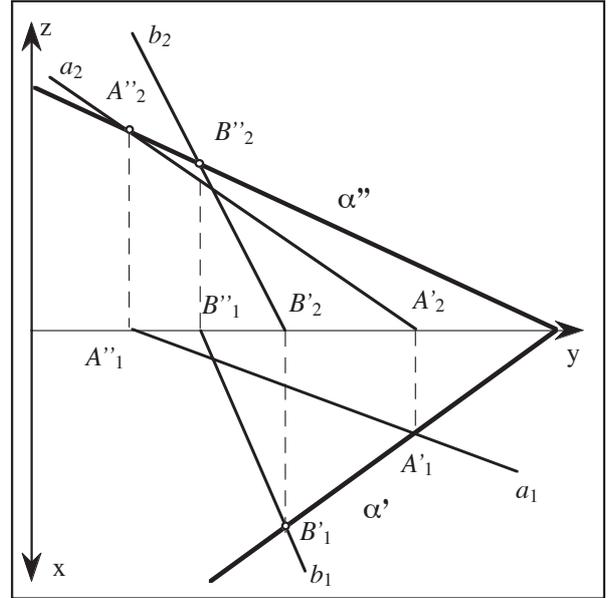
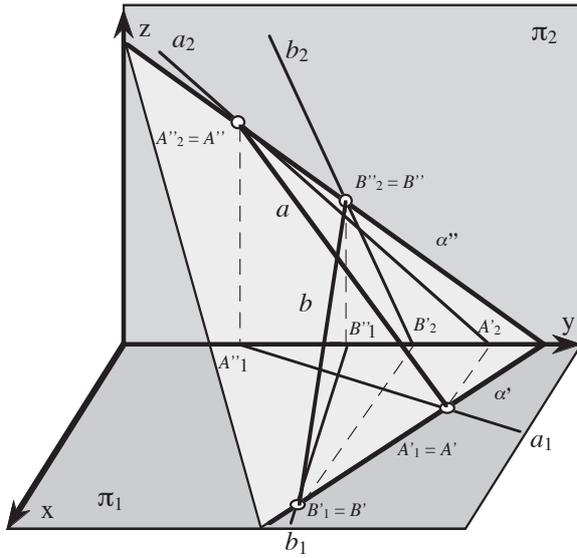


**Exercice 4.18 (suite):**

Mêmes questions avec  $A(4 ; -4 ; 6)$  et  $B(-4 ; 2 ; 1)$ .



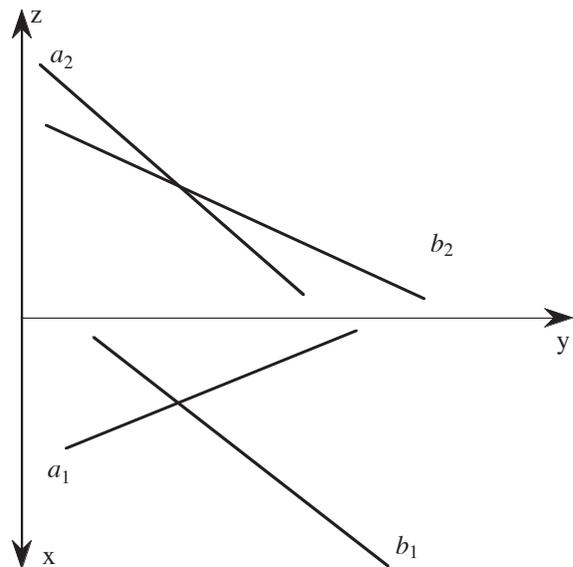
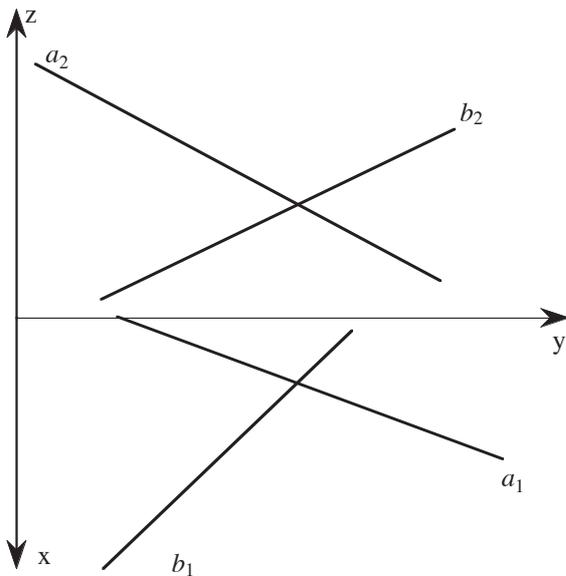
### §3. Représentation d'un plan en Monge



En projection de Monge (mais également en axonométrie), un plan  $\alpha$  est représenté par ses traces  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  dans les plan Oxy, Oyz. Dans quelques rares cas, on peut être amené à utiliser la 3<sup>ème</sup> trace.

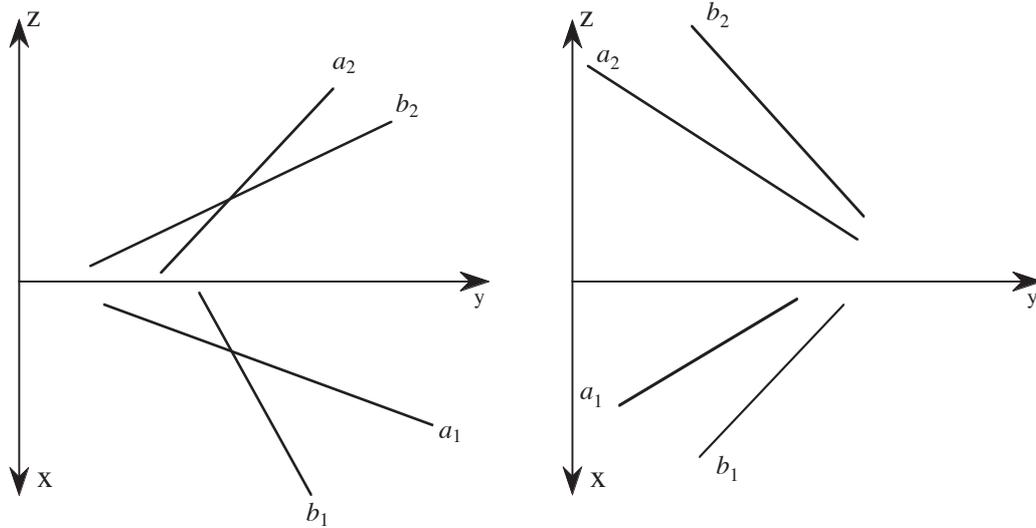
#### Exercice 4.19:

Vérifier que les droites  $a$  et  $b$  définissent un plan, puis construire ses traces  $\alpha'$  et  $\alpha''$



**Exercice 4.20:**

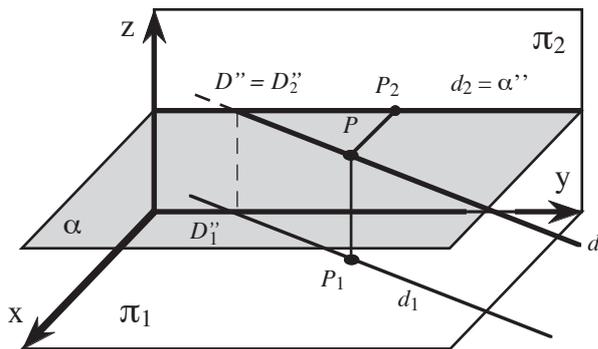
Construire, si elles existent, les traces du plan formé par les deux droites.



**Exercice 4.21:**

Compléter l'une ou l'autre des représentations (le plan, la droite  $d$ , le point  $P$ , les projections et traces)

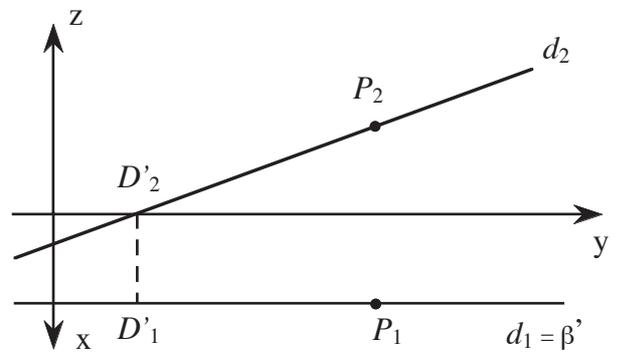
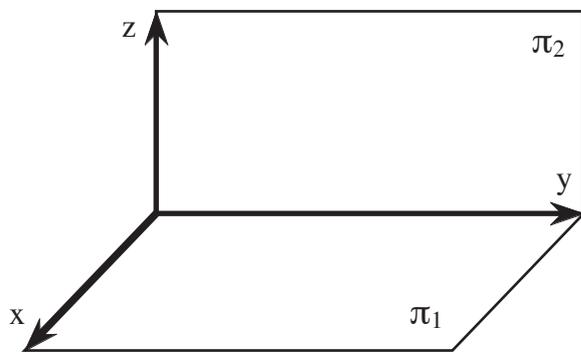
**Perspective 3D**



**Projection de Monge**



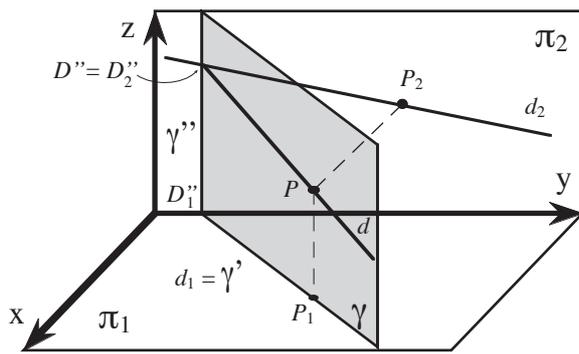
Un plan  $\alpha$  est **horizontal** s'il est parallèle au sol  $\pi_1$



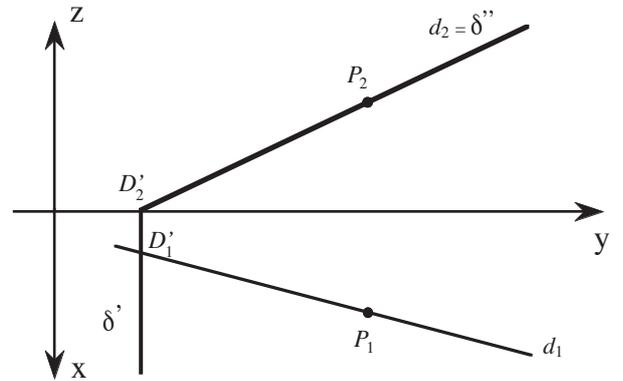
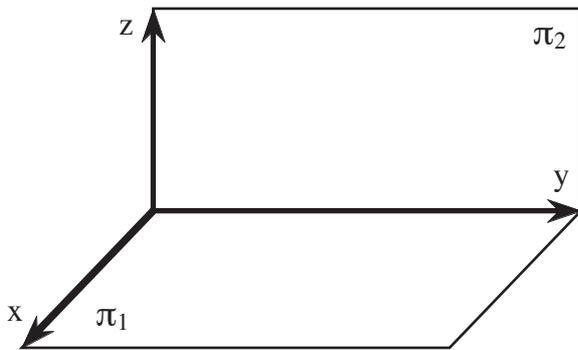
Un plan  $\beta$  est **frontal** s'il est parallèle au mur  $\pi_2$

