Notions élémentaires

Monographies de la Commission Romande de Mathématique 27
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et Physique

Notions élémentaires

éditions du Tricorne

Ouvrages disponibles publiés par la Commission Romande de Mathématique

S. PAHUD
Géométrie expérimentale I, II et III (Livre de l'élève)
Géométrie expérimentale I, II et III (Notes méthodologiques à insérer)

OUVRAGES COLLECTIFS DE LA CRM
Nº 18 Géométrie 2
Nº 19 Algèbre
Nº 20 Algèbre linéaire
Nº 21 Méthodes numériques (M.-Y. BACHMANN, H. CATTIN, P. ÉPINEY, F. HAEBERLI et G. JENNY)
Nº 23 Géométrie vectorielle et analytique plane
Nº 24 Géométrie vectorielle et analytique de l'espace
Nº 25 Analyse
Nº 26 Probabilités
Nº 27 Notions élémentaires

CAHIERS DE LA CRM

Nº 1	Suites de nombres réels	Alex WILLA
Nº 2	Cryptologie	Nicolas MARTIGNONI
Nº 3	Équations algébriques et nombres complexes	Martin CUÉNOD

CRM, CRP et CRC

Formulaires et Tables (Mathématique, Physique, Chimie)

Site web de la CRM

http://www.sspmp.ch/crm/

Diffusion Pahud & Cie
Pré de Vaux
1268 Begnins
http://www.diffusionpahud.ch/

© 2007 Éditions du Tricorne
http://www.tricorne.org/
ISBN 978-2-8293-0283-1

Toute reproduction d'un extrait de ce livre par quelque procédé que ce soit, notamment par photocopie ou numérisation, est interdite.

Auteurs

Le présent ouvrage est le fruit d'un travail collectif de la Commission Romande de Mathématique (CRM), qui est actuellement composée de Mesdames et Messieurs

Patrick HOCHULI (Gymnase français, Bienne), président de la CRM
* Chantal ARLETTAZ (Gymnase Auguste Piccard, Lausanne)
Fabien AUGSBURGER (Collège de Gambach, Fribourg)
Bernard AYMON (Collège de l'Abbaye, Saint-Maurice)
* Jean-Marc LEDERMANN (Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel)
Nicolas MARTIGNONI (Haute École pédagogique, Fribourg)
Ewa MIAZZA (Collège Voltaire, Genève)
Sandrine OSTERMANN (Gymnase de Chamblandes, Pully)
* Jean PIQUEREZ (C.E.C. Mme de Staël, Genève)
Alain STUCKI (Lycée Cantonal, Porrentruy)
Patrick TURTSCHY (Lycée Blaise-Cendrars, La Chaux-de-Fonds)
Alex WILLA (Collège des Creusets, Sion)

A également collaboré à l'élaboration de cet ouvrage,
l'ancien membre de la CRM

* Charles KRATZER (Gymnase de Chamblandes, Pully)

Les rédacteurs du texte sont désignés par un astérisque.

Préface

En 1982 paraissait la 1[re] édition de l'ouvrage *Notions élémentaires* dont une nouvelle édition remaniée et complétée était proposée en 1986. Cette même année, la Commission Romande de Mathématique (CRM) éditait le livre intitulé *Algèbre.*

Depuis lors, la présentation des matières enseignées au secondaire II a bien évolué et une remise à jour de ces deux volumes s'imposait. Dans le courant de l'année 2000, la CRM décidait de fondre en un seul volume les deux ouvrages en question et d'en profiter pour proposer un manuel mieux adapté aux exigences de la nouvelle maturité. Un groupe de travail fut ainsi chargé de la rédaction d'un nouvel ouvrage également intitulé *Notions élémentaires.*

Notions élémentaires est le fruit d'un travail collectif des membres de la CRM. Je me plais à exprimer mes vifs remerciements à toutes celles et tous ceux qui, par leurs suggestions, leurs remarques et leurs compétences techniques, en ont permis une réalisation de qualité.

