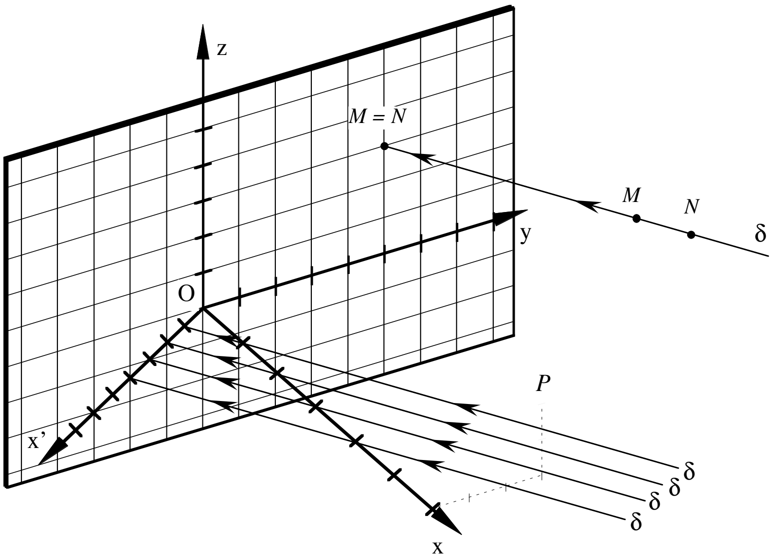
# CHAPITRE 3: Axonométrie cavalière

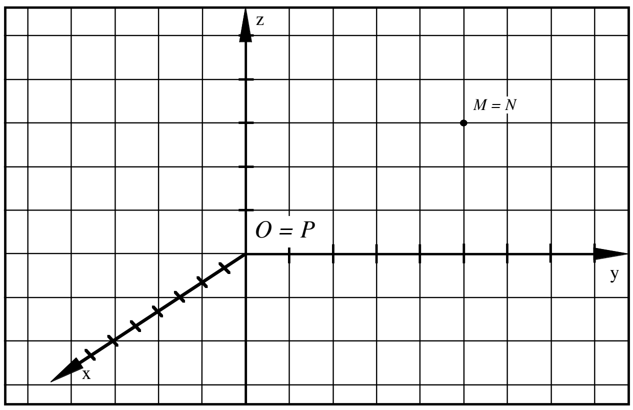
Une axonométrie **cavalière** est une projection parallèle de l'espace sur un plan π(O,y,z) parallèlement à une direction δ, δ n'étant pas parallèle à l'abscisse x.

## §1. Une première définition

Esquisse 3D




Axonométrie

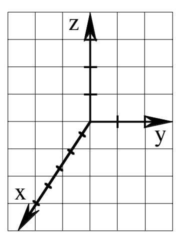



Dans une axonométrie cavalière, le choix de la direction δ et de la graduation de l'abscisse est libre. Cela peut entraîner quelques problèmes de vision. Par exemple les deux points distincts *M* et *N* ont la même image sur la feuille, alors que le point *N* est plus en avant que le point *M*. On dit alors que le point *N* **cache** le point *M*.

Le point *P*(6; 3; 2) et tout point ayant des coordonnées proportionnelles à celle de *P*, *Q*(18; 9; 6) par exple, ont pour image l'origine. Dans ce cas, la droite *OP* donne la direction δ.
L'ensemble des points de l'espace qui ont la même image axonométrique que l'origine s'appelle le **noyau axonométrique**. On le notera n=[6; 3; 2]

Autre exemple: le noyau de cette axonométrie est:

n =



**Exercice 3.1:**

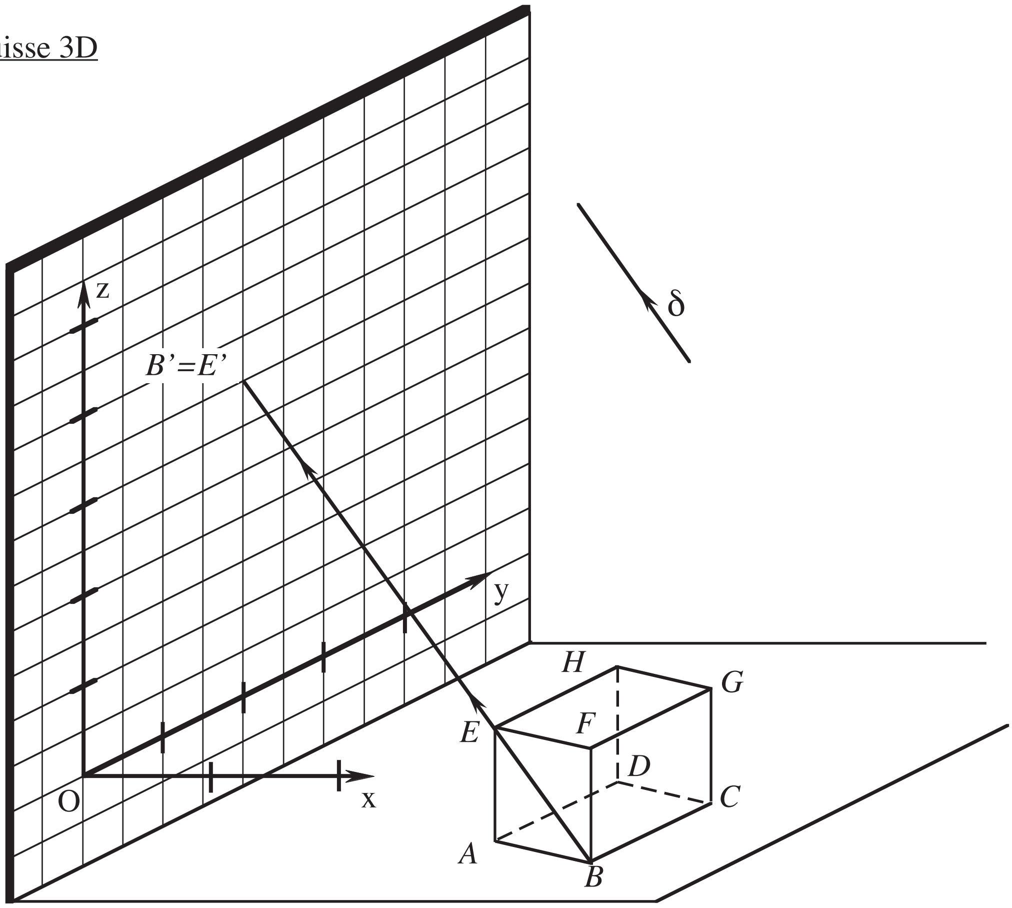
Sur l’esquisse 3D:

- Construire l’image axonométrique du parallélépipède *ABCDEFGH* sur le plan Oyz de direction δ
- Construire l’image axonométrique du système d’axe Oxyz

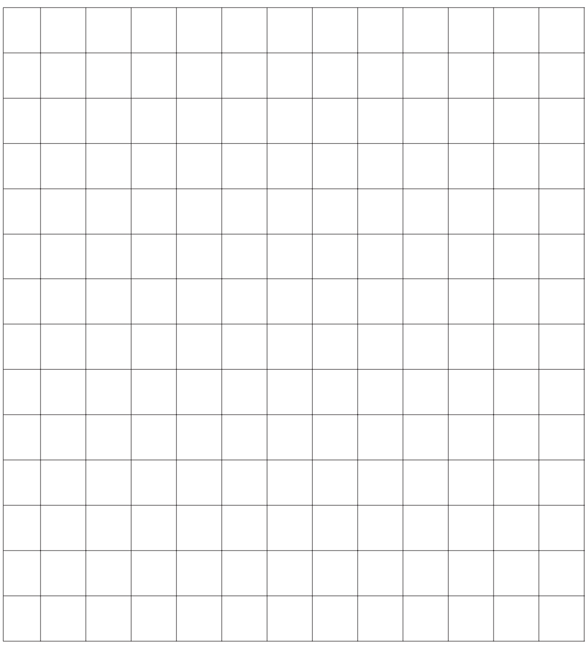
Sur le quadrillage:

- Reproduire approximativement l’image du parallélépipède et l’image du système d’axes Oxyz
- En déduire une valeur approximative du noyau de cette axonométrie

<u>Esquisse 3D</u>




<u>Axonométrie</u>

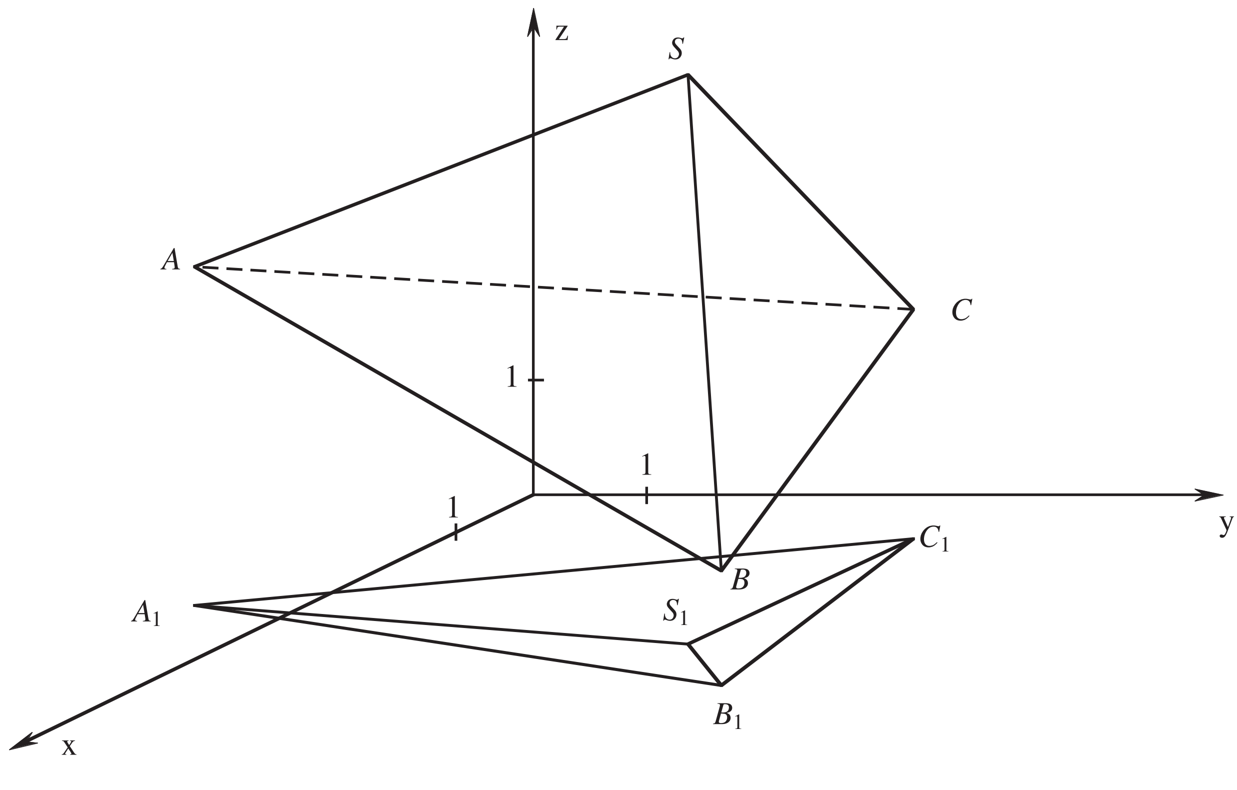


noyau n = [ ]