**Exercice 4.21 (suite):**

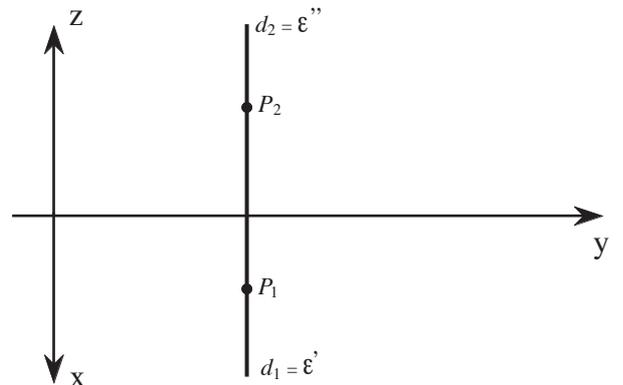
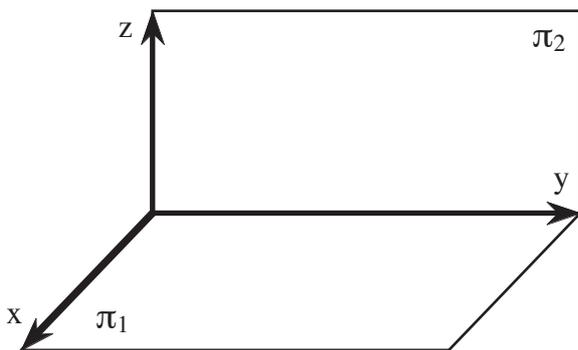
Compléter l'une ou l'autre des représentations (le plan, la droite  $d$ , le point  $P$ , les projections et traces)



Un plan  $\gamma$  est **vertical** s'il est perpendiculaire au sol  $\pi_1$



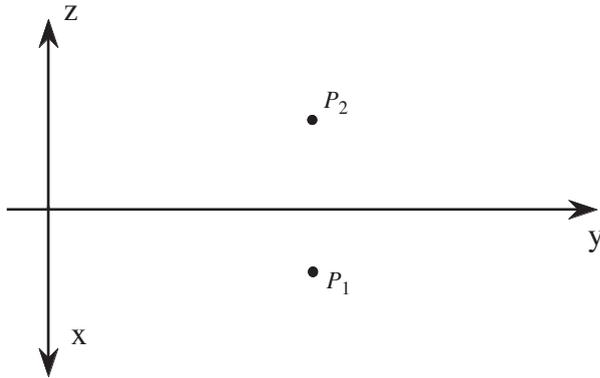
Un plan  $\delta$  est **de bout** s'il est perpendiculaire au mur  $\pi_2$



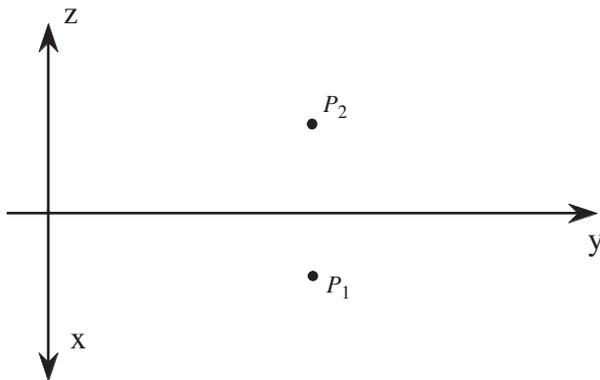
Un plan  $\epsilon$  est **de profil** s'il est perpendiculaire à  $Oy$

**Exercice 4.22:**

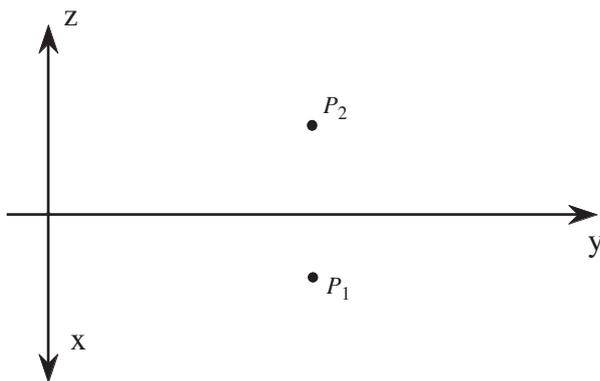
Construire les traces d'un plan  $\alpha$  vertical et d'un plan  $\beta$  de bout, les deux contenant le point  $P$



Construire les traces d'un plan  $\alpha$  horizontal et d'un plan  $\beta$  de profil, les deux contenant le point  $P$

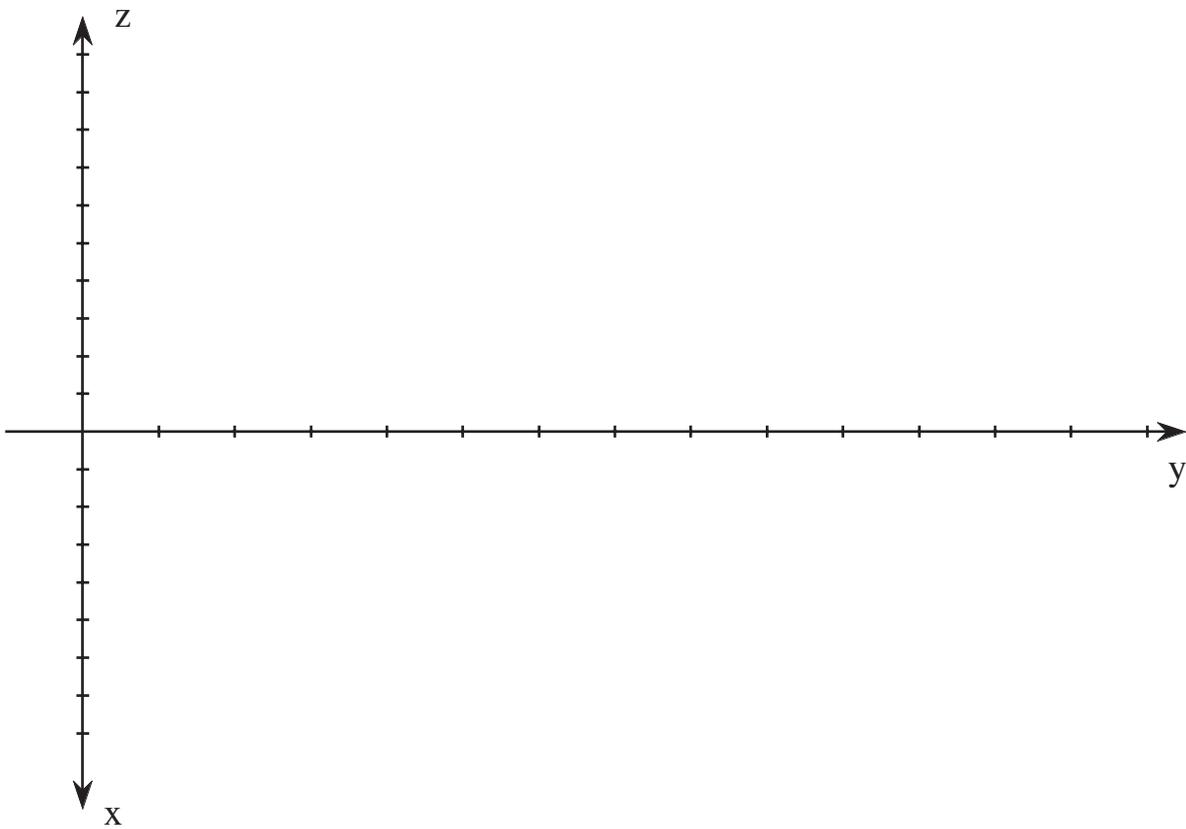
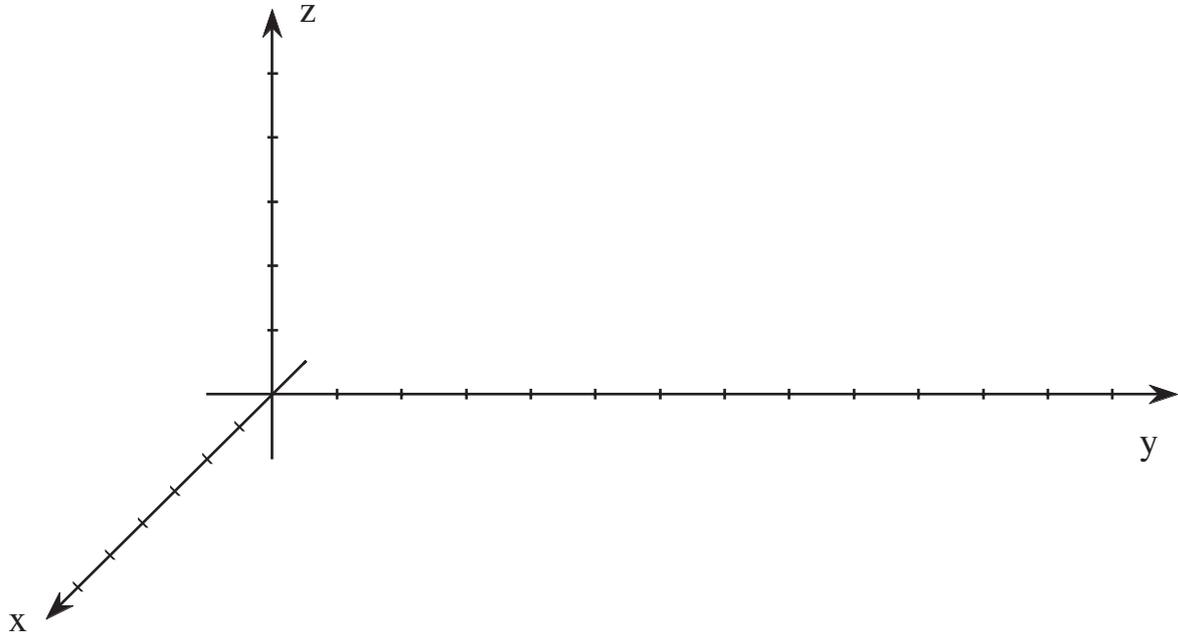


Construire les traces d'un plan  $\alpha$  frontal et d'un plan  $\beta$  de bout, les deux contenant le point  $P$