Eugène Pasquier
Mai 2005

Avant-propos

Avec la parution du nouveau *Notions élémentaires*, la Commission Romande de Mathématique (CRM) espère répondre à l'un des objectifs premiers de sa série de monographies : contribuer à une meilleure coordination entre les enseignants romands en leur offrant des ouvrages de référence conformes aux exigences de la maturité gymnasiale.

Le fil rouge du présent ouvrage est la notion de fonction, d'importance fondamentale en mathématiques.

Les éléments de théorie sont présentés de manière succinte et une approche intuitive a parfois été préférée à un strict formalisme, laissant ainsi à l'utilisateur le choix d'effectuer des développements plus approfondis lorsqu'il le jugera nécessaire.

Un vaste choix d'exercices et de problèmes sont proposés et leurs réponses sont données à la fin de chaque chapitre. Il conviendra d'y faire une sélection judicieuse.

La CRM remercie vivement le groupe de travail qui s'est investi dans la réalisation de cet ouvrage.

Commission Romande de Mathématique
Mai 2005

Table des matières

1. Premières notions

1.1 Ensembles

Une collection d'objets est un **ensemble** lorsque l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection. Ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.

Si l'élément x **appartient** à l'ensemble E, on écrit $x \in E$.

Si l'élément x n'**appartient pas** à l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

Sous-ensemble

Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On note $A \subset B$ et on lit « A inclus dans B ».

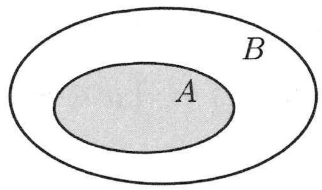


Diagramme de Venn[1]

Exemple

$A = \{a\,;b\,;c\,;d\}$, $B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\}$ et $C = \{c\,;d\,;e\,;f\}$

L'ensemble A est un sous-ensemble de B, mais A n'est pas un sous-ensemble de C.

[1] John VENN, mathématicien anglais (1834–1923)

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels, $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;...\}$

$\mathbb{N}^*$: ensemble des nombres naturels non nuls, $\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;...\}$

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers (relatifs), $\mathbb{Z} = \{...\,;-1\,;0\,;1\,;...\}$

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels (fractions)

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs

$\varnothing$: ensemble vide, également noté $\{\}$ (ensemble qui ne contient aucun élément)

On peut définir un ensemble en

- énumérant ses éléments, $A = \{5\,;10\,;15\,;20\,;25\,;...\}$
- donnant une condition d'appartenance, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 5\,n, n \in \mathbb{N}^*\}$

Intervalles réels

Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, on note :

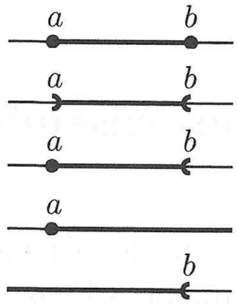
$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervalle **fermé**

$]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle **ouvert**

$[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

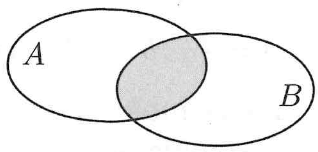
$]-\infty\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



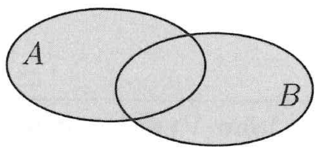
Opérations sur les ensembles

Soit A et B deux ensembles.

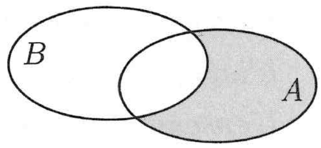
L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit « A inter B ».



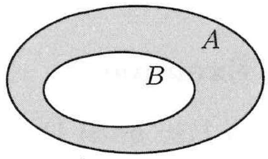
La **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B (ou aux deux). On note cet ensemble $A \cup B$ et on lit « A union B ».



La **différence** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais non à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \smallsetminus B$ et on lit « A moins B ».