**Exercice 3.2:**

**a)** Déterminer, en les mesurant sur le dessin, les coordonnées des sommets de la pyramide $SABC$

**b)** Déterminer le noyau de cette axonométrie



**Exercice 3.3:**

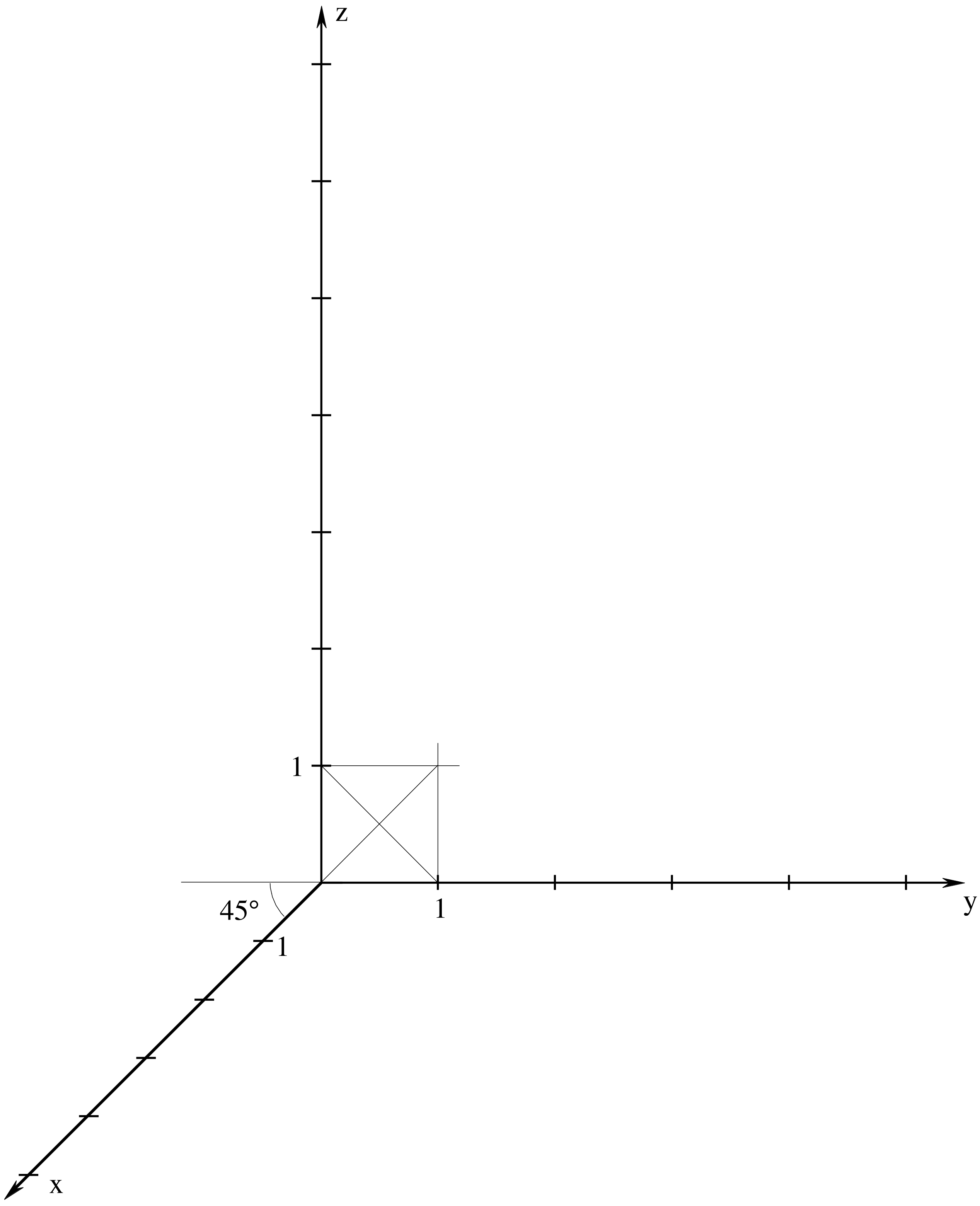
On donne l'axonométrie ci-dessous.

- Justifier que son noyau est bien [2 ; 1 ; 1]
- Représenter le polyèdre *ABCDEFGH* suivant:

  *A*(0 ; 0 ; 0) , *B*(2 ; -1 ; 2) , *C*(2 ; 1 ; 3) , *D*(0 ; 2 ; 1) , *E*(0 ; 0,5 ; 3) , *F*(2 ; -0,5 ; 5)

  *G*(2 ; 1,5 ; 6) , *H*(0 ; 2,5 ; 4)

  S'agit-il d'un cube ? Justifier toute réponse. Indiquer la visibilité du polyèdre.

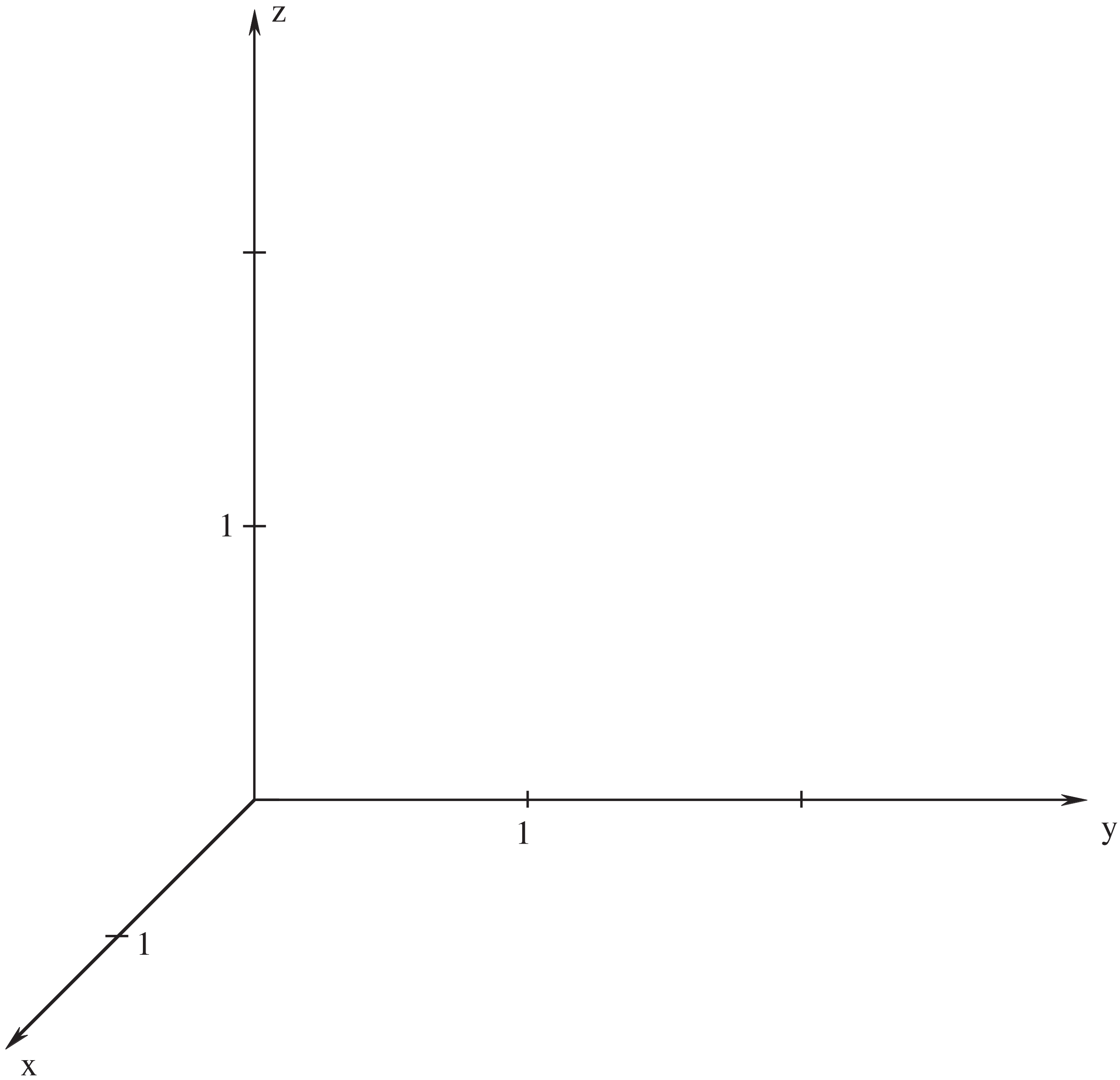


**Exercice 3.4:**

On donne l'axonométrie ci-dessous.

- Déterminer son noyau
- Représenter le polyèdre *ABCDEFGH* suivant:

  $A(1\ ;1\ ;1)$ , $B(1\ ;2\ ;1)$ , $C(0\ ;2\ ;1)$ , $D(0\ ;1\ ;1)$ , $E(1\ ;1\ ;2)$ , $F(1\ ;2\ ;2)$ , $G(0\ ;2\ ;2)$ , $H(0\ ;1\ ;2)$
- Construire ensuite l'image de ce solide par la projection parallèle de l'espace sur le sol qui envoie le point $A$ sur le point $A'(2\ ;2\ ;0)$



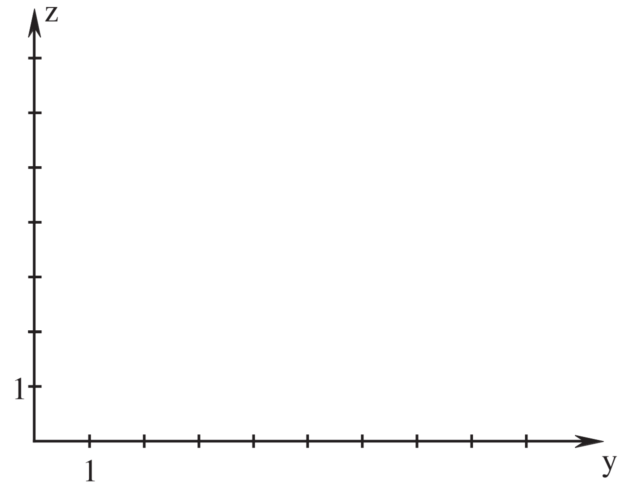
**Exercice 3.5:**

Représenter le polyèdre *ABCDEFGH*

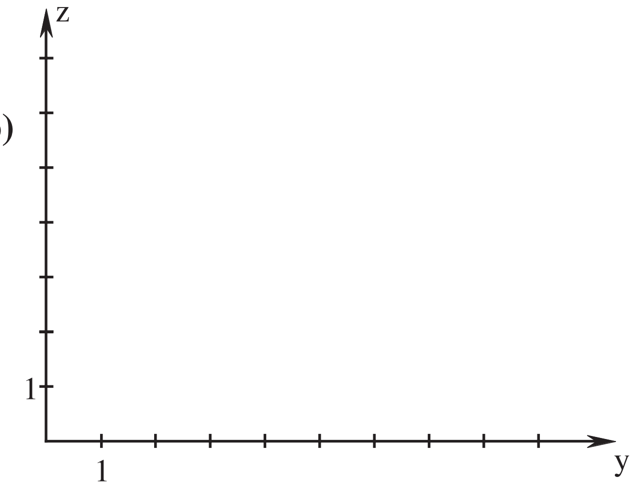
*A*(0 ; 0 ; 0) , *B*(4 ; 3 ; 0) , *C*(1 ; 7 ; 0) , *D*(-3 ; 4 ; 0) , *E*(0 ; 0 ; 5) , *F*(4 ; 3 ; 5) , *G*(1 ; 7 ; 5) , *H*(-3 ; 4 ; 5)

dans les axonométries de noyaux suivants : a) [4 ; 1 ; 1] b) [6 ; -1 ; 2] c) [2 ; 1 ; 1]

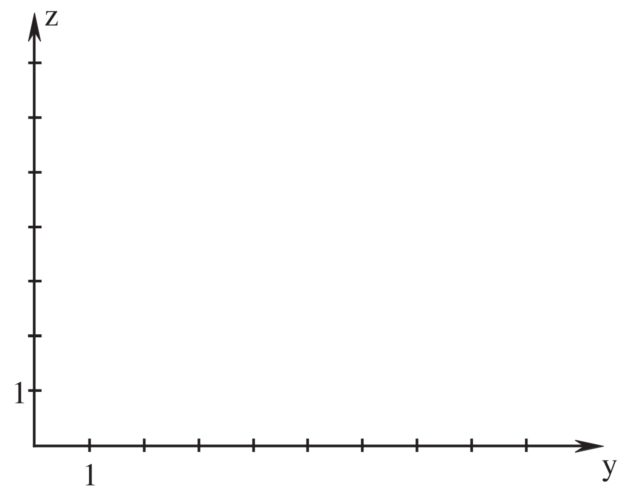
**a)**




**b)**




**c)**




*ABCDEFGH* est-il un cube ?

**Exercice 3.6:**

Dans l'axonométrie donnée de noyau [4 ; 4 ; 3], représenter:

**a)** L'axe Ox avec sa graduation.

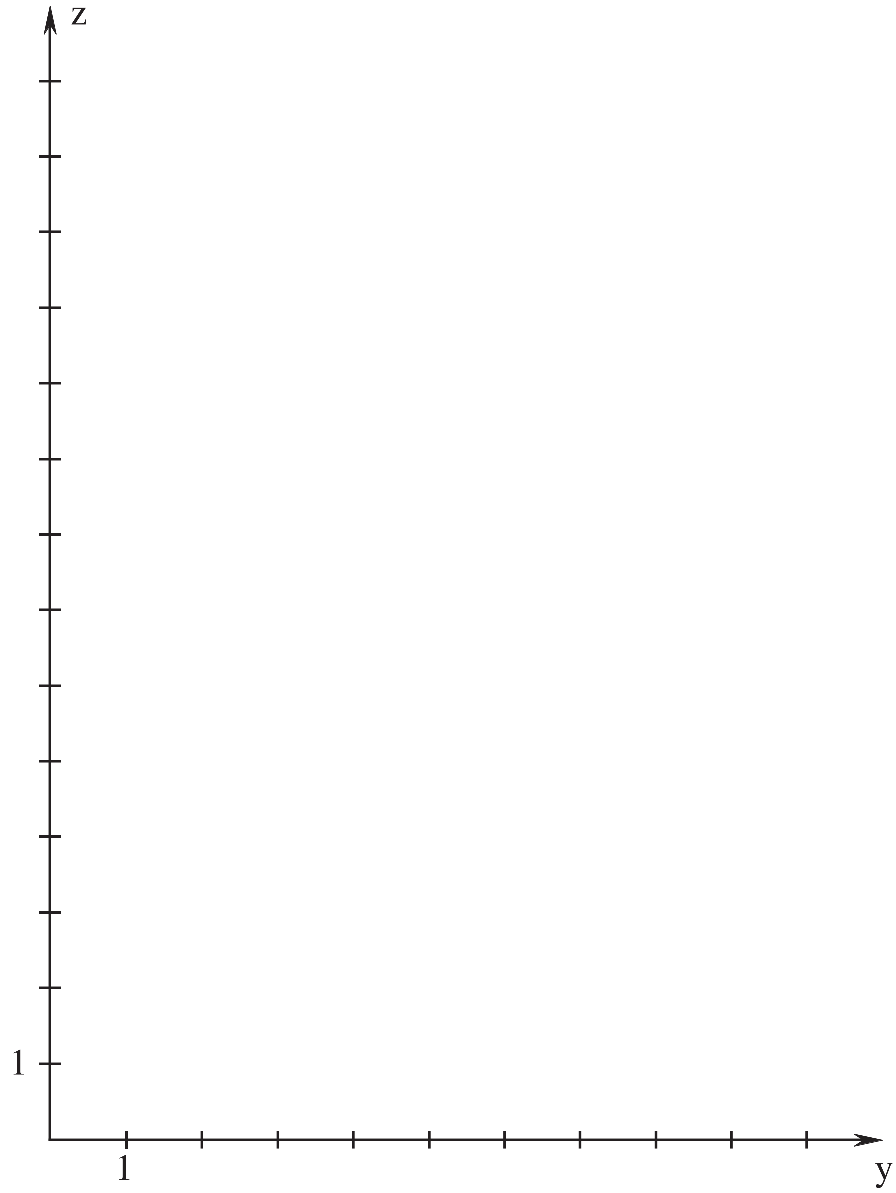
**b)** Les points $A(1 ; -3 ; 6)$ et $B(3 ; 7 ; -3)$.