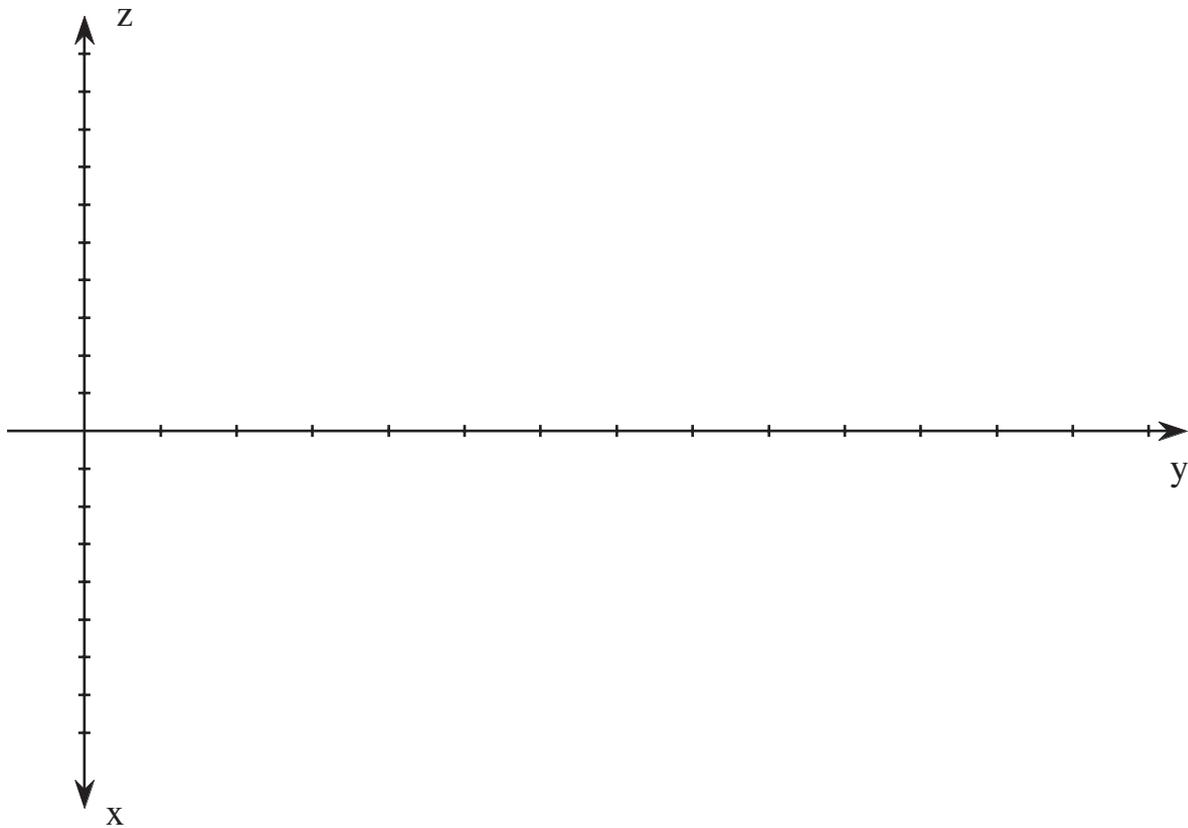
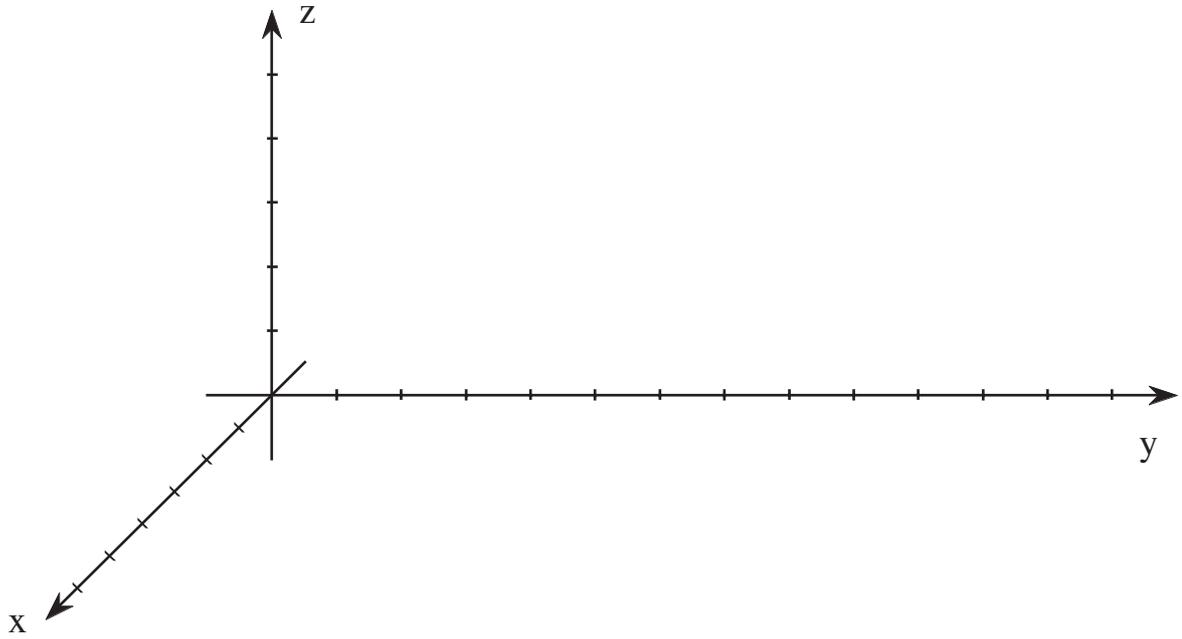
**Exercice 4.23:**

Construire en axonométrie, puis en Monge, les traces du plan passant par  $A(6 ; 6,5 ; 1,5)$ ,  $B(1 ; 7 ; 7)$  et  $C(1,5 ; 9,5 ; 4)$



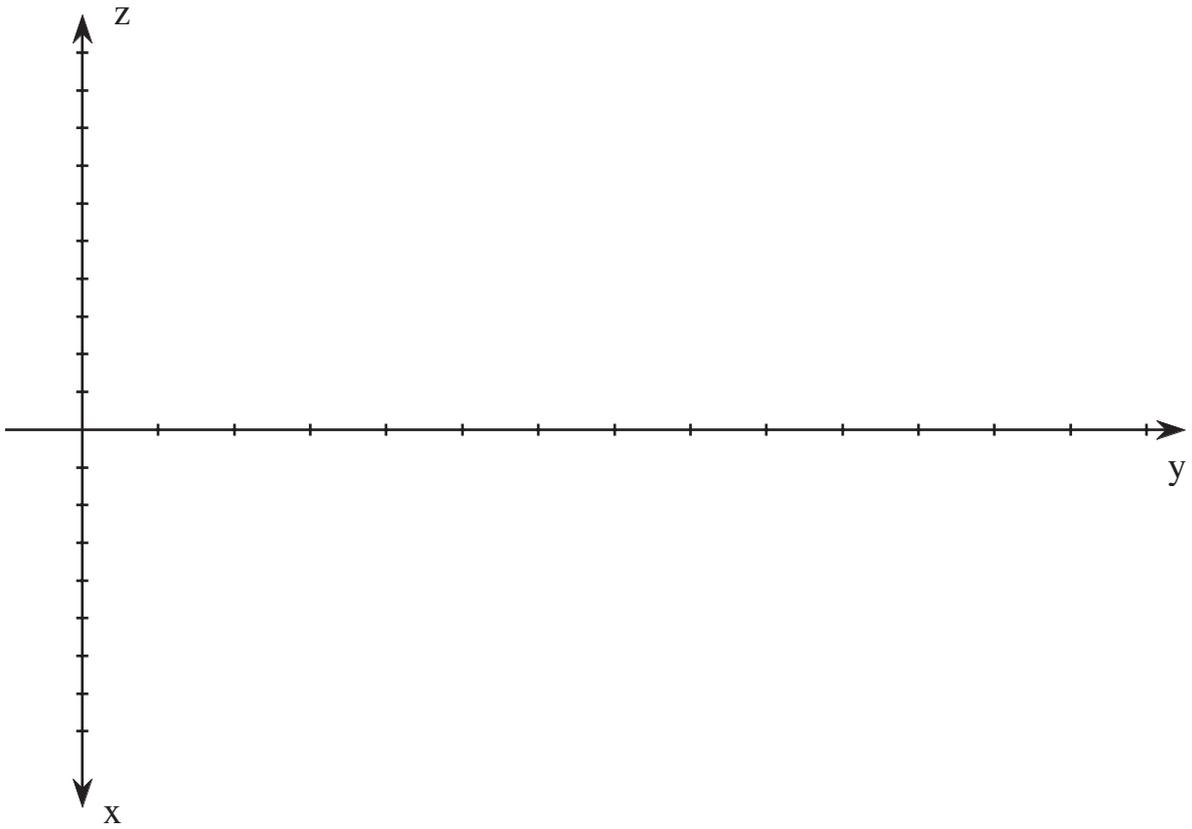
**Exercice 4.24:**

Construire en axonométrie, puis en Monge, les traces du plan passant par  $A(2 ; 4 ; 2)$  ,  $B(6 ; 1 ; 1)$  et  $C(2 ; 1 ; 4)$