Si B est un sous-ensemble de A, la différence $A \smallsetminus B$ est également appelée **complémentaire** de B dans A que l'on note $\complement_A B$.



Exemple 1

$A = \{a\,;b\,;c\,;d\}$, $B = \{c\,;d\,;e\,;f\}$
$A \cap B = \{c\,;d\}$, $A \cup B = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\}$, $A \smallsetminus B = \{a\,;b\}$

Exemple 2

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \smallsetminus \{0\}$ *est l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;*

$\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ *est l'ensemble des nombres irrationnels.*

1.2 Fonctions

Une **fonction** ou **application** d'un ensemble D dans un ensemble A est une correspondance qui associe à chaque élément de D un et un seul élément de A.

La fonction se note souvent :

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

où D est appelé l'**ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée** de f.

L'élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.

Une formule permettant de calculer les images $f(x)$ est appelée **expression fonctionnelle** de f.

L'**ensemble image** par f est l'ensemble des images des éléments de l'ensemble de départ. On le note $f(D)$ ou $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 1

Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *donnée par l'expression fonctionnelle* $f(x) = x^2 + 5$

L'image de 3 est $f(3) = 3^2 + 5 = 14$
L'image de -2 *est* $f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$
L'ensemble image de f *est l'intervalle* $[\,5\,;+\infty\,[$.

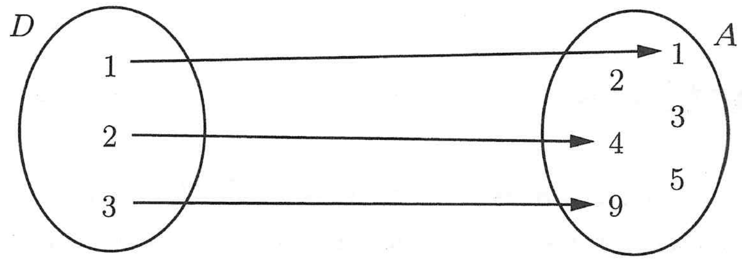
Exemple 2

Si l'on note P *l'ensemble des polygones convexes et* p *un tel polygone, on peut considérer la fonction*

$$\begin{aligned} f : P &\to \mathbb{N} \\ p &\mapsto \text{somme des angles intérieurs exprimés en degrés} \end{aligned}$$

$f(\text{triangle}) = 180$, $f(\text{quadrilatère}) = 360$, $f(\text{pentagone}) = 540$
$\text{Im}(f) = \text{multiples de } 180 = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 180\,k\,,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemple 3



L'image de 1 est 1, celle de 2 est 4, 9 est l'image de 3.
Ensemble de départ : $D = \{1\,;2\,;3\}$
Ensemble d'arrivée : $A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;9\}$
Ensemble image : $\text{Im}(f) = \{1\,;4\,;9\}$
Expression fonctionnelle : par exemple $f(x) = x^2$

L'ensemble des couples $\big(x\,;f(x)\big)$, où $x \in D$, est appelé le **graphe** de la fonction f.

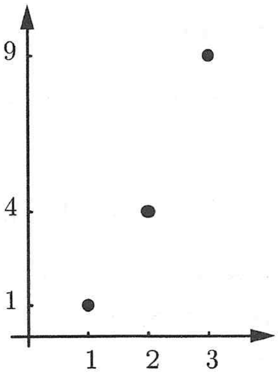
Exemple

Pour la fonction de l'exemple précédent, le graphe est formé des couples $(1\,;1)$, $(2\,;4)$ *et* $(3\,;9)$.

On peut représenter le graphe d'une fonction dans le plan muni d'un système d'axes.

Exemple

Toujours pour la même fonction, le graphe est formé des trois points $(1\,;1)$, $(2\,;4)$ *et* $(3\,;9)$.