**c)** Les points $M$ et $N$ d'intersection de la droite $AB$ avec le sol Oxy et le mur Oxz.

Ecrire les coordonnées:

**d)** de cinq points ayant même image axonométrique que l'origine O.

**e)** de cinq points ayant même image que $P(0 ; 4 ; 3)$.



**Exercice 3.7:**

Dans l'axonométrie donnée de noyau [3 ; 4 ; 3], représenter:

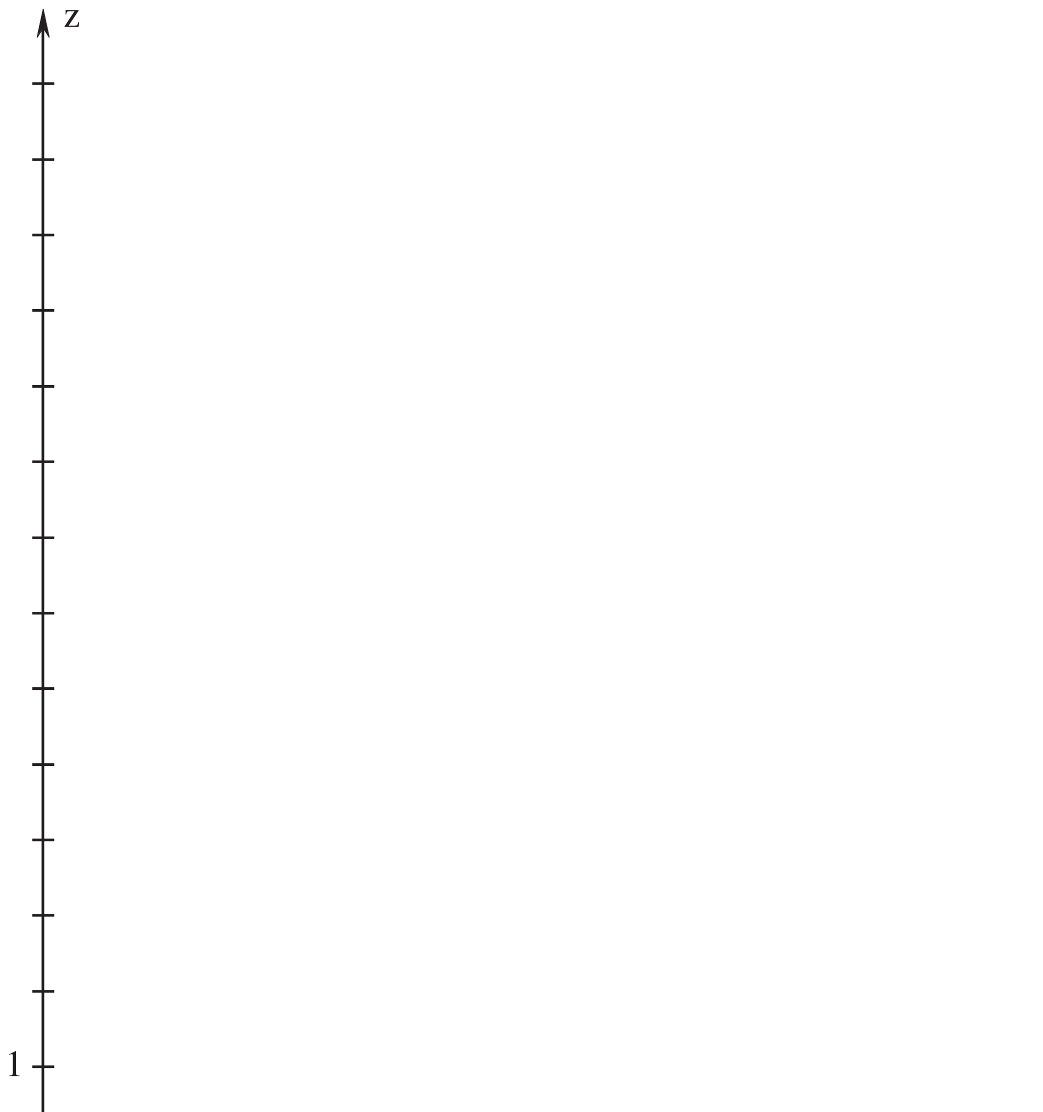
**a)** une droite $m$ parallèle au plan Oyz et passant par les points $C(3 ; 10 ; 6)$ et $D(? ; 5 ; 10{,}5)$.

**b)** une droite $u$ horizontale passant par les points $A(-6 ; 5 ; 5)$ et $B(6 ; 5 ; ?)$.

**c)** Les points $P$, $M$ et $N$ définis par:

$P = u \cap$ plan Oyz , $M = m \cap$ plan Oxy , $N = m \cap$ plan Oxz.

**d)** la droite $k$, intersection des plans projetants verticaux de $u$ et $m$.

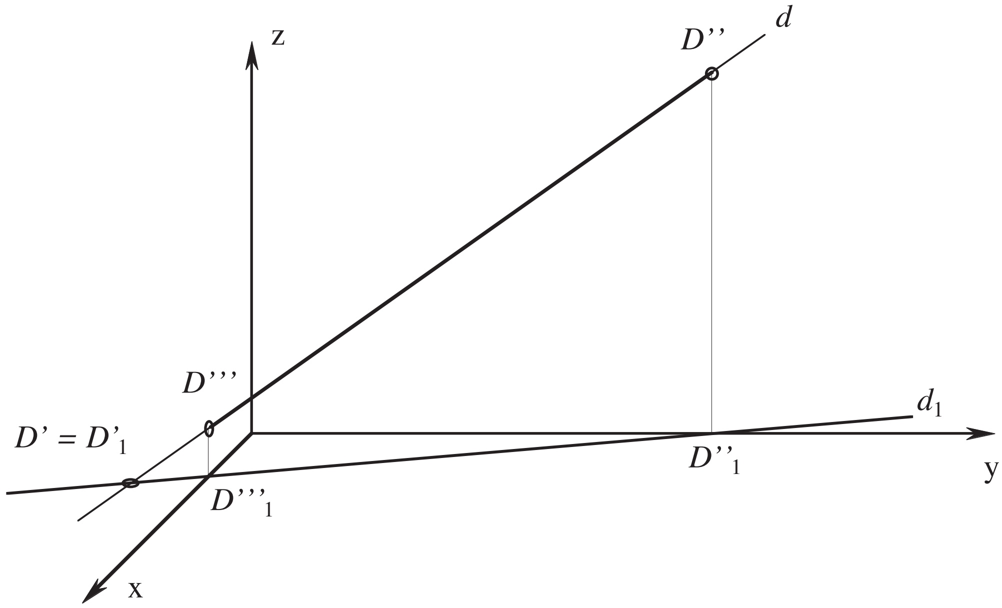


**Exercice 3.8:**

Dans l'axonométrie de noyau n = [3 ; 2 ; 2], on donne les points $D(2 ; 4 ; 3)$ , $E(5 ; 6 ; 5)$ et $F(-1 ; 2 ; 1)$
Vérifier par le calcul que pour l'observateur "*E* cache *D* et *D* cache *F*".

Même question pour n = [4 ; 2 ; -3] si $D(-5 ; -1 ; 13/2)$ , $E(-1 ; 1 ; 7/2)$ et $F(1 ; 2 ; 2)$.

## §2. Représentation d'une droite en axonométrie



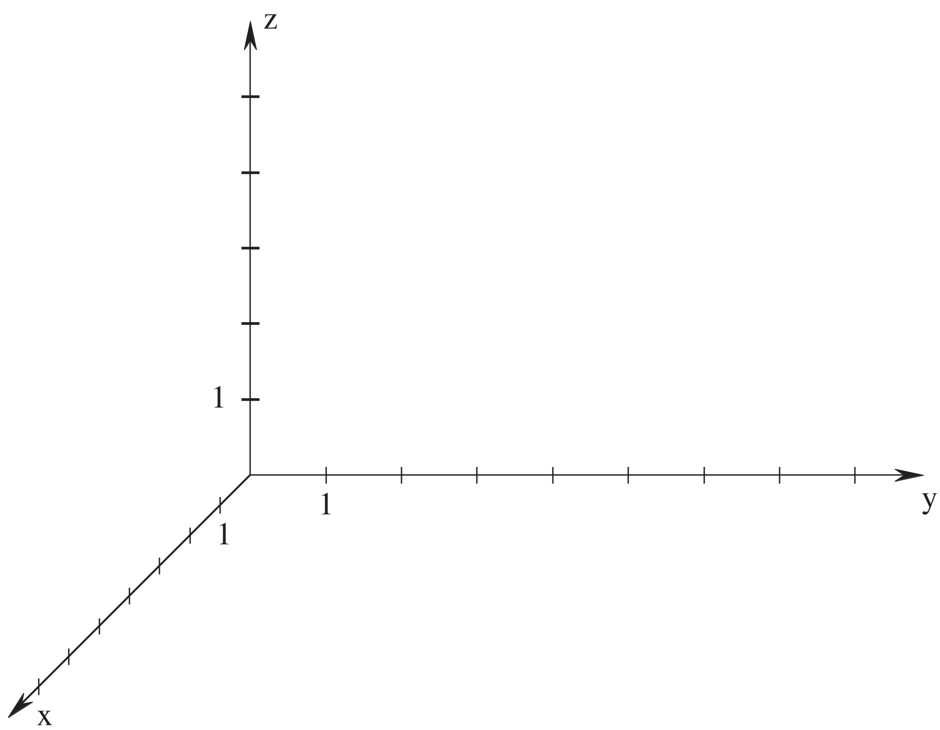

On appelle **traces** *D'*, *D''*, *D'''* d'une droite *d* ses points d'intersection avec respectivement les plans Oxy, Oyz, Oxz.

Une droite peut être définie par deux de ses points. Le plus souvent, elle sera déterminée par son image *d* et par l'image $d_1$ de sa projection orthogonale sur Oxy.

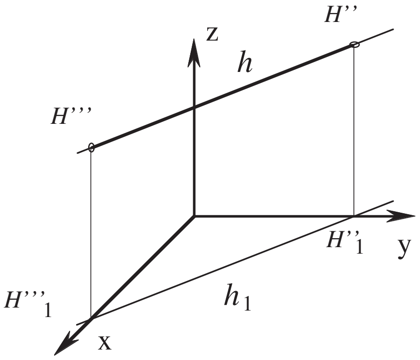
**Exercice 3.9:**

Soit $A(4 ; 0 ; 7)$ et $B(1 ; 2 ; 4)$

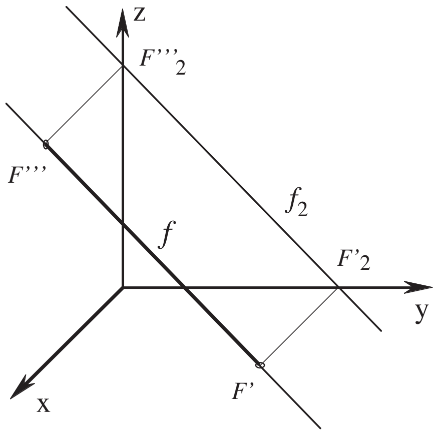
Représenter la droite $h = AB$, sa projection sur Oxy, ses traces ainsi que les projection de ses traces sur Oxy (en nommant ces points en respectant le codage).