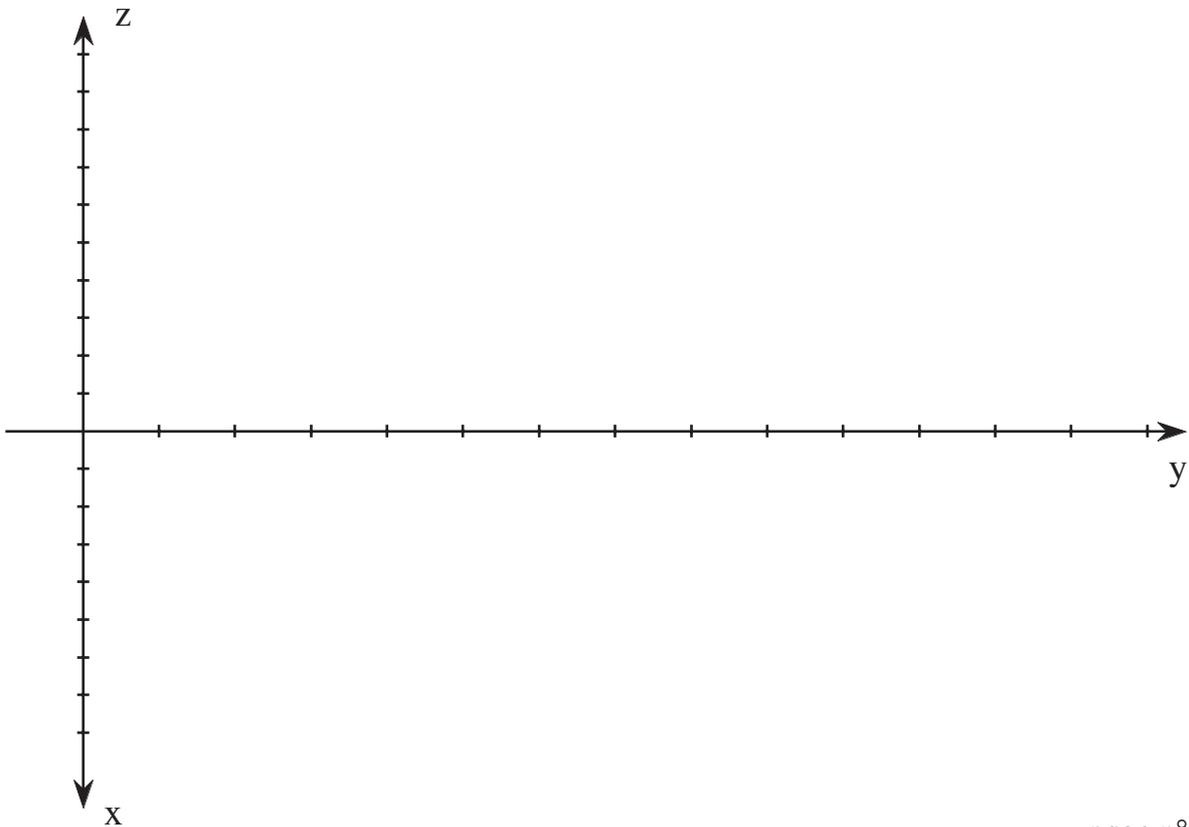
**Exercice 4.25:**

Construire les traces du plan passant par  $A(2 ; 3 ; 4)$  ,  $B(3 ; 7 ; 1)$  et  $C(3 ; 1 ; 8)$



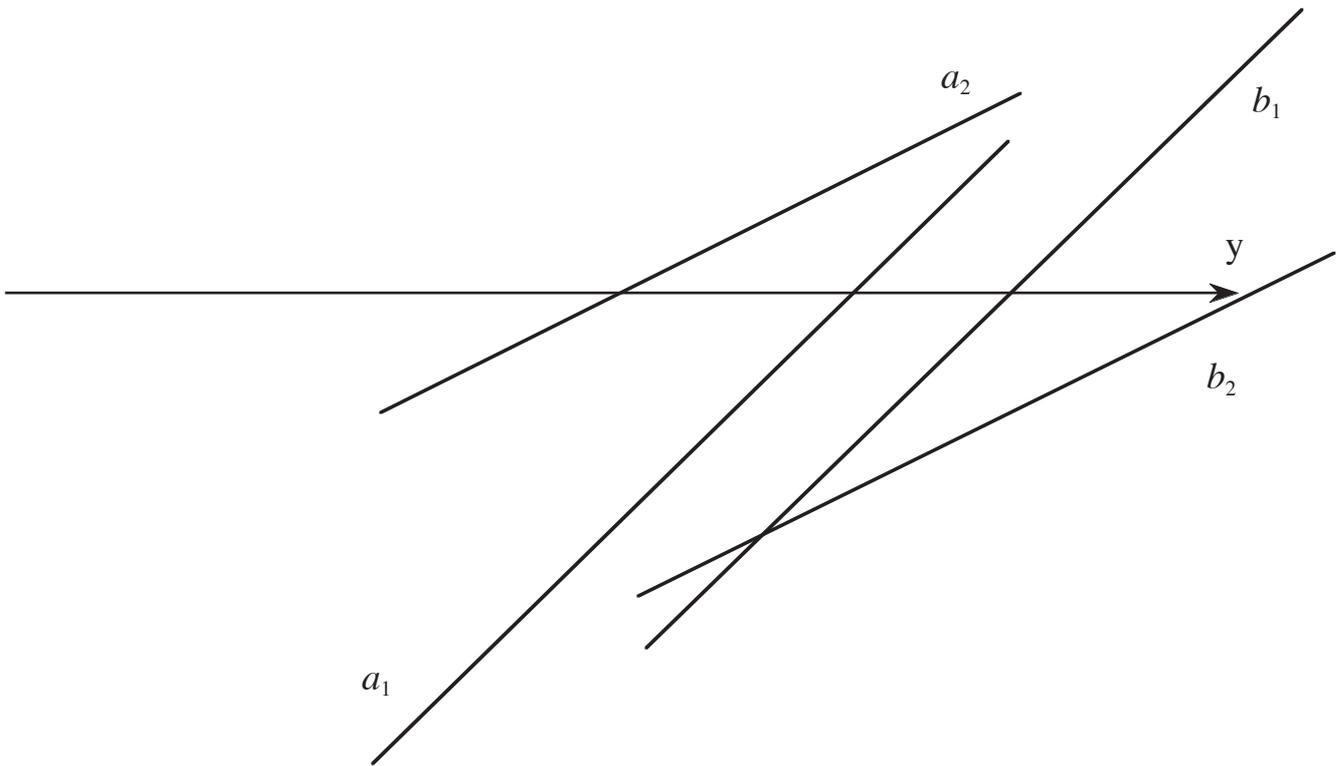
**Exercice 4.26:**

Même consigne avec  $A(2 ; 3 ; 4)$  ,  $B(3 ; 7 ; 1)$  et  $C(3 ; 1 ; 1)$

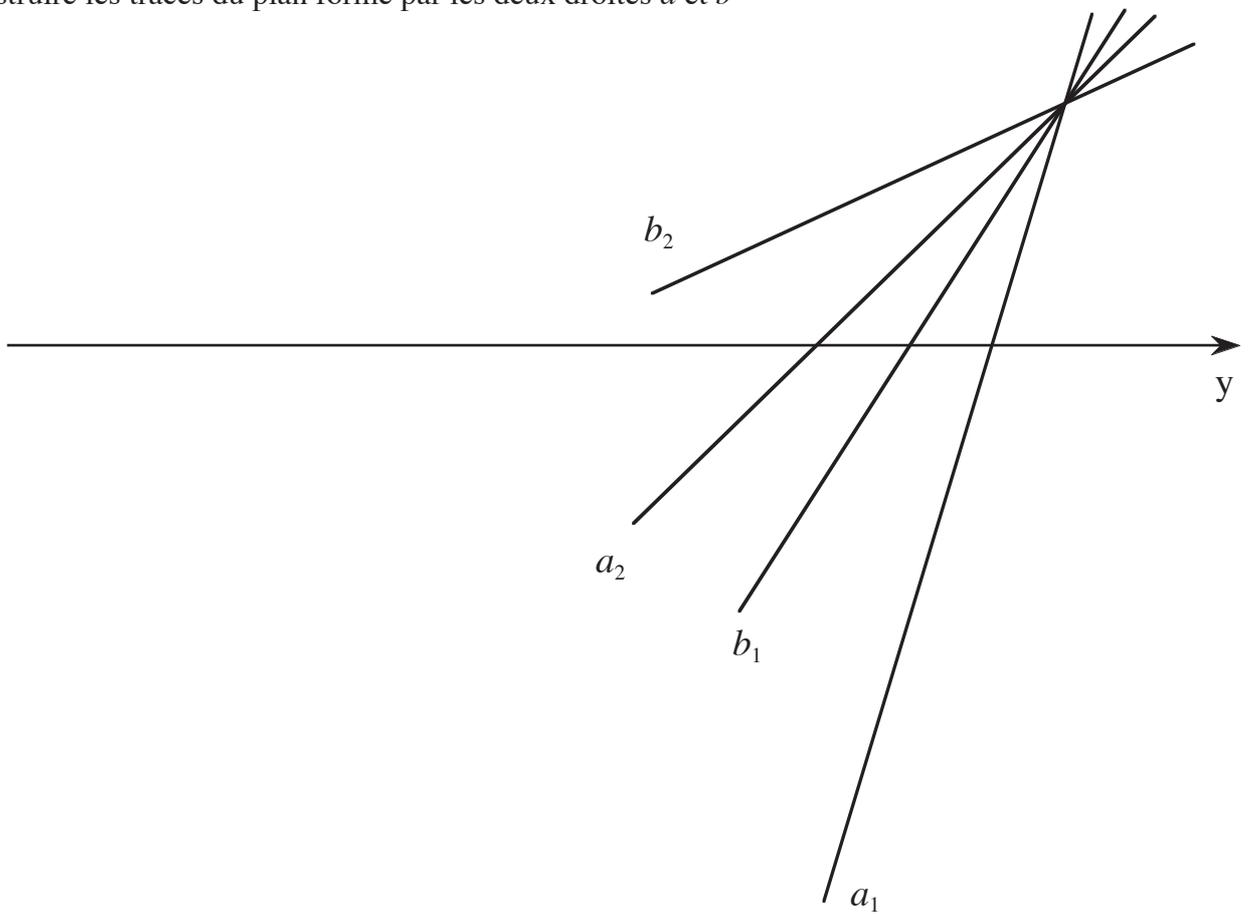


**Exercice 4.27:**

Construire les traces du plan formé par les deux droites  $a$  et  $b$



Construire les traces du plan formé par les deux droites  $a$  et  $b$



**Exercice 4.28:**

En s'aidant dans un premier temps d'une esquisse 3D représentant la situation, construire les traces du plan formé par le point  $B$  et la droite  $a$  parallèle à l'axe  $y$

Esquisse 3D

◦  $B_2$

\_\_\_\_\_  $a_2$

\_\_\_\_\_  $y$

◦  $B_1$

\_\_\_\_\_  $a_1$

**Exercice 4.29:**

En s'aidant dans un premier temps d'une esquisse 3D représentant la situation, construire les traces du plan formé par les droites  $a$  et  $b$