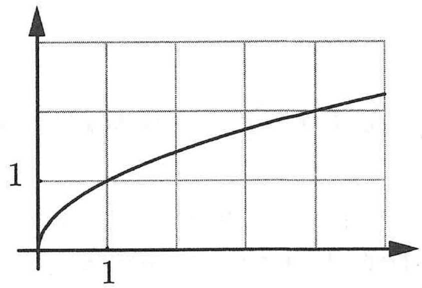


La représentation graphique d'une fonction, donnée par l'équation $y = f(x)$ est aussi appelée **graphe** de la fonction.

Exemple 1

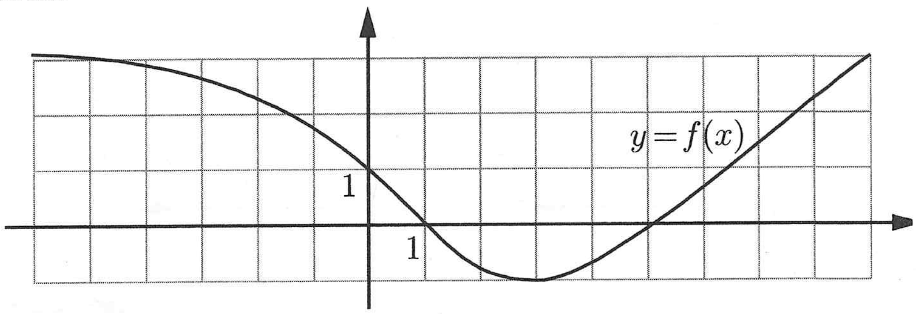
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

L'expression fonctionnelle de f *est* $f(x) = \sqrt{x}$.
L'ensemble image est Im(f*)=* $\mathbb{R}_+$.
Le graphe contient entre autres les points $(0\,;0)$, $(0.25\,;0.5)$, $(1\,;1)$ *et* $(4\,;2)$.



Exemple 2

La fonction f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est donnée par la représentation graphique ci-dessous.*



On vérifie sur le dessin que:
$f(0) \cong 1$, $f(1) \cong 0$, $f(3) \cong -1$, $f(-1) \cong 1.8$, $f(9) \cong 3$, ...

Il n'est pas toujours facile de trouver une expression fonctionnelle dont le graphe correspond à un dessin donné !

Si, pour une fonction, les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas précisés, on choisit $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée et le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possible comme ensemble de départ. Ce dernier est appelé **ensemble de définition** de la fonction.

Exemple

L'ensemble de définition de la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$ *est* $D = [\,1\,;+\infty\,[$.

On appelle **zéros** d'une fonction f les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.
Les zéros de f sont donc les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox .

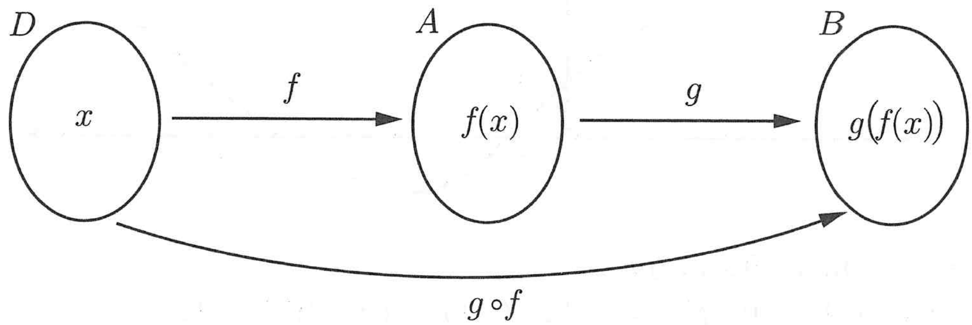
Exemple

Le zéro de la fonction donnée par $f(x) = 2\,x - 5$ *est la solution de l'équation* $2\,x - 5 = 0$. *On trouve* $x = \frac{5}{2}$.
Le graphe de f *coupe l'axe* Ox *au point* $I(\frac{5}{2}\,;0)$.