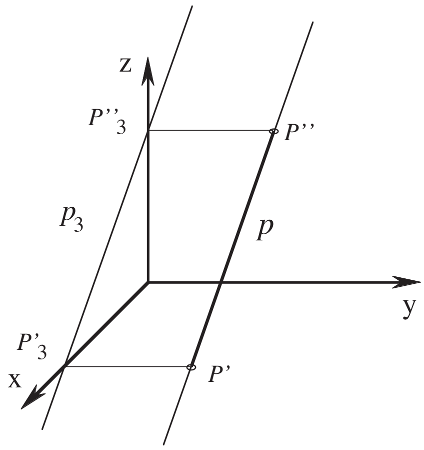
**Définition:**
Les droites principales: Une droite est dite principale si elle est parallèle à l'un des trois plans de projection:
$\pi_1$ = plan Oxy ; $\pi_2$ = plan Oyz ; $\pi_3$ = plan Oxz




Droite **horizontale**
(parallèle à $\pi_1$)




Droite **frontale**
(parallèle à $\pi_2$)




Droite **de profil**
(parallèle à $\pi_3$)

**Exercice 3.10:** cocher la case correspondante:
Dans les cas suivants, la droite *AB* est:

| | horizontale | frontale | de profil | quelconque |
|---|---|---|---|---|
| *A*(2 ; 1 ; 4) et *B*(6 ; -4 ; 7) | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| *A*(2 ; 1 ; 4) et *B*(2 ; -4 ; 7) | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| *A*(2 ; 1 ; 4) et *B*(6 ; 1 ; 7) | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| *A*(2 ; 1 ; 4) et *B*(4 ; 4 ; 4) | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| *A*(2 ; 1 ; 4) et *B*(2 ; 1 ; 7) | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |

**Exercice 3.11:**

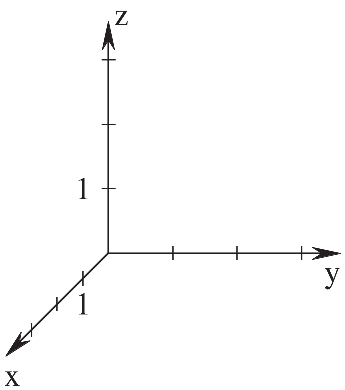
- Sachant que la droite *h* = *AB* est horizontale, compléter les coordonnées manquantes
  *A*(2 ; 3 ; 5) *B*(4 ; -2 ; …) *H''*(… ; … ; …) $H'''_1$ (… ; … ; …) *H'''*(… ; … ; …)

- Sachant que la droite *f* = *AB* est frontale, compléter les coordonnées manquantes
  *A*(2 ; 3 ; 5) *B*(… ; -2 ; 3) *F'''*(… ; … ; …) $F'''_2$ (… ; … ; …) *F'*(… ; … ; …)

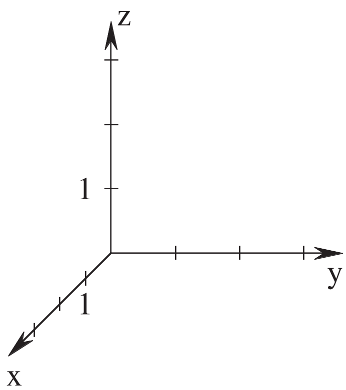
- Sachant que la droite *p* = *AB* est de profil, compléter les coordonnées manquantes
  *A*(2 ; 3 ; 5) *B*(4 ; … ; -3) *P''*(… ; … ; …) $P''_3$ (… ; … ; …) *P'*(… ; … ; …)

**Exercice 3.12:**
Dans les 3 cas suivants, représenter la droite $d = AB$, sa projection sur Oxy, ses traces ainsi que les projection de ses traces sur Oxy (en nommant ces points en respectant le codage).

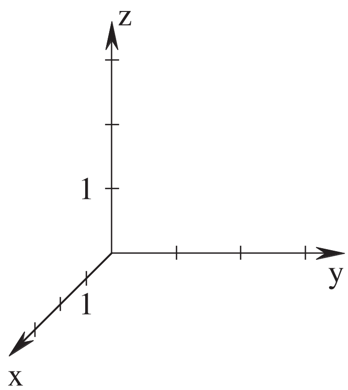
$A(2 ; 1 ; 3)$ , $B(2 ; 1 ; 2)$




$A(1 ; 3 ; 2)$ , $B(2 ; 3 ; 2)$




$A(2 ; 3 ; 2)$ , $B(2 ; 1 ; 2)$




**<u>Définition:</u>**
Une droite est dite **verticale** si elle est perpendiculaire au plan Oxy.
Elle est dite **de bout** si elle est perpendiculaire au plan Oyz.
Dans le 3ème cas ci-dessus, elle est simplement dite **perpendiculaire au plan Oxz**.

**Exercice 3.13:**

- Sachant que la droite $d = AB$ est verticale, compléter les coordonnées manquantes
  $A(2 ; 3 ; 5)$ $B(\ldots ; 3 ; 7)$ $D'(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D'_1(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D''(\ldots ; \ldots ; \ldots)$

- Sachant que la droite $d = AB$ est de bout, compléter les coordonnées manquantes
  $A(2 ; 3 ; 5)$ $B(-3 ; \ldots ; \ldots)$ $D'(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D''_1(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D''(\ldots ; \ldots ; \ldots)$

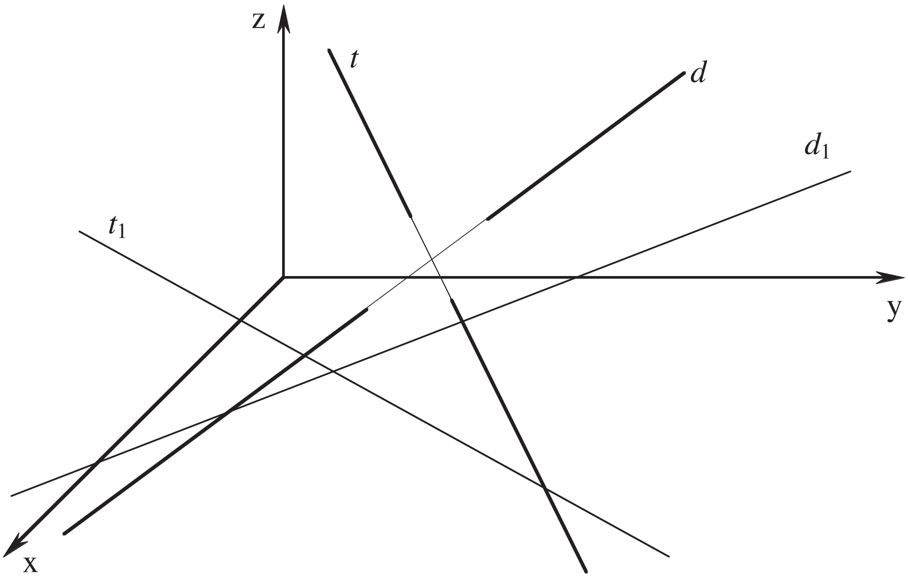
- Sachant que la droite $d = AB$ est $\perp$ à Oxz, compléter les coordonnées manquantes
  $A(2 ; 3 ; 5)$ $B(\ldots ; 5 ; \ldots)$ $D'''_1(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D''_1(\ldots ; \ldots ; \ldots)$ $D'''(\ldots ; \ldots ; \ldots)$

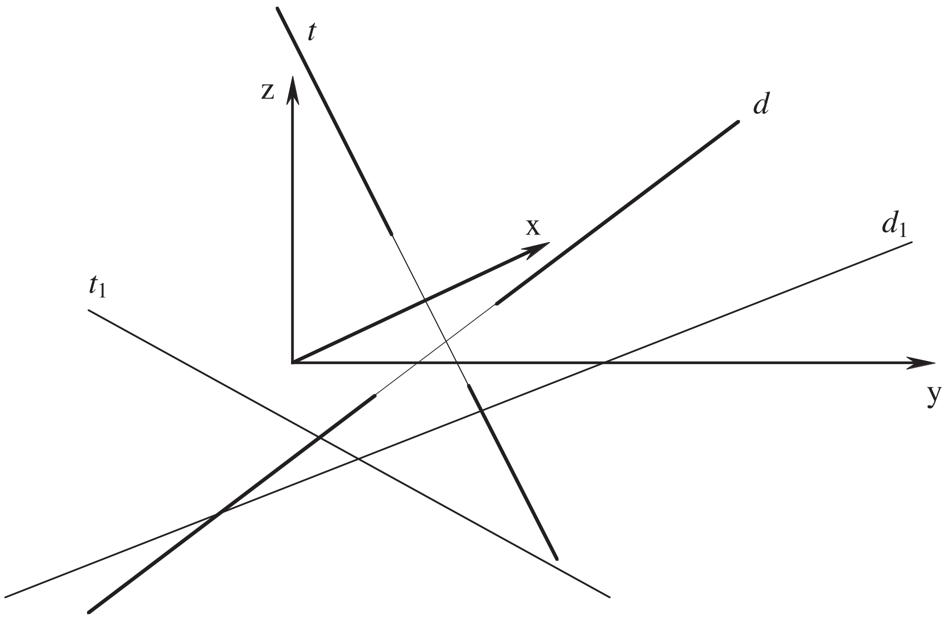
**Exercice 3.14:** cocher la case correspondante:
Dans les cas suivants, la droite $AB$ est:

| | verticale | de bout | $\perp$ Oxz | quelconque |
|---|---|---|---|---|
| $A(2 ; 1 ; 4)$ et $B(6 ; -4 ; 7)$ | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| $A(2 ; 1 ; 4)$ et $B(2 ; -4 ; 4)$ | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| $A(2 ; 1 ; 4)$ et $B(2 ; 1 ; -7)$ | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |
| $A(2 ; 1 ; 4)$ et $B(7 ; 1 ; 4)$ | ❐ | ❐ | ❐ | ❐ |

**Exercice 3.15:**

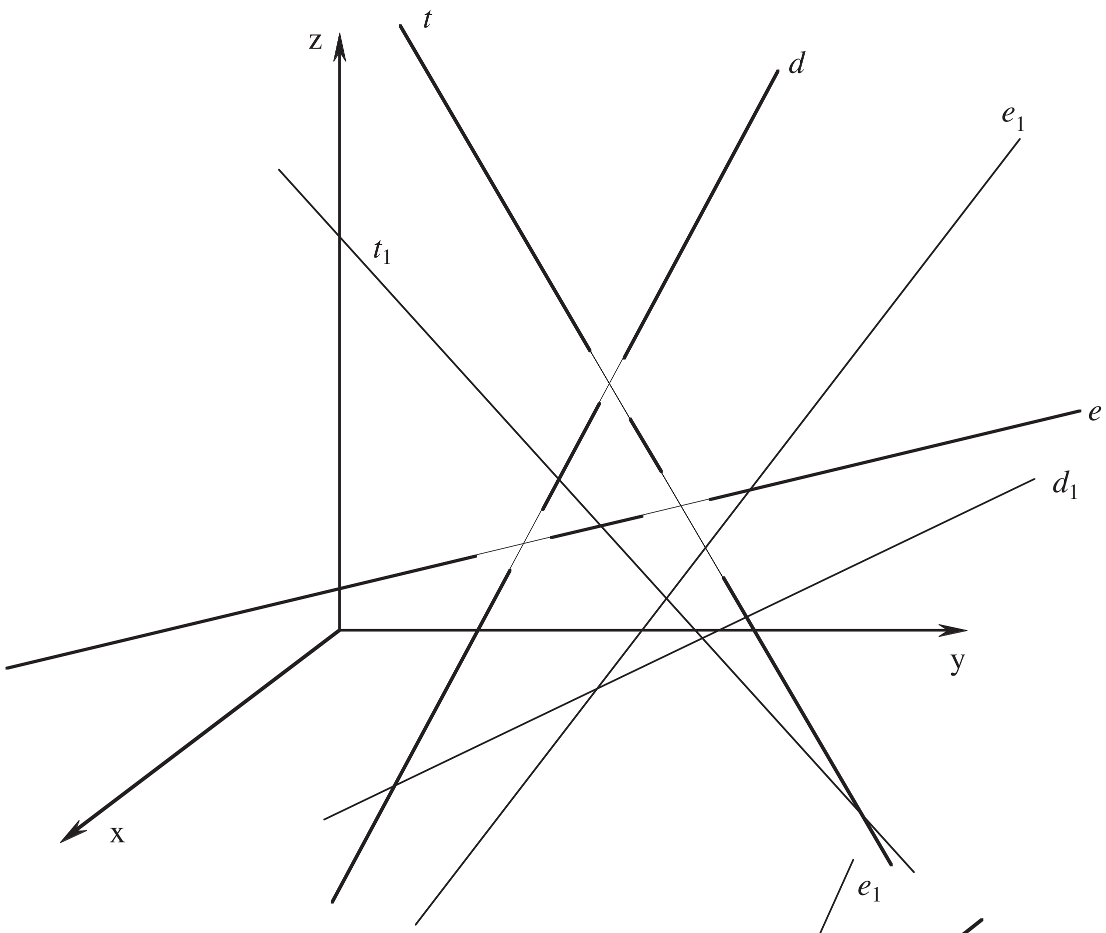
Compléter les figures suivantes en donnant la visibilité de $d$ par rapport $t$ ($d_1$ et $t_1$ étant les projections verticales de $d$ et $t$ sur le sol)