Esquisse 3D

\_\_\_\_\_  $a_2$

\_\_\_\_\_  $b_2$

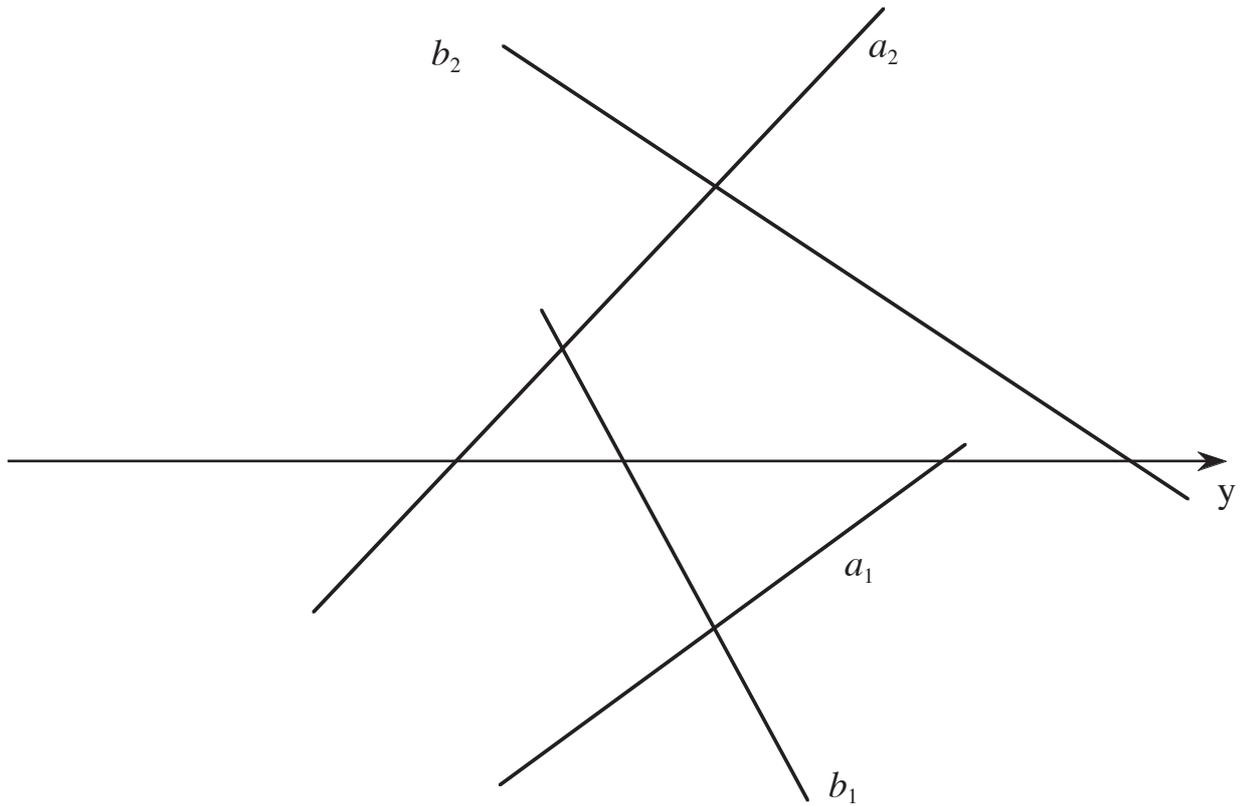
\_\_\_\_\_  $y$

\_\_\_\_\_  $a_1$

\_\_\_\_\_  $b_1$

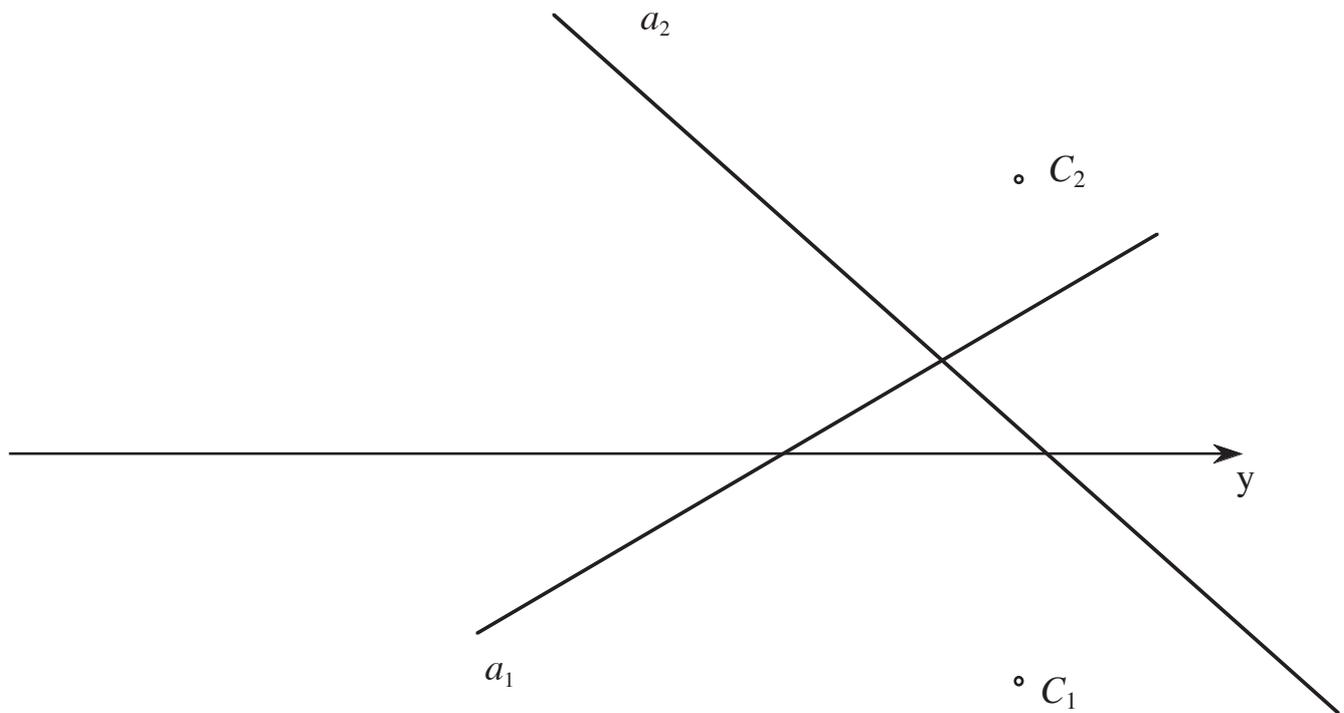
**Exercice 4.30:**

Construire les traces du plan formé par les deux droites  $a$  et  $b$



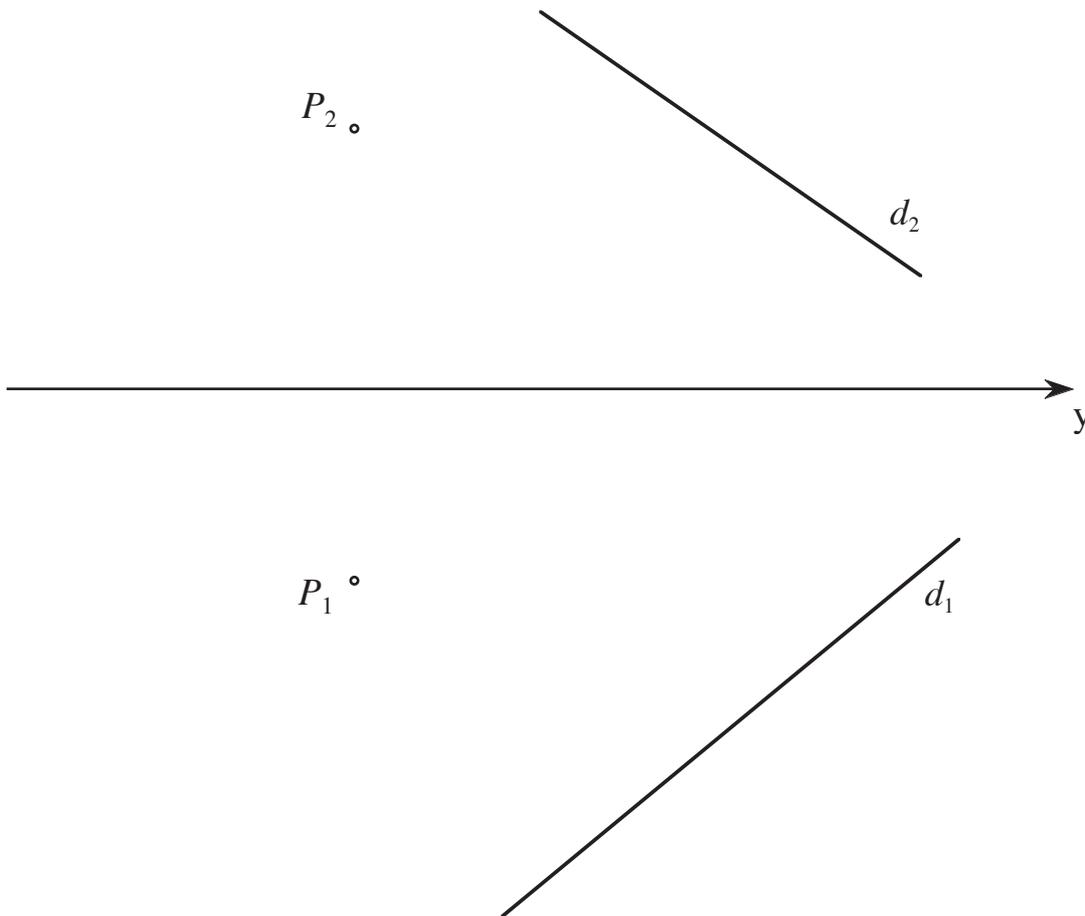
**Exercice 4.31:**

Construire les traces du plan formé par la droite  $a$  et le point  $C$



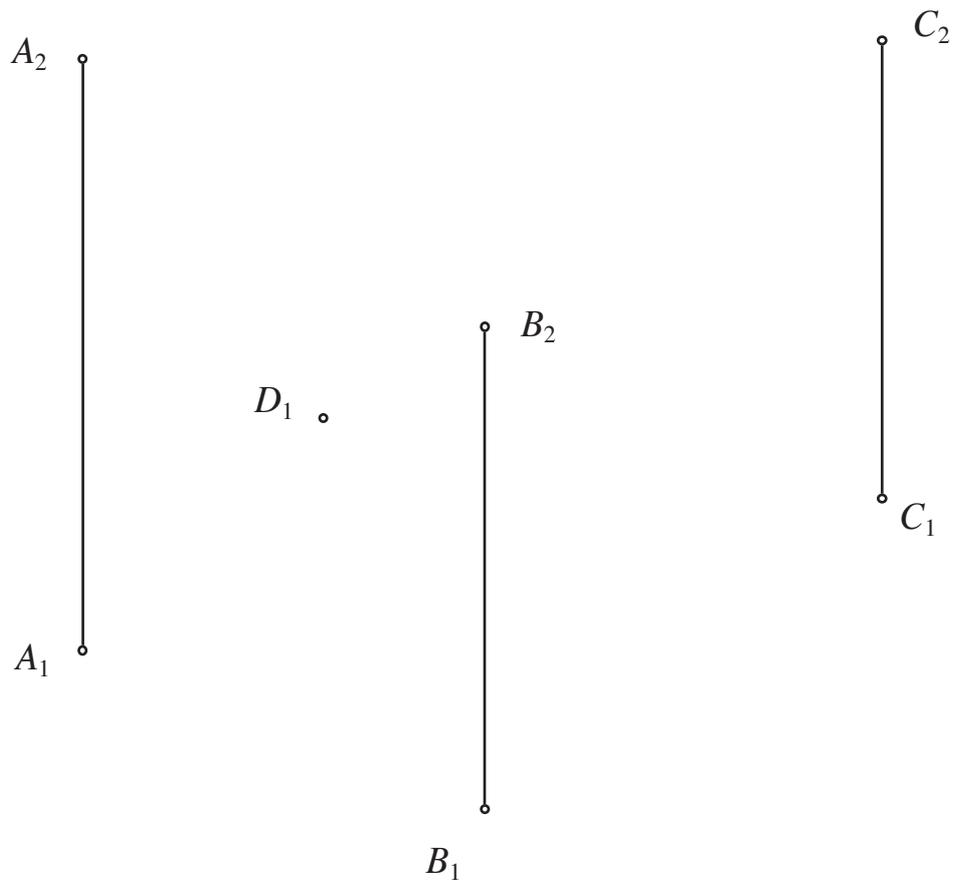
**Exercice 4.32:**

Construire les projections et les traces des droites  $h$  et  $f$  passant par  $P$  et coupant  $d$ , si l'on sait que  $h$  est horizontale et  $f$  frontale