1.3 Composition de fonctions

Si f est une fonction de D dans A et g une fonction de A dans B, on note $g \circ f$ la **fonction composée** de f et de g . La fonction $g \circ f$ fait correspondre à tout élément x de D l'élément $y = g\big(f(x)\big)$ de B .
Notation : $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$
$$x \xmapsto{\quad g\circ f \quad} g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$$



Exemple

On donne $f(x) = 3\,x^2$ *et* $g(x) = 2\,x - 1$

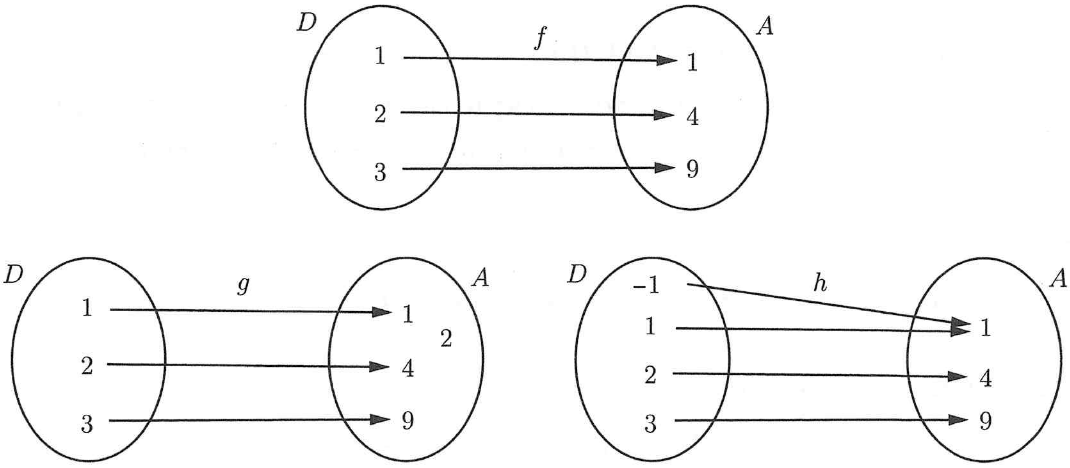
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3\,x^2) = 2\,(3\,x^2) - 1 = 6\,x^2 - 1$$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2\,x - 1) = 3\,(2\,x - 1)^2 = 12\,x^2 - 12\,x + 3$$

Cet exemple montre que $g \circ f$ est en général différent de $f \circ g$.

1.4 Fonction réciproque

Une fonction $f : D \to A$ est une **bijection** si chaque élément de A est image d'un et d'un seul élément de D.

Exemple 1



La fonction f est une bijection de D dans A alors que ni g (2 n'est pas image) ni h (1 est image de 1 et de -1) ne le sont.

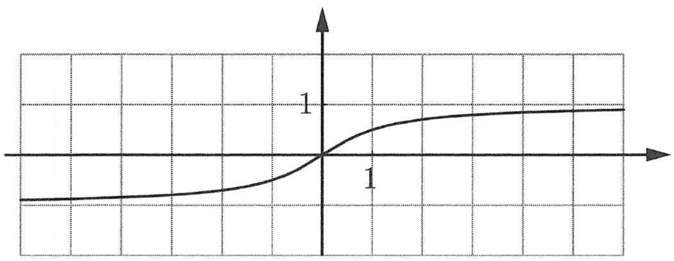
Exemple 2

La fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *n'est pas une bijection.*

En revanche, la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *en est une.*

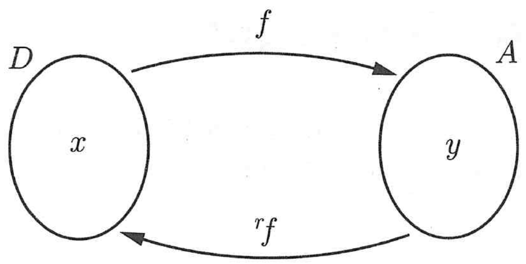
Exemple 3

La fonction f, dont le graphe est donné ci-dessous, n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle semble être une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.