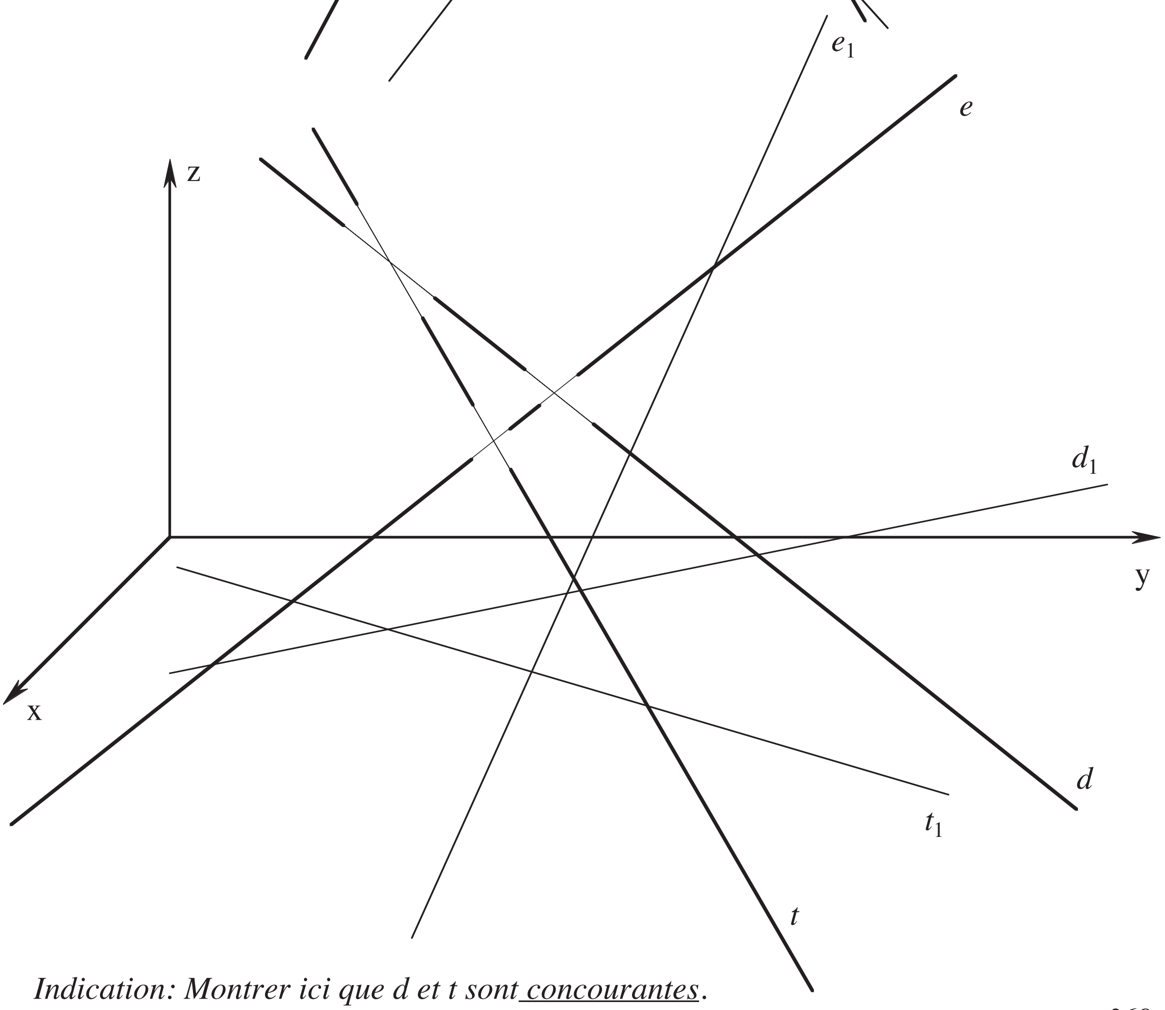


**Exercice 3.16:**

Compléter les figures suivantes en donnant la visibilité entre les 3 droites $d$, $t$ et $e$



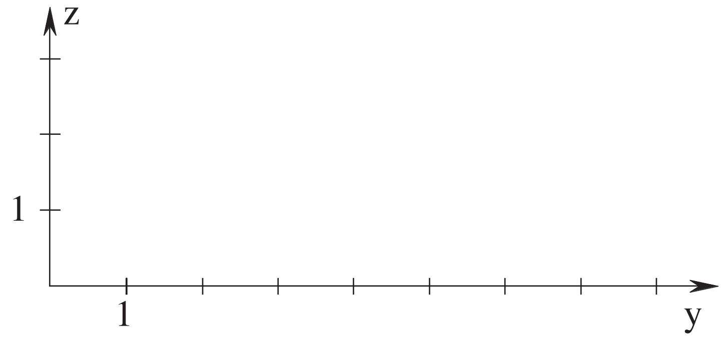




*Indication: Montrer ici que d et t sont concourantes.*

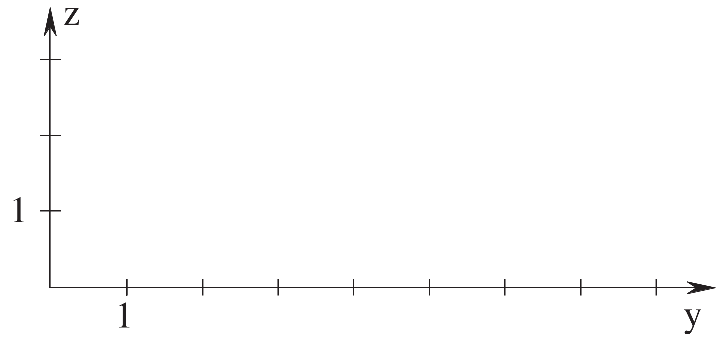
**Exercice 3.17:**

Dans l'axonométrie de noyau n = [3 ; 2 ; 1], on donne la droite *d* par deux points *A* et *B*. Construire *D'*, *D''* et *D'''* de *d* dans les cas suivants

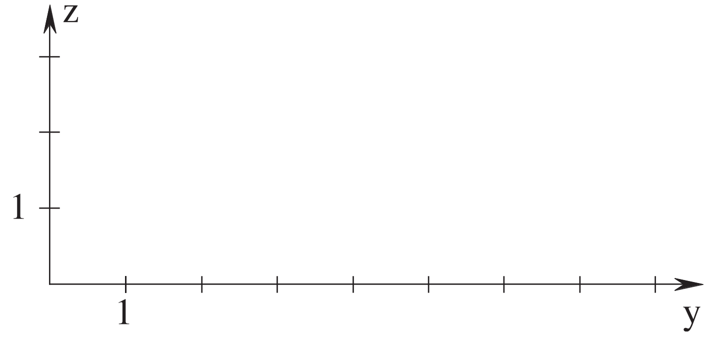
**a)** *A*(3 ; -1 ; 2) , *B*(-1 ; 6 ; -3)




**b)** *A*(2 ; -1 ; -1) , *B*(-1 ; 3 ; 2)

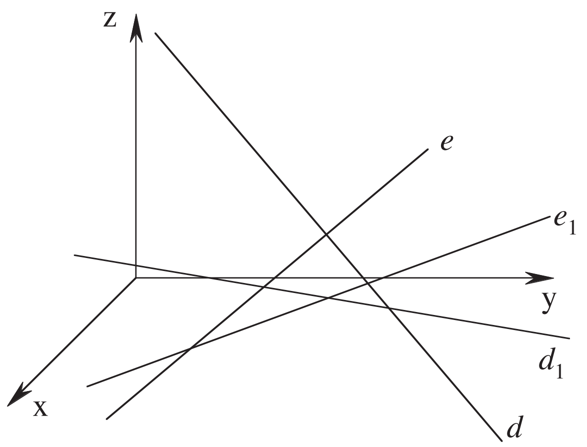


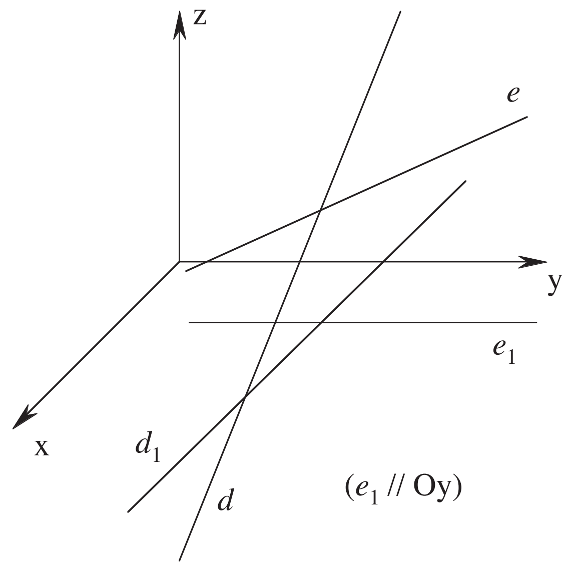

**c)** *A*(1 ; 3 ; 2) , *B*(4 ; 8 ; 1)

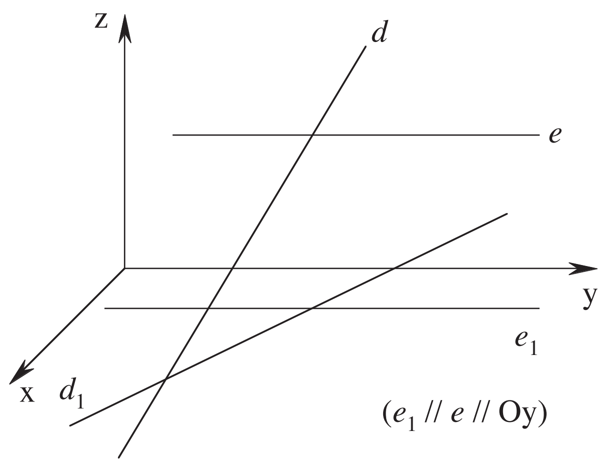


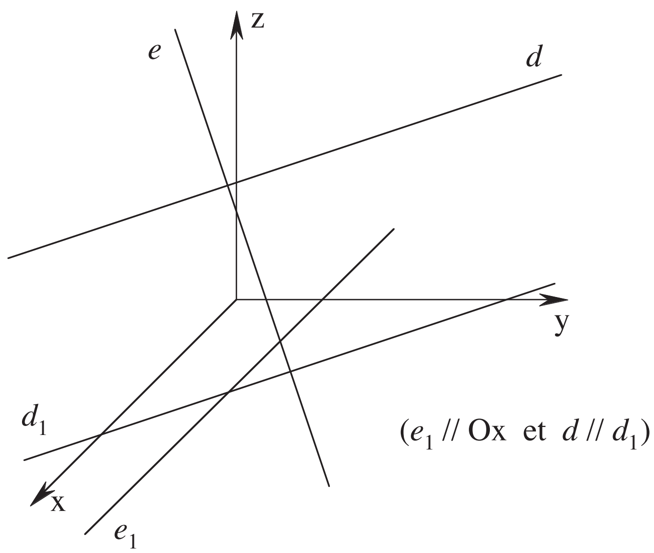
**Exercice 3.18:**

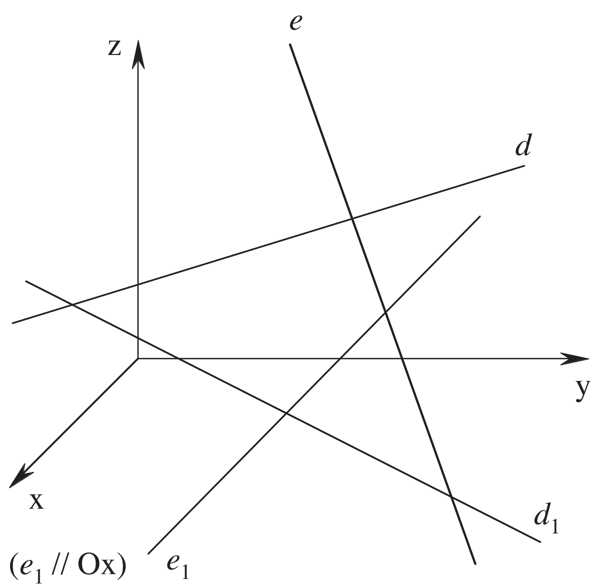
• Déterminer les traces des droites *d* et *e* sur les plans Oxy, Oxz et Oyz
• En déduire, si elles existent, les traces du plan formé par ces droites sur les 3 plans de bases.