**Exercice 4.33:**

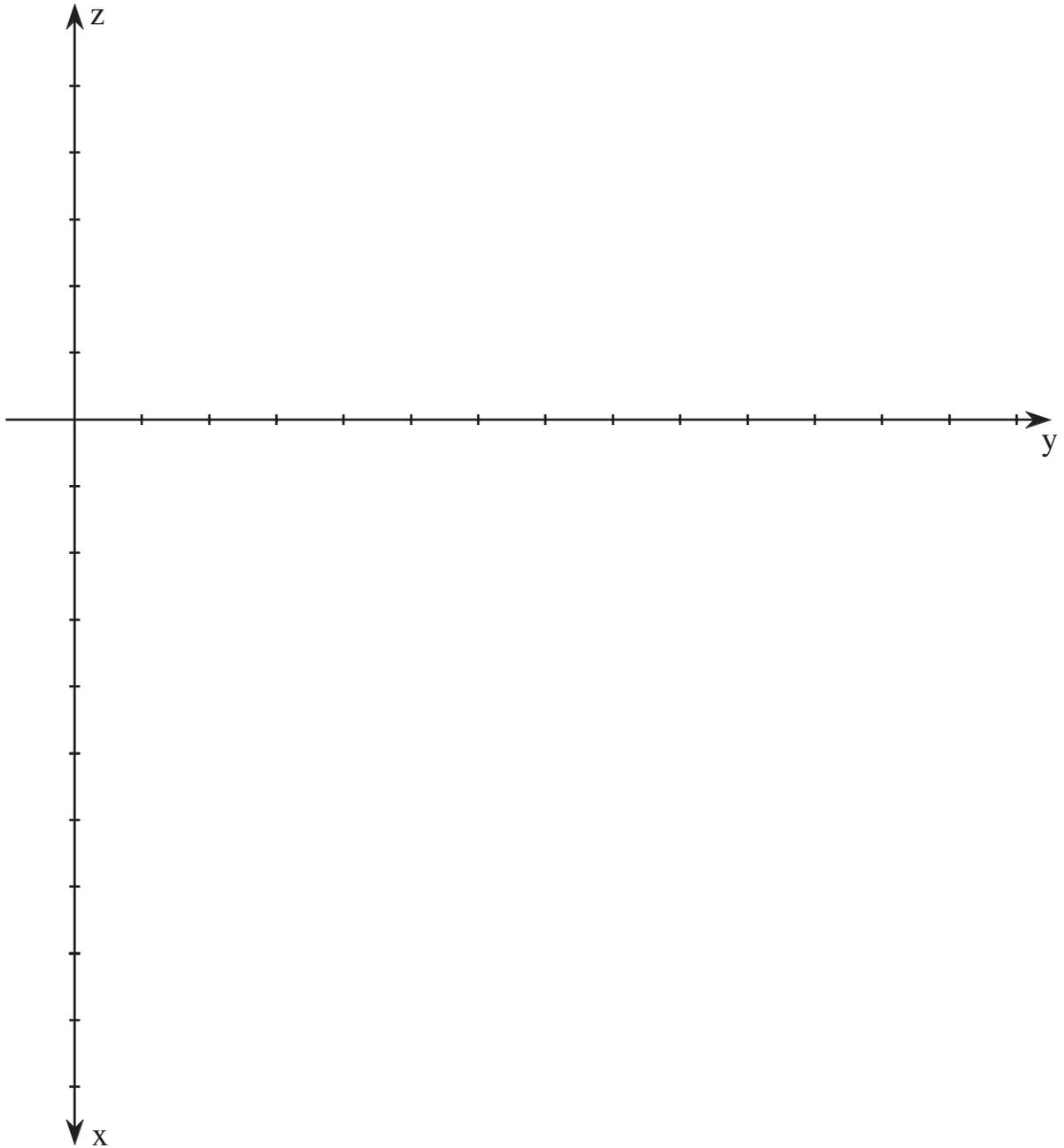
Construire  $D_2$  sachant que  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires



**Exercice 4.34:**

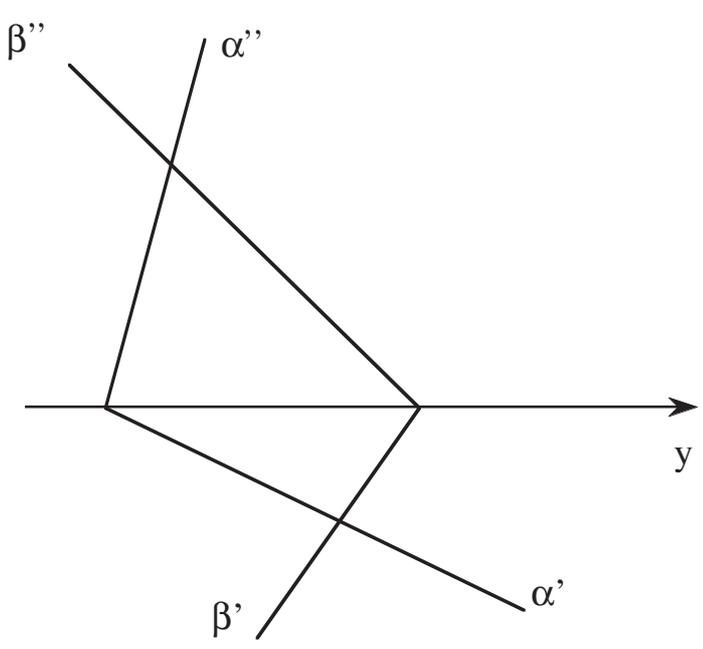
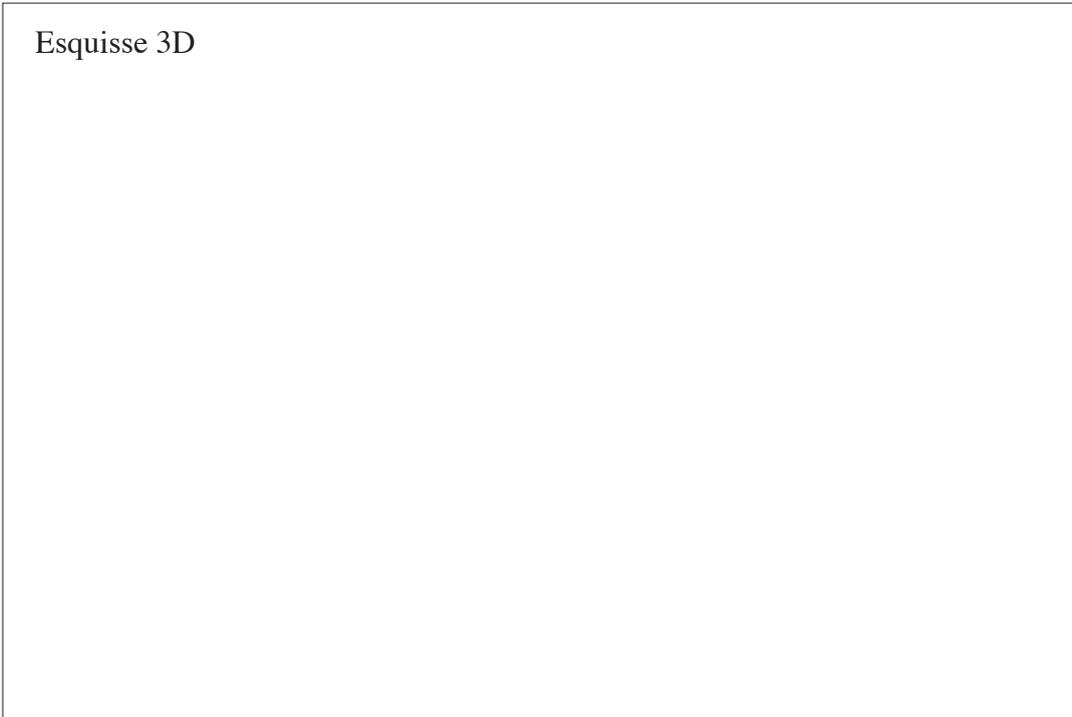
On donne les points  $A(9 ; 1 ; 3)$  ,  $B(10 ; 3 ; 1)$  ,  $C(5 ; 6 ; 4)$  ,  $D(? ; 5 ; 8)$  ,  $E(? ; 2 ; 7)$  et  $S(11 ; 13 ; 2)$

- a) Construire la première projection des points  $D$  et  $E$  sachant que les points  $ABCDE$  sont coplanaires
- b) Construire avec visibilité les deux projections de la pyramide  $SABCDE$  de sommet  $S$