Si $f : D \to A$ est une bijection, alors on peut définir la **fonction réciproque** ^rf de A dans D.

$$\begin{array}{rccl} f : & D & \to & A \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} ^rf : & A & \to & D \\ & y & \mapsto & ^rf(y) = x \end{array}$$



On vérifie que $({}^r f \circ f)(x) = x$ et que $(f \circ {}^r f)(y) = y$.

Pour trouver l'expression de la réciproque de f , on résout, par rapport à x , l'équation $y = f(x)$. On obtient ainsi une équation $x = {}^r f(y)$.

Exemple

La fonction $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x-6 \end{array}$ *est une bijection.*

Cherchons sa réciproque ${}^r f$ *.*

$$y = 2x - 6 \Leftrightarrow y + 6 = 2x \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}y + 3$$

La fonction $\begin{array}{rccl} {}^r f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \frac{1}{2}y+3 \end{array}$ *est la réciproque de* f *.*

On peut aussi la noter $\begin{array}{rccl} {}^r f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}x+3 \end{array}$

Les graphes d'une bijection f et de sa réciproque ${}^r f$ sont symétriques par rapport à la bissectrice du 1^er^ quadrant (dans un système d'axes orthonormés).

Exemple

La fonction $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *est une bijection.*

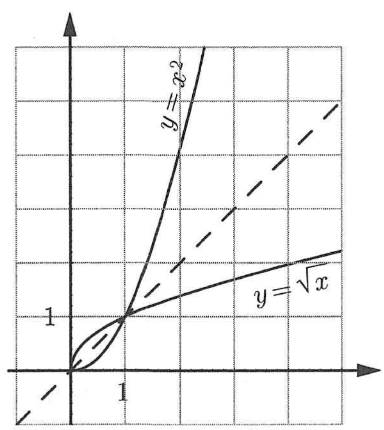
Cherchons sa réciproque ${}^r f$ *.*

$$y = x^2 \text{ avec } x \text{ positif} \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$$

La fonction $\begin{array}{rccl} {}^r f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$

est la réciproque de f *.*

On la note $\begin{array}{rccl} {}^r f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$



1.5 Exercices

1. a) Enumérer les éléments des ensembles suivants.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n - 1\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ n \leq 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 10\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

b) Décrire les ensembles suivants en donnant une condition d'appartenance.

$A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$

$B = \{1\,;4\,;9\,;16\,;25\,;....\,;169\}$

$C = \{1\,;4\,;7\,;10\,;13\,;16\,;19\}$

$D = \{\frac{1}{2}\,;\frac{1}{5}\,;\frac{1}{10}\,;\frac{1}{17}\,;\frac{1}{26}\}$

$E = \{0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{5}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{5}{7}\,;...\}$

$F = \{1\,;2\,;4\,;8\,;16\,;...\,;1024\}$

2. Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 5\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ et } x \leq 2\}$

$F = \mathbb{R}$

$G = \{2\}$

3. Trouver deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}$ tels que

a) $A \cup B = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et $A \cap B = \{\}$

b) $A \cup B = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et $A \cap B = \{2\,;3\,;4\}$

4. Dans l'ensemble T des triangles, on considère

I, le sous-ensemble des triangles isocèles

E, le sous-ensemble des triangles équilatéraux

R, le sous-ensemble des triangles rectangles

Représenter tous ces ensembles dans un diagramme, puis décrire les ensembles $I \cap E$, $E \cap R$ et $I \cap R$.

5. On donne les ensembles :

$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 11\}$ $\qquad$ $B = \{1;2;3;4;5\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \leq 5\}$

Décrire les ensembles suivants.