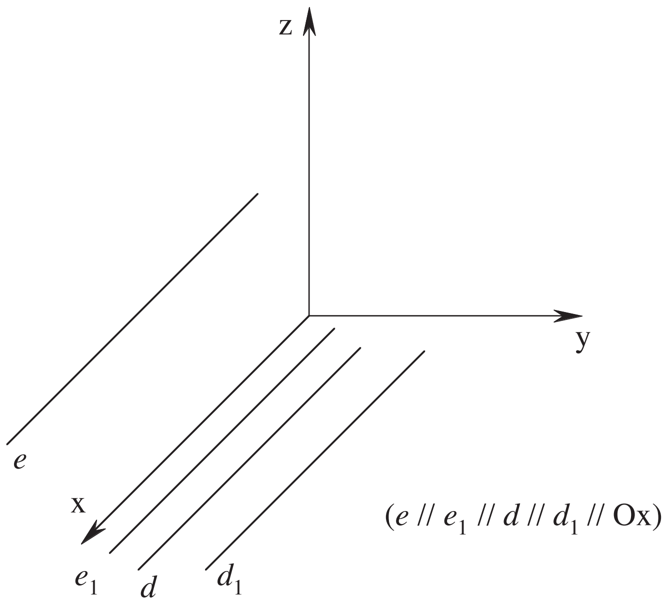


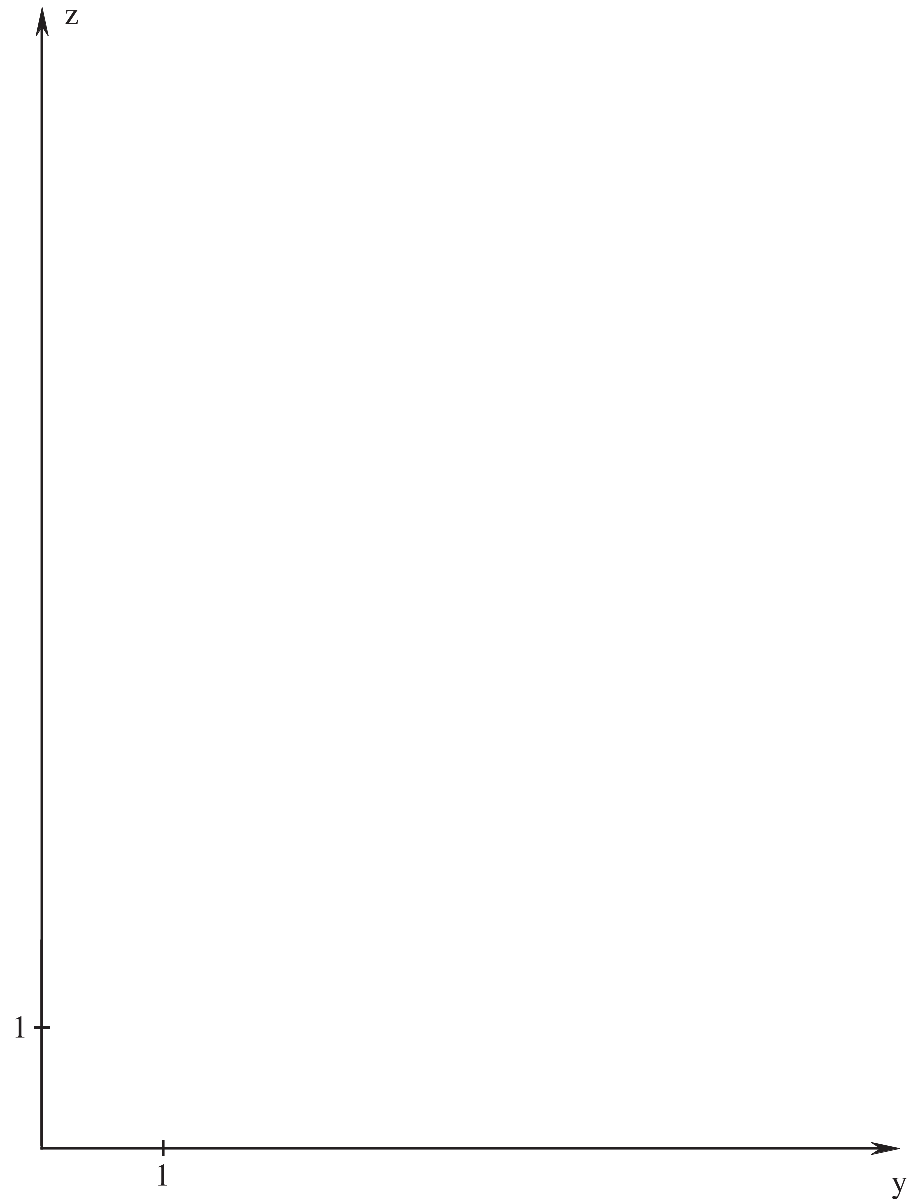



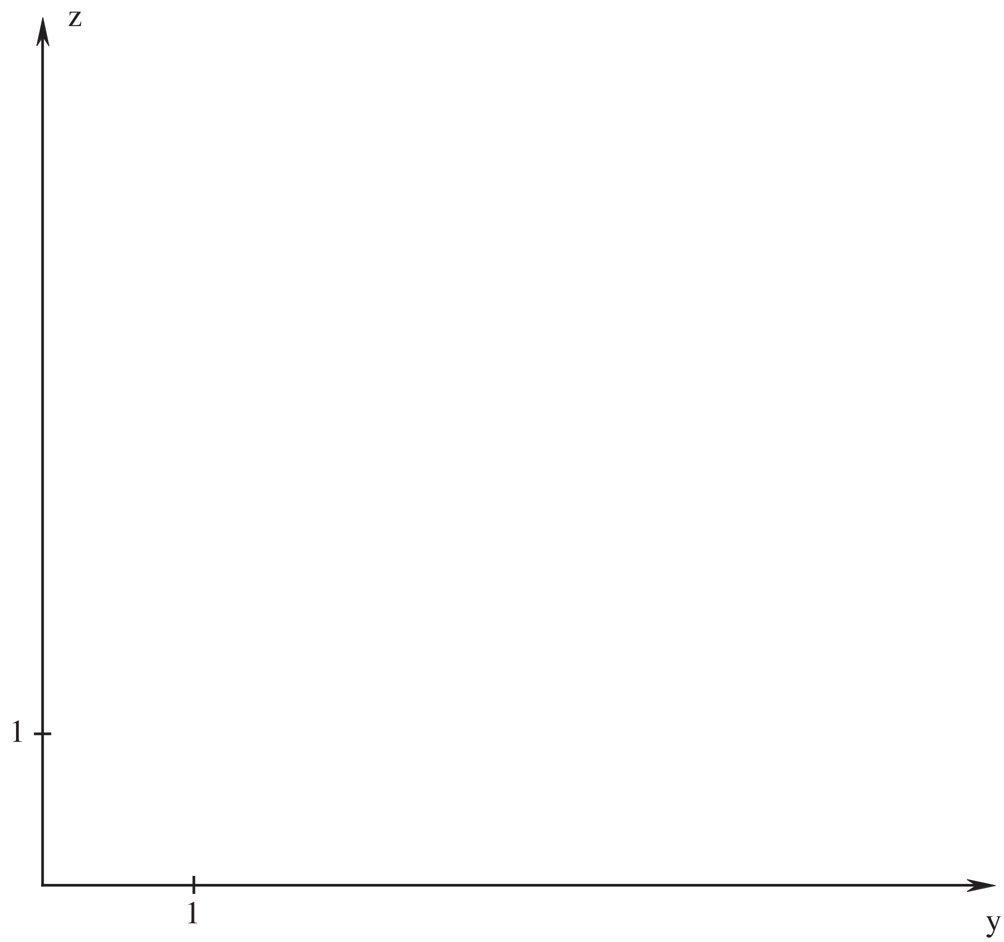
**Exercice 3.19:**

Chercher les traces du plan *ABC* avec les 3 plans de base dans une axonométrie de noyau n = [2 ; 1 ; 1]:
*A*(2 ; 3 ; 4)  *B*(3 ; 7 ; 1)  et  *C*(3 ; 1 ; 1)



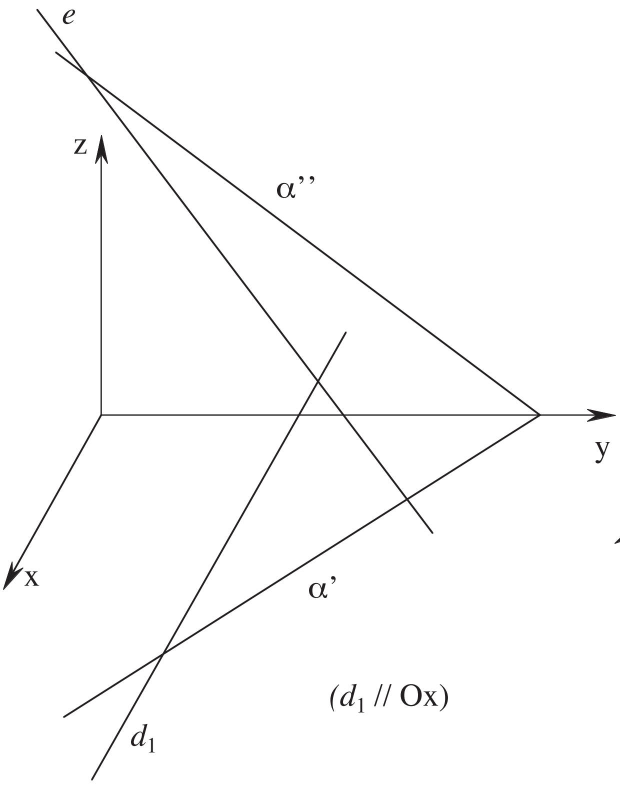
**Exercice 3.20:**

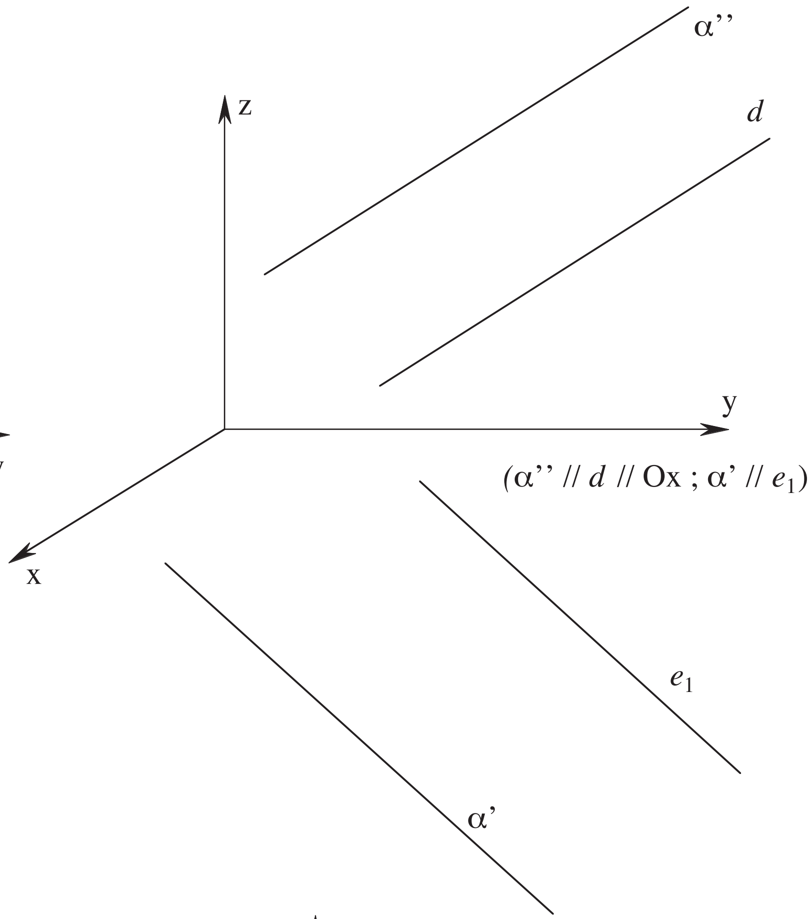
Chercher les traces du plan *ABC* avec les 3 plans de base dans une axonométrie de noyau n = [2 ; 1 ; 1]:
*A*(2 ; 3 ; 4)  *B*(3 ; 7 ; 1)  et  *C*(3 ; 1 ; 8)

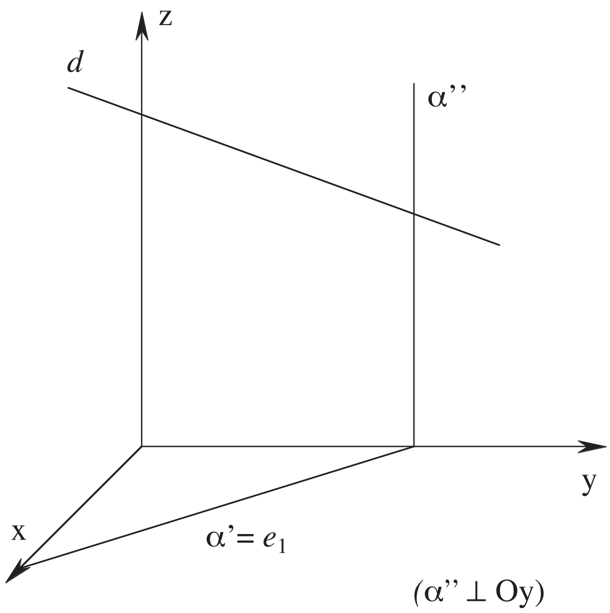


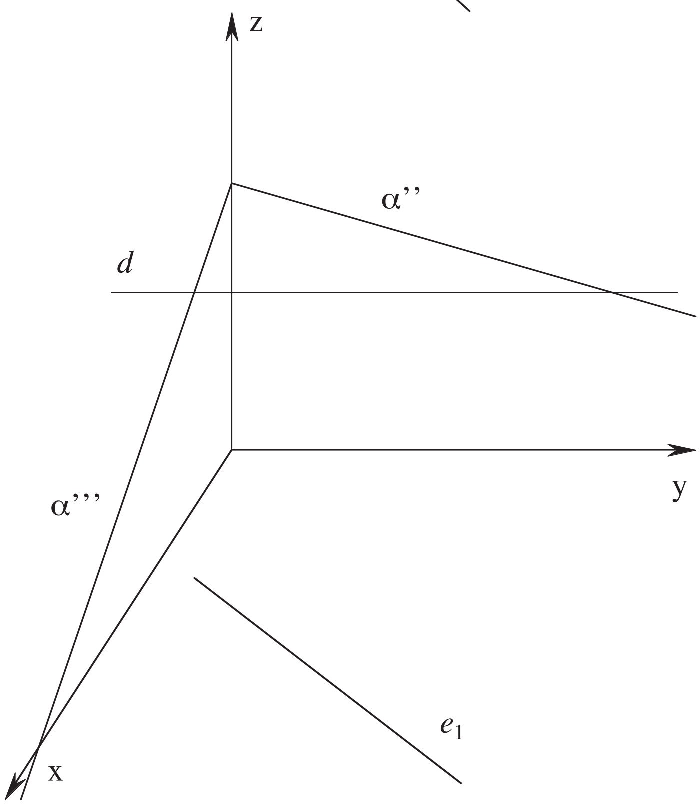
**Exercice 3.21:**

Trouver l'image axonométrique ou la première projection d'une droite d'un plan α donné par ses traces, connaissant la première projection ou l'image axonométrique de cette droite