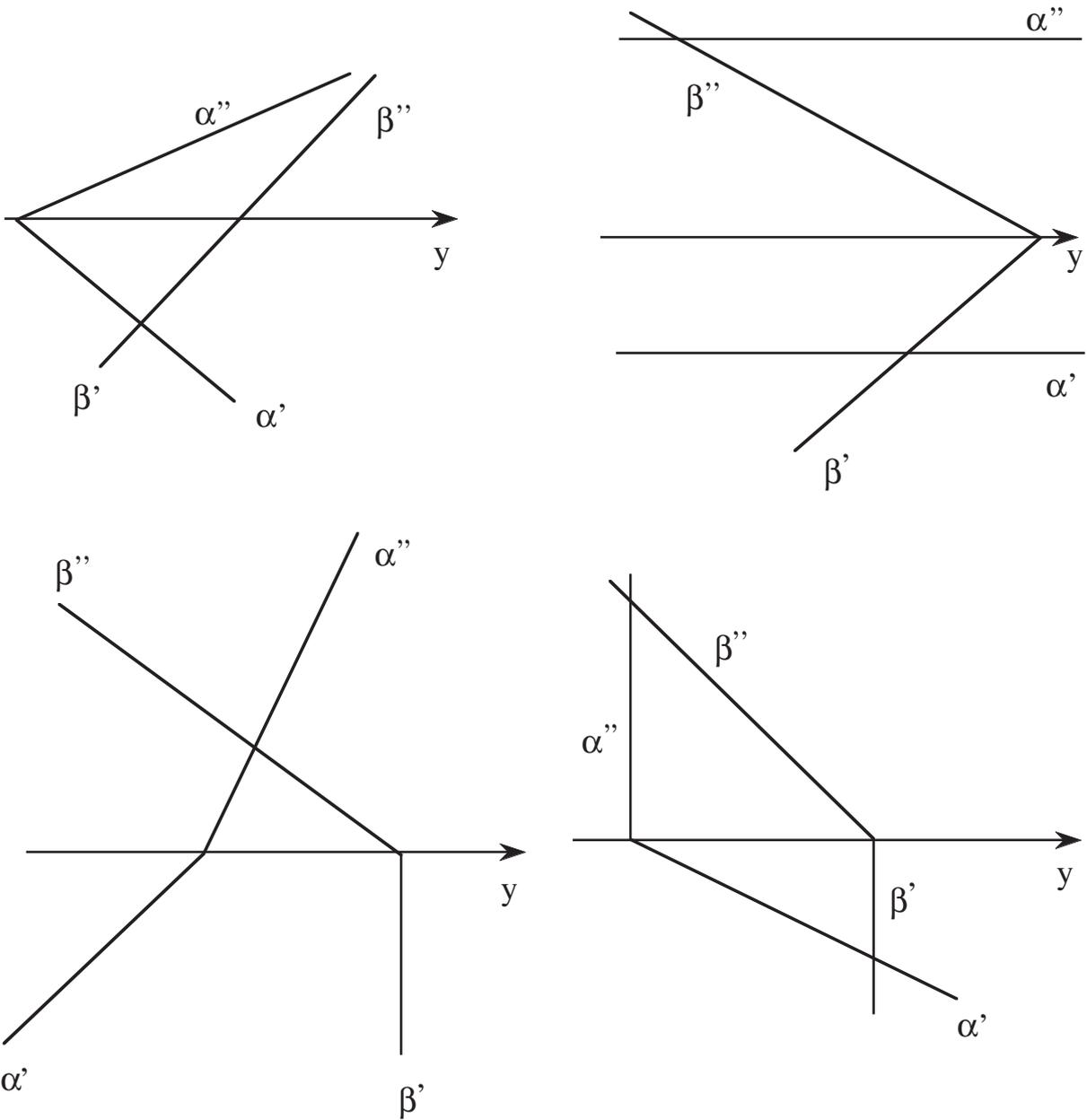
**Exercice 4.35:**

En s'aidant dans un premier temps d'une esquisse 3D représentant la situation, construire l'intersection des plans  $\alpha$  et  $\beta$  donnés par leurs traces



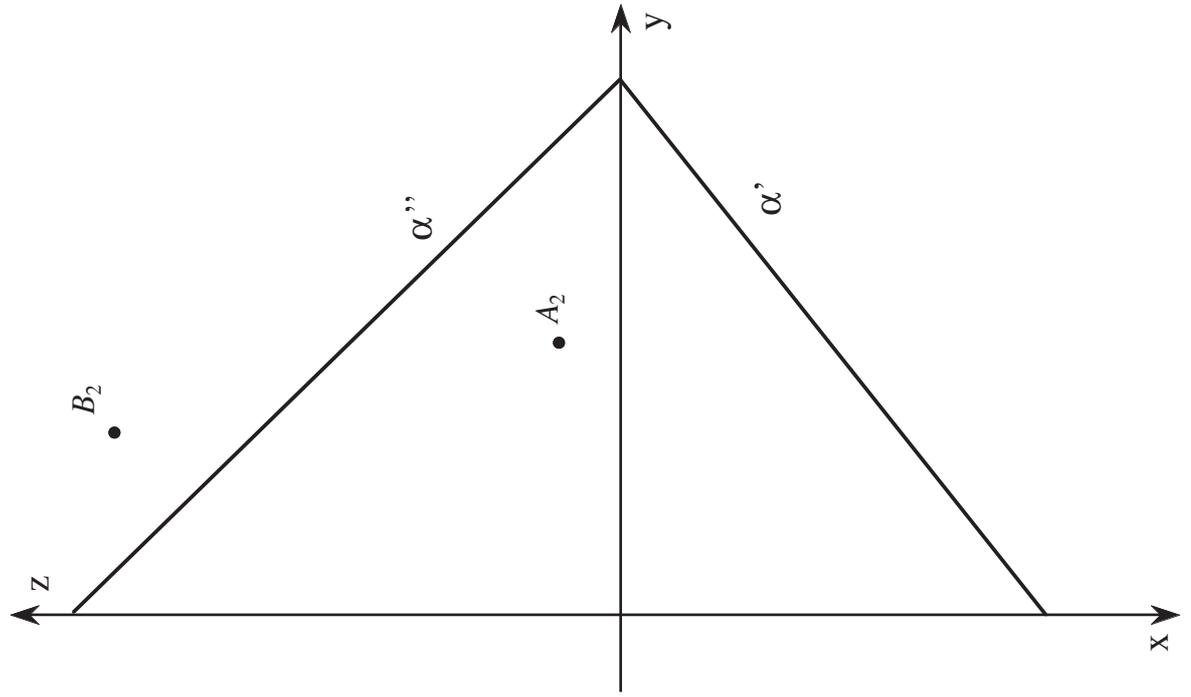
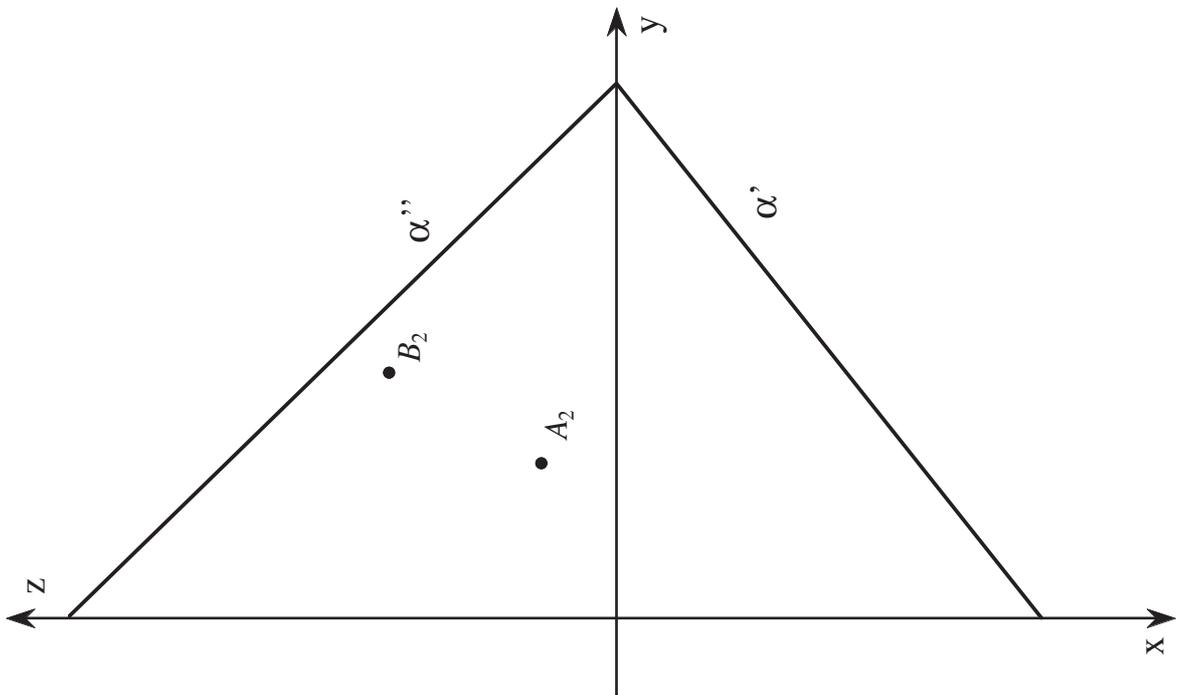
**Exercice 4.36:**

Construire l'intersection des plans  $\alpha$  et  $\beta$  donnés par leurs traces



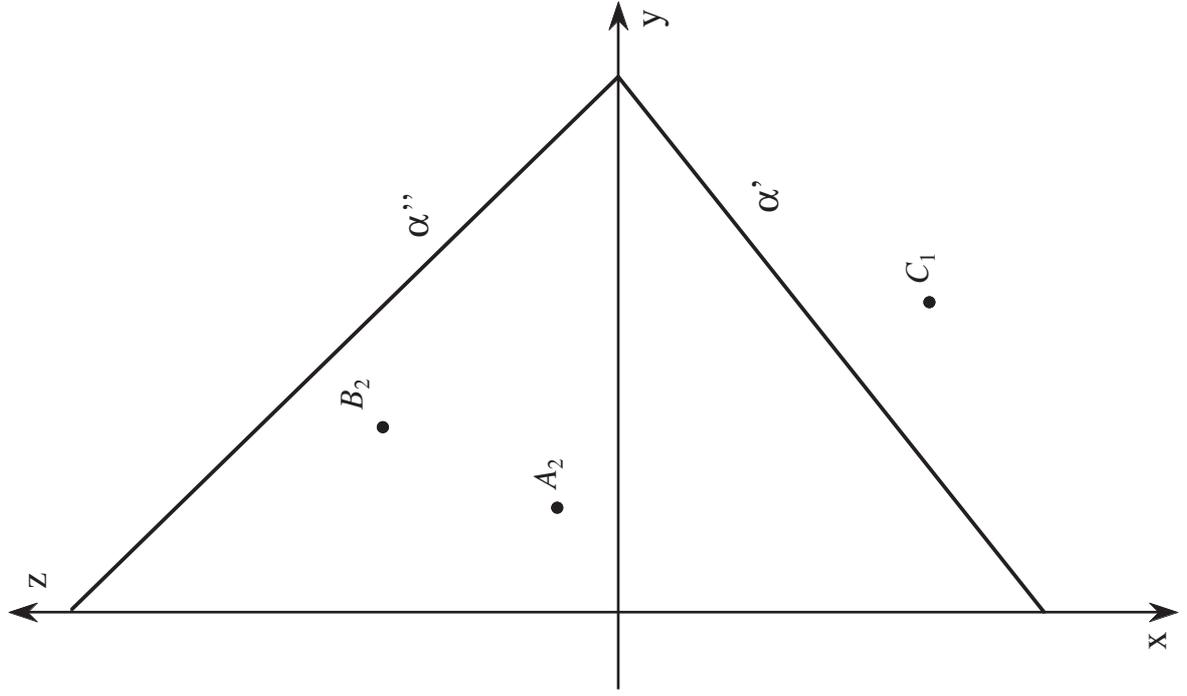
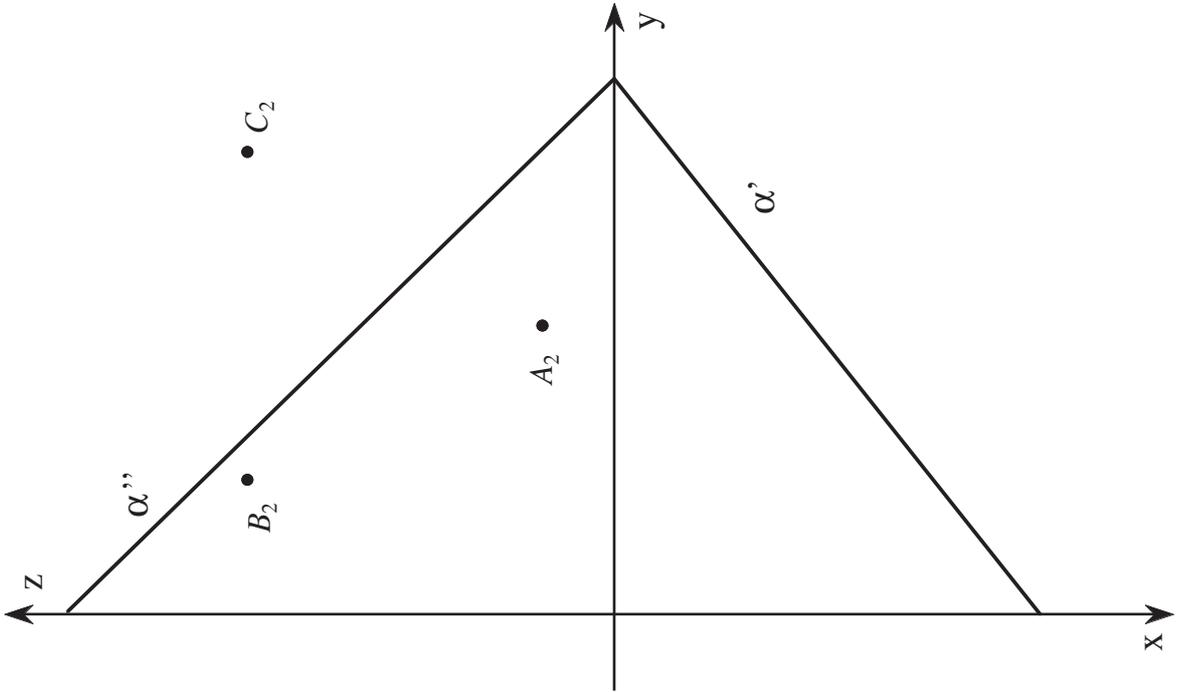
**Exercice 4.37 (début):**