$D = A \setminus (B \cup C)$ $\qquad$ $E = (A \cup C) \setminus (A \cup B)$

$F = (B \cup C) \setminus (B \cup C)$ $\qquad$ $G = (A \setminus C) \cap (A \setminus B)$

6. Déterminer les éléments des sous-ensembles A et B de E sachant que: $E \setminus A = \{f;g;h;i\}$, $A \cup B = \{a;b;c;d;e;f\}$ et $A \cap B = \{d;e\}$

7. Donner les ensembles suivants à l'aide d'intervalles.

a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\qquad$ b) $\mathbb{R} \setminus]2;4[$

c) $\mathbb{R} \setminus [2;4]$ $\qquad$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 5\}$

8. Ecrire l'ensemble $]-\infty;-5[\cup [2;+\infty[$ comme le complémentaire d'un intervalle.

9. On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I \setminus (J \cup K)$, $(I \setminus J) \cup (I \setminus K)$ dans les cas suivants.

a) $I = [-3;4[$ $\qquad$ $J = [-2;0[$ $\qquad$ $K =]-5;3]$

b) $I =]-4;2]$ $\qquad$ $J = [-2;3]$ $\qquad$ $K =]-3;1[$

c) $I =]-5;3[$ $\qquad$ $J =]-1;5]$ $\qquad$ $K = [-3;4]$

10. Soit $D = \{-2;-1;0;1;2\}$. On considère les fonctions suivantes de D dans $\mathbb{Q}$. Enumérer les éléments de $f(D)$.

a) $f : x \mapsto 3x - 5$ $\qquad$ b) $f : x \mapsto x^2 - 3$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+4} - 1$ $\qquad$ d) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$

11. Donner l'ensemble image des fonctions suivantes.

$$a\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \text{reste de la division de } x \text{ par } 7 \end{array}$$

$$b\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad c\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$d\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2+x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2-x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array} \qquad e\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$$

12. Les correspondances suivantes sont-elles des fonctions ?
Justifier les réponses.

$$a\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 3x-2 \end{array} \qquad b\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 5x-7 \end{array}$$

$$c\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array} \qquad d\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$$

$$e\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 5x^2-5 \end{array} \qquad f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$$

$$g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$i\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array} \qquad j\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

13. Déterminer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5+x}$ d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2+9}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{(x-3)(x+4)}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{x-1}$

j) $f(x) = \dfrac{5\,x}{\sqrt{x+5}}$

k) $f(x) = \sqrt{2-x}$

l) $f(x) = \sqrt{1-2\,x}$

14. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.
Déterminer les points fixes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2\,x - 3$

b) $f(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{3}{2}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = x^2 + x - 9$

f) $f(x) = \dfrac{2\,x}{x+1}$

15. Diverses règles sont utilisées pour déterminer le dosage pour enfant d'un médicament en pourcentage du dosage pour adulte. Ces règles sont données en fonction de l'âge a d'un enfant de 2 à 13 ans.
Parmi ces règles, on trouve

la règle de Young : $Y(a) = \dfrac{100 \cdot a}{a+12}$

la règle de Cowling : $C(a) = \frac{100}{24}\,(a+1)$

Compléter le tableau suivant puis, à l'aide de ce tableau, répondre aux questions ci-dessous.

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$Y(a)$												
$C(a)$												

a) Pour quels âges la règle de Young produit-elle des dosages supérieurs à celle de Cowling ?

b) A quel âge ces dosages diffèrent-ils le plus ?

c) Quelle est alors la différence pour un dosage adulte de 10 ml ?

d) Quel pourcentage du plus petit dosage, cette différence représente-t-elle ?

16. Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes.