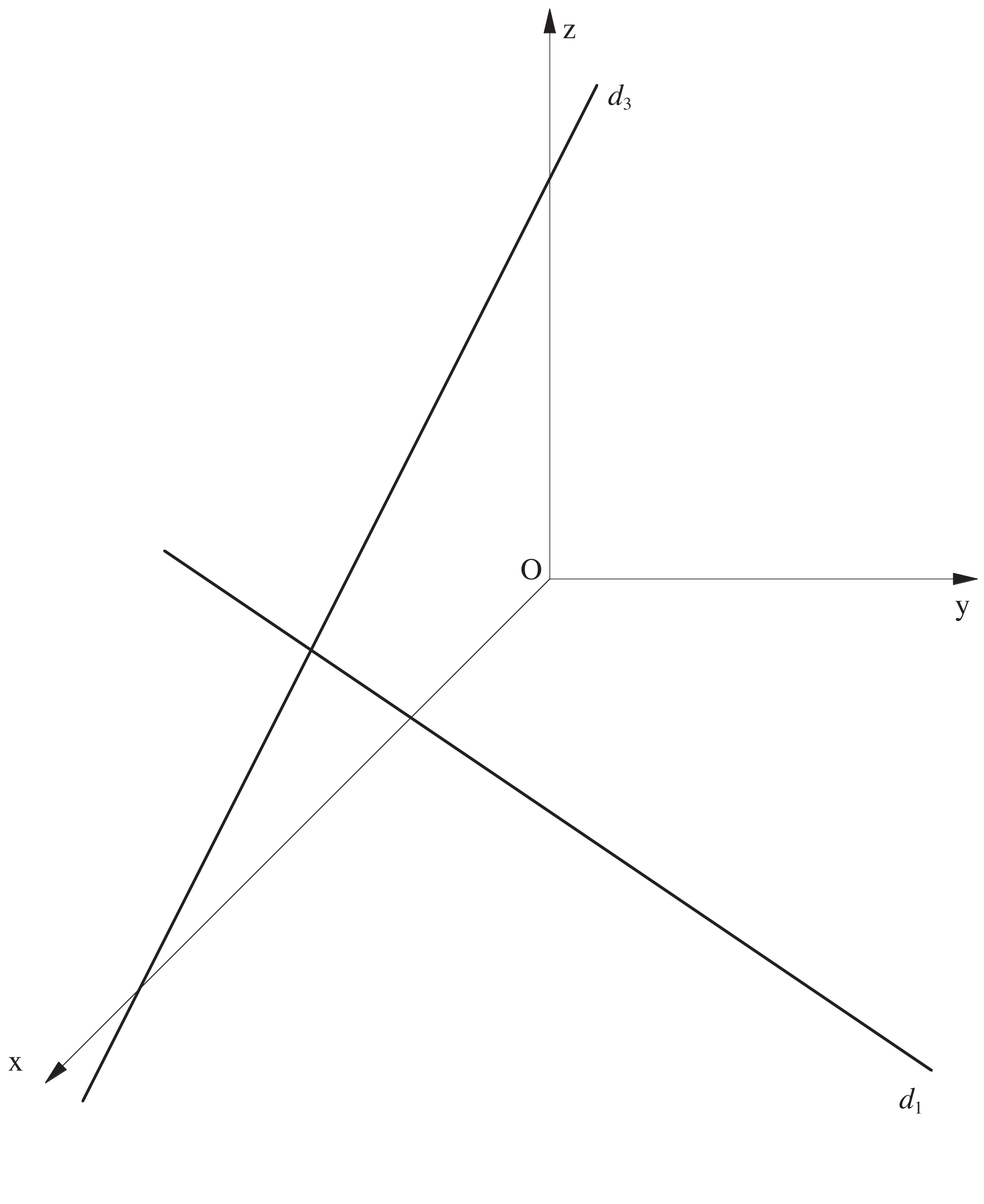



**Exercice 3.22:**

Dans une axonométrie cavalière, on donne les 2 projections $d_1$ et $d_3$ d'une droite $d$.

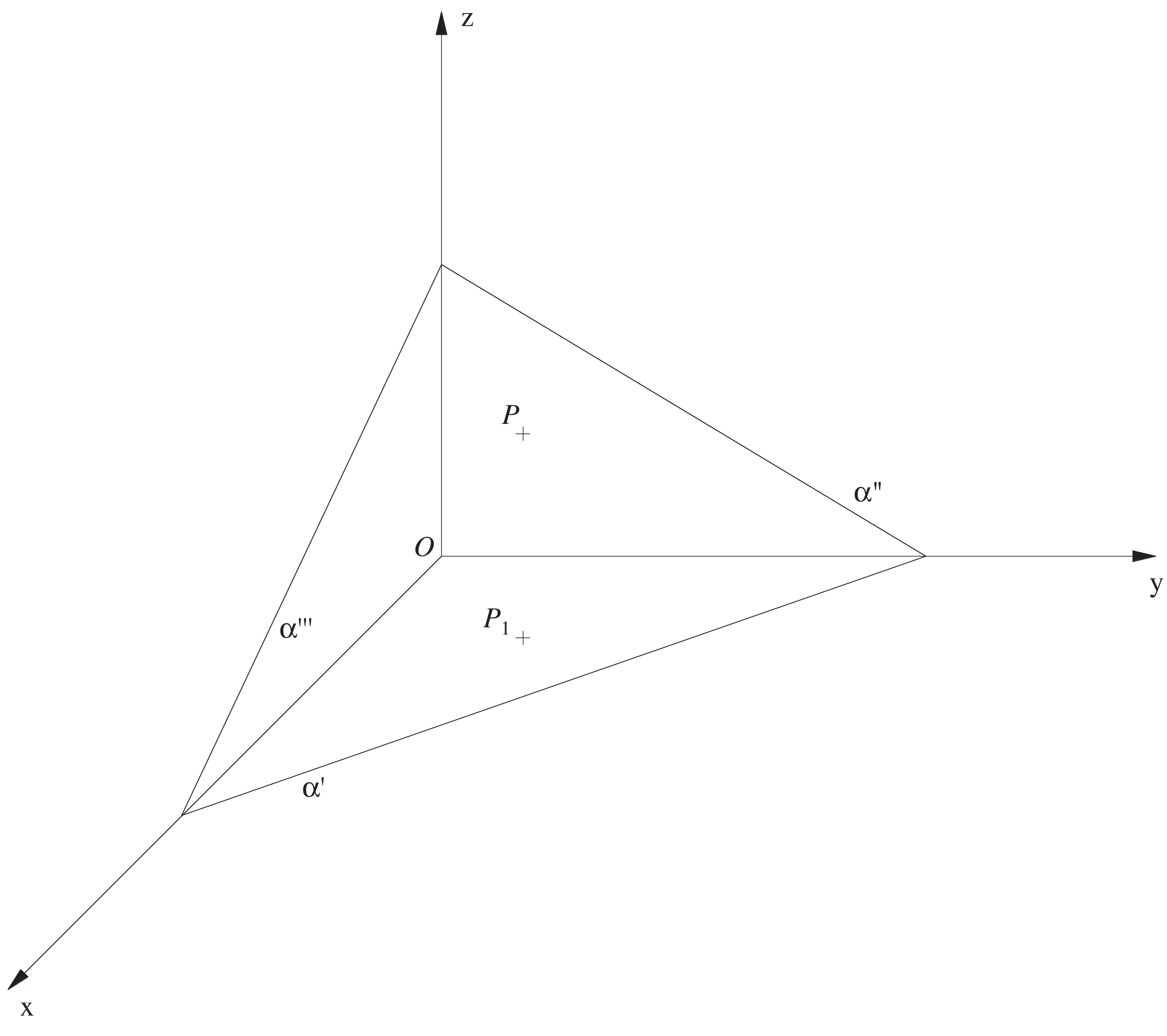
Construire la droite $d$ ainsi que ses traces $D'$, $D''$ et $D'''$.



**Exercice 3.23:**

Construire dans l'axonométrie cavalière donnée, les trois traces du plan β parallèle au plan α et passant par le point *P*.

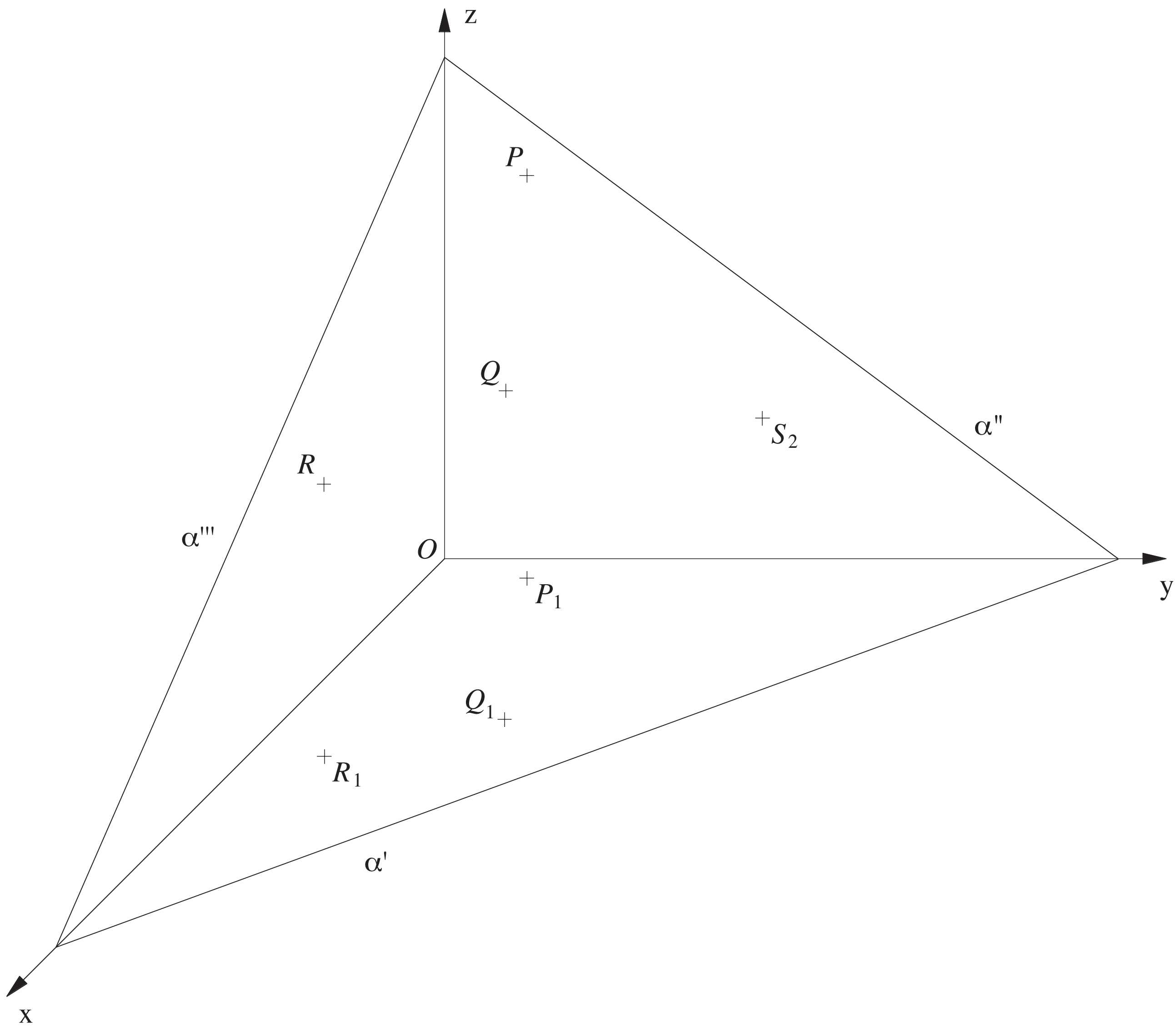
<u>*Indication:*</u> *Introduire le plan vertical contenant les points O et P*



**Exercice 3.24:**

Un plan $\alpha$ est donné par ses 3 traces.