Dans les 2 figures suivantes, on donne la deuxième projection des points  $A$  et  $B$  situés dans le plan  $\alpha$  donné par ses traces. Construire la 1ère projection de ces 2 points.



**Exercice 4.37 (suite):**

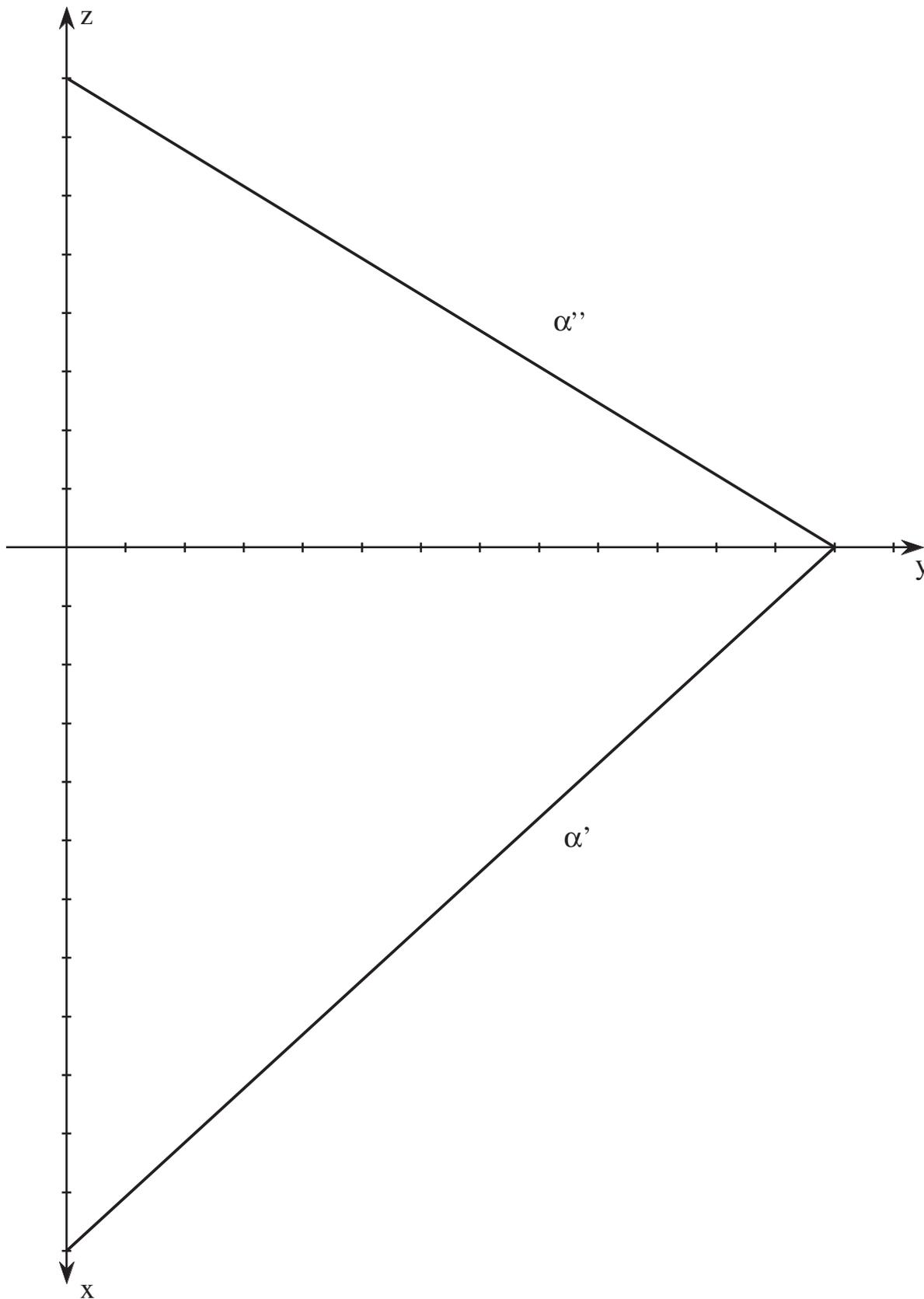
Dans les 2 figures suivantes, on donne une des 2 projections des sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un triangle situés dans le plan  $\alpha$  donné par ses traces. Construire la projection manquante de ces 3 sommets puis les projections du triangle.



**Exercice 4.37 (fin):**

On donne les points  $A(? ; 1 ; 3)$  ,  $B(? ; 3 ; 5,5)$  ,  $C(? ; 6 ; 7)$  ,  $D(? ; 9 ; 2)$  ,  $E(? ; 5 ; -2)$ .

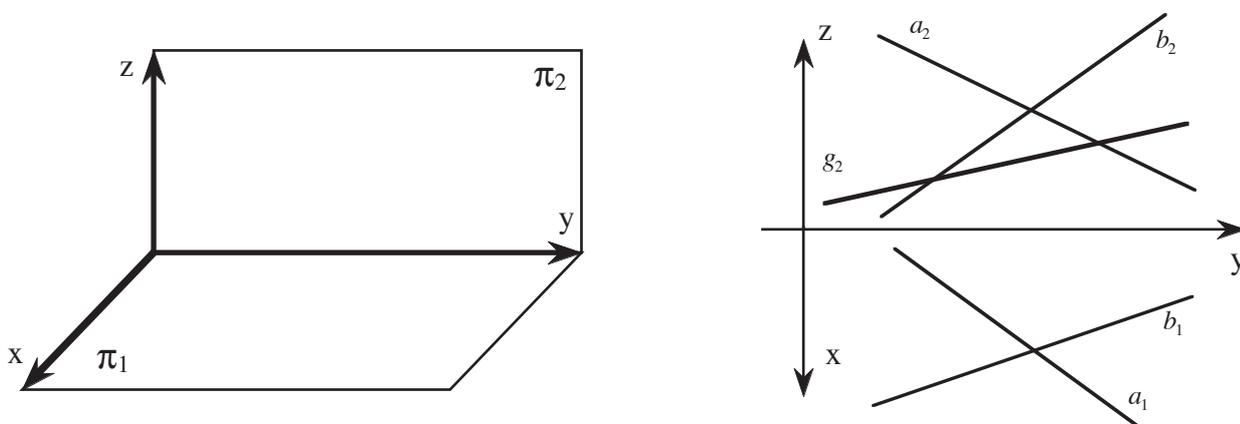
Construire les deux projections du polygone  $ABCDE$  compris dans le plan  $\alpha$  donné par ses traces.



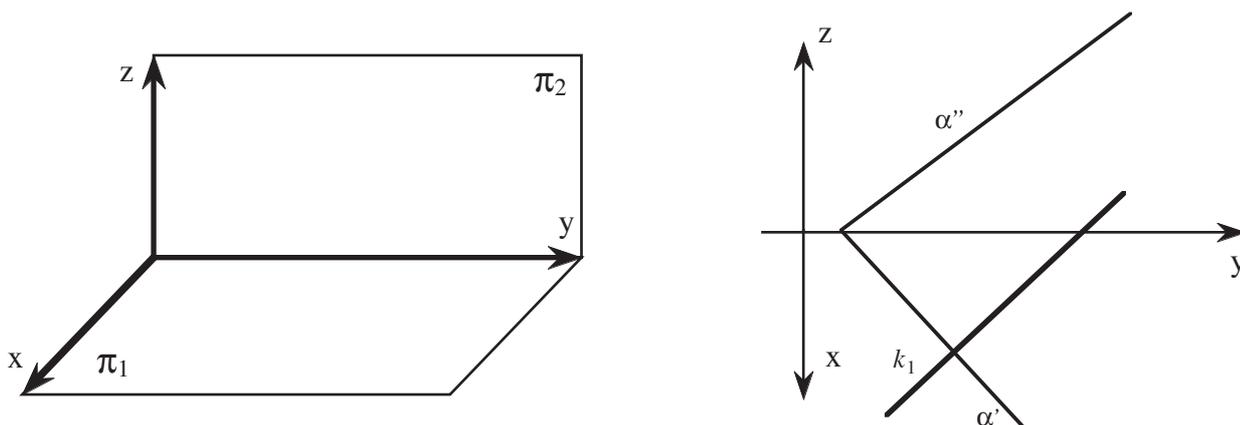
**Exercice 4.38:**

En vous aidant de l'esquisse 3D, construire la 1ère projection  $g_1$  d'une droite  $g$ , sachant que  $g$  est contenu dans le plan formé par les droites  $a$  et  $b$

*Une des difficultés principales de cet exercice est de rendre cohérent les deux représentations.*



En vous aidant de l'esquisse 3D, construire la 2ème projection  $k_2$  d'une droite  $k$ , sachant que  $k$  est contenu dans le plan  $\alpha$



En vous aidant de l'esquisse 3D, construire la 2ème projection  $P_2$  d'un point  $P$ , sachant que  $P$  est contenu dans le plan formé par les droites  $a$  et  $b$