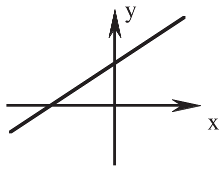
- Montrer par une construction annexe que le point $P$ appartient au plan $\alpha$
- Justifier si les points $Q$ et $R$ se trouvent au dessus ou au dessous du plan $\alpha$
- Construire l'image axonométrique de $S$ contenu dans $\alpha$ connaissant sa projection $S_2$ dans le plan Oyz



## §3. Un lien entre l'axonométrie et l'algèbre.

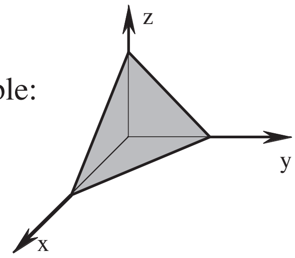
On rappelle que l'équation d'<u>une droite</u> dans le plan Oxy est de la forme:

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y =$$




L'équation d'<u>un plan</u> dans l'espace est d'une forme comparable:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z =$$




**Exercice 3.25:**

**a)** Déterminer algébriquement l'équation du plan $\alpha$ contenant les points $A(1 ; 2 ; 6)$ ; $B(2 ; 1 ; 3)$ ; $C(4 ; 3 ; 5)$

**b)** Déterminer les équations des 3 traces sur les plans de base

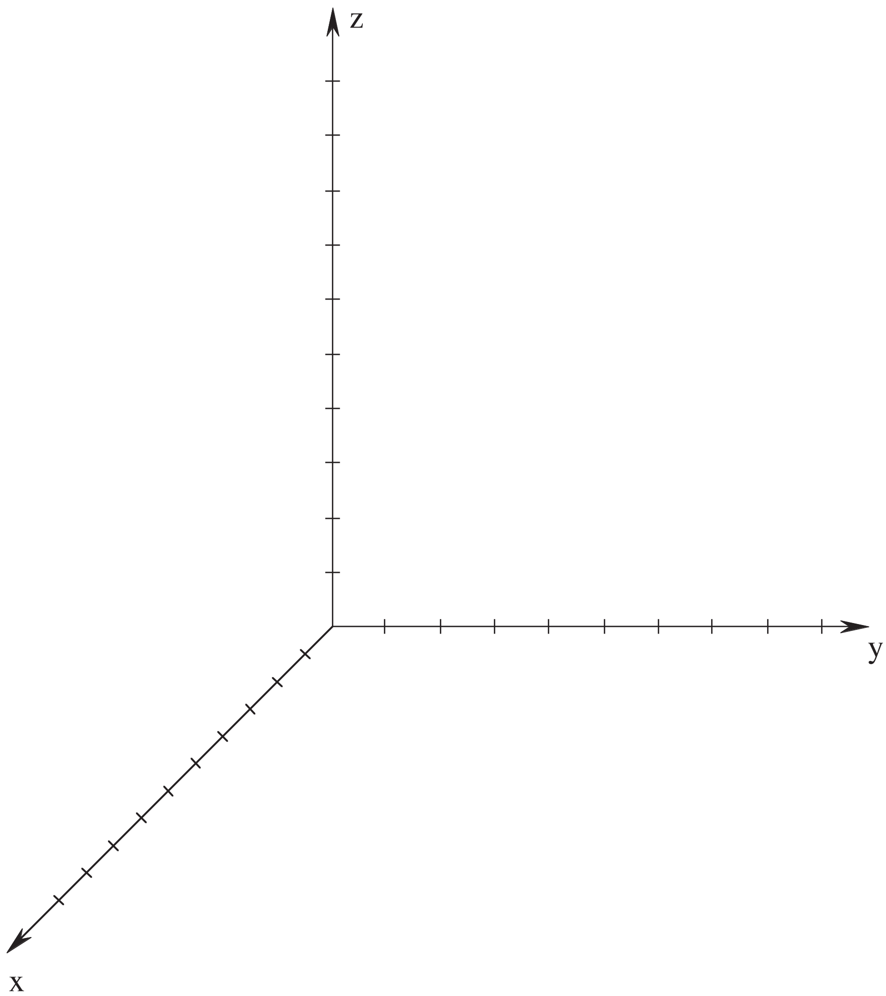
**Exercice 3.26:**

**a)** Déterminer algébriquement l'équation du plan $\alpha$ contenant les points
$A(2 ; -1 ; -1)$ ; $B(-1 ; 2 ; 2)$ ; $C(0 ; 0 ; 3)$

**b)** Déterminer les équations des 3 traces sur les plans de base

**Exercice 3.27:**

Déterminer l'image axonométrique du plan d'équation $z = -2x - 4y + 8$
Le point $A(1 ; 3 ; -5)$ se situe-t-il au dessus, en dessous ou dans le plan ?
Même question avec le point $B(-2 ; -1 ; 0)$



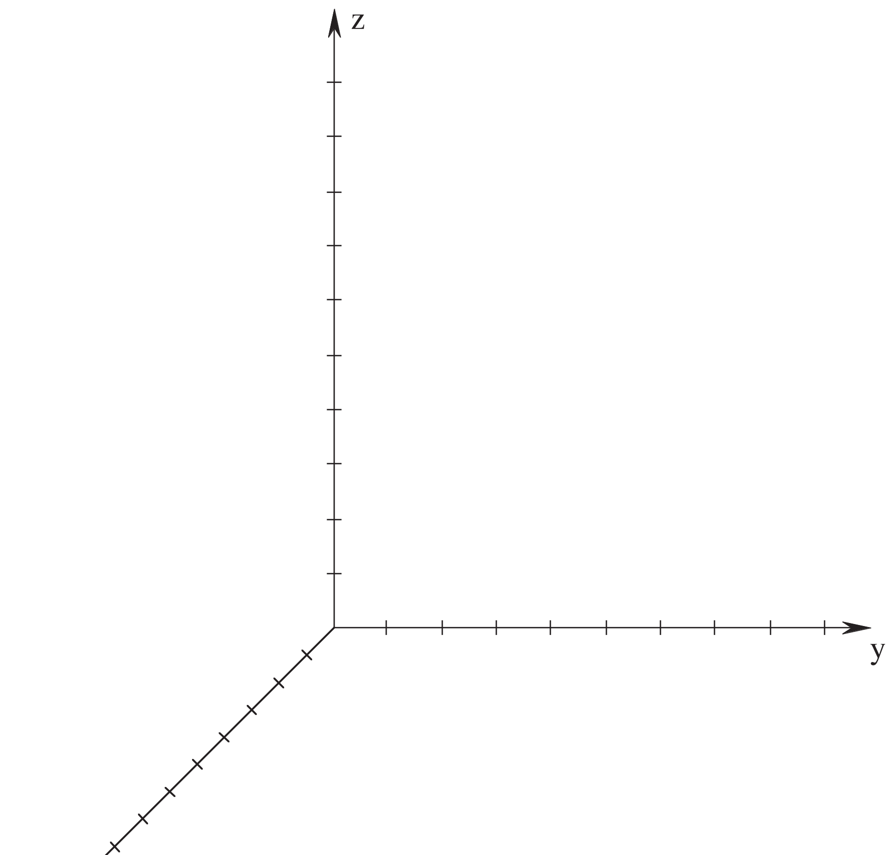
**Exercice 3.28:**

Soit les points $A(2 ; 2 ; 5)$ ; $B(4 ; 4 ; 0)$ ; $C(1 ; -1 ; 10)$

**a)** Déterminer algébriquement l'équation du plan $\alpha$ contenant ces 3 points.

**b)** Déterminer les équations des 3 traces de $\alpha$ sur les plans de base.

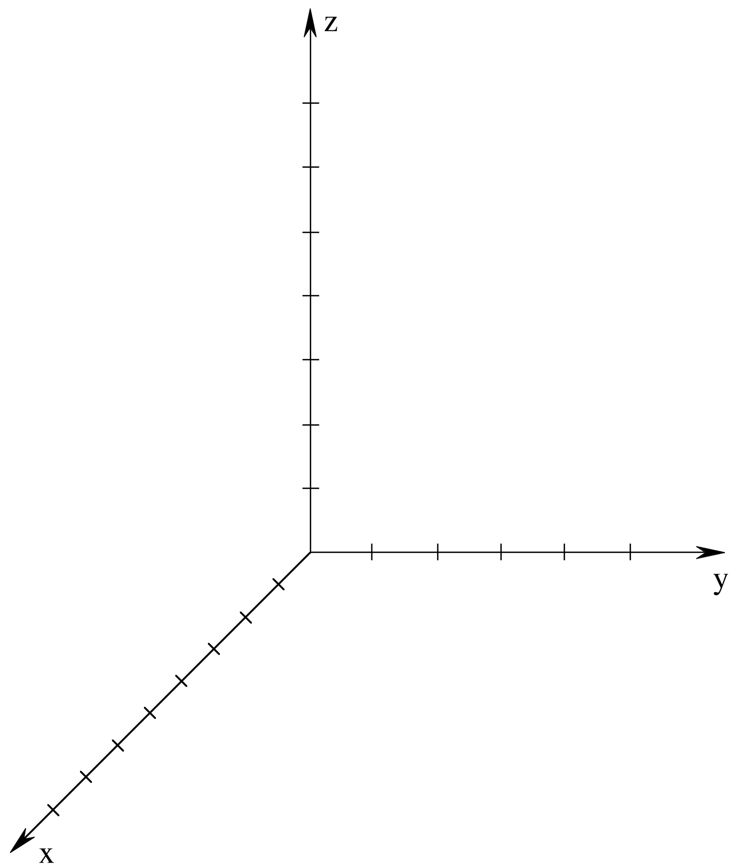
**c)** Représenter l'image axonométrique de toutes ces informations.



**Exercice 3.29:** Comparaison de la méthode géométrique et la méthode algébrique

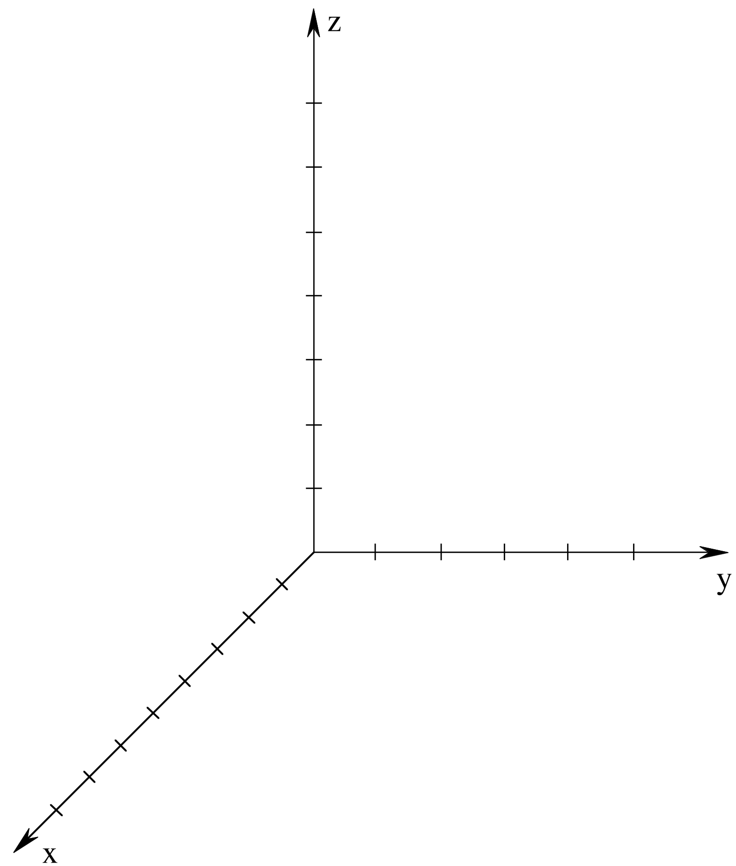
Soit $A(3 ; 1 ; 3)$ $B(1 ; 1 ; 3)$ et $C(0 ; 0 ; 6)$

Construire géométriquement les traces du plan *ABC* avec les 3 plans de base dans l'axonométrie proposée




Soit $A(3 ; 1 ; 3)$ $B(1 ; 1 ; 3)$ et $C(0 ; 0 ; 6)$

- Chercher l'équations du plan *ABC* et de ses traces avec les 3 plans de base
- Représenter ses traces



**Exercice 3.30:**

On considère les 3 plans:

$(\alpha) : z = 2x - y - 4$ $\quad\quad$ $(\beta) : z = -x - 5/4y + 10$ $\quad\quad$ $(\gamma) : z = 3$

**a)** Représenter ces 3 plans dans l'axonométrie proposée.
**b)** Construire géométriquement le pt d'intersection *I* de ces 3 plans.
**c)** Calculer algébriquement les coordonnées de ce même point *I*. Comparer.