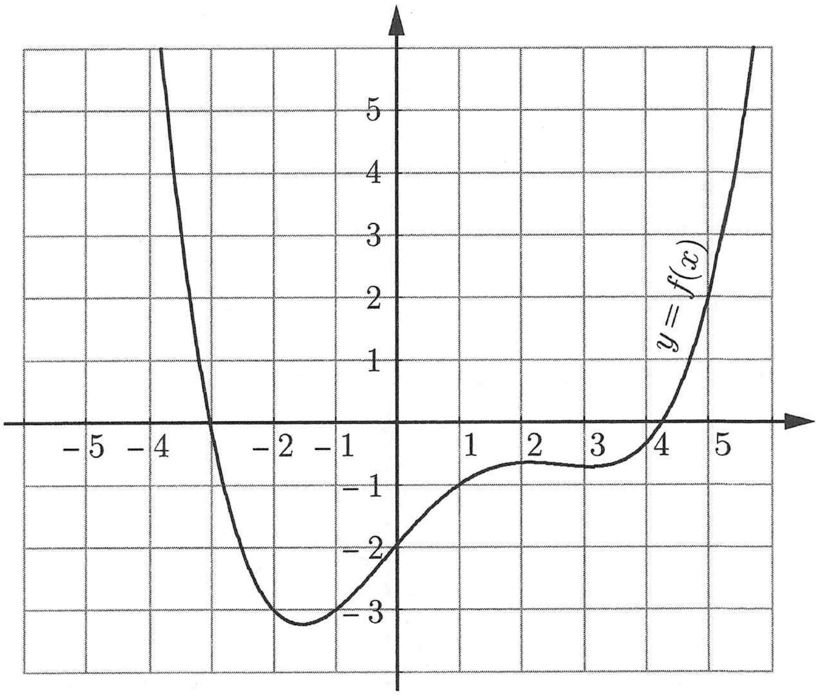
$$a\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad b\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

$$c\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad d\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-2 \end{array}$$

$$e\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x-2 \end{array} \qquad f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<1 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<1 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array} \qquad h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

17. La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer, en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

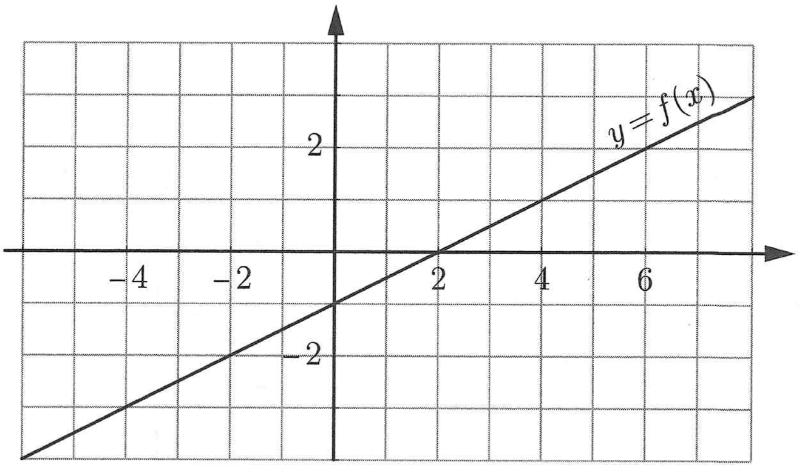
d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) la valeur de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$.

18. On donne la fonction f par son graphe.



Dessiner le graphe des fonctions définies par :

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

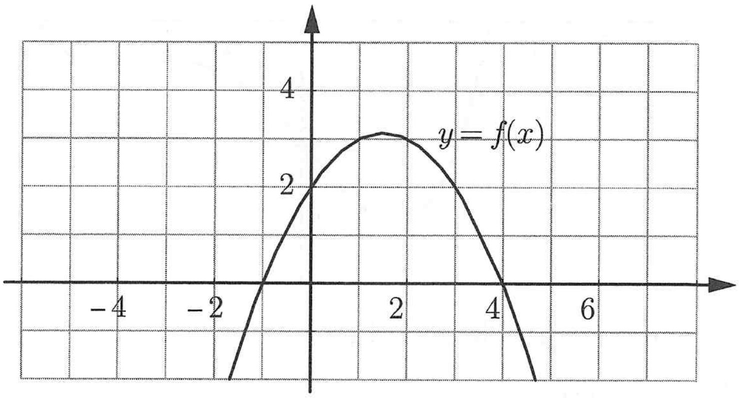
e) $g(x) = f(x+2)$

f) $g(x) = f(x) - 2$

g) $g(x) = f(x-1) + 2$

h) $g(x) = 2f(x)$

19. On donne la fonction f par son graphe.



Dessiner le graphe des fonctions définies par :

a) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = -f(-x)$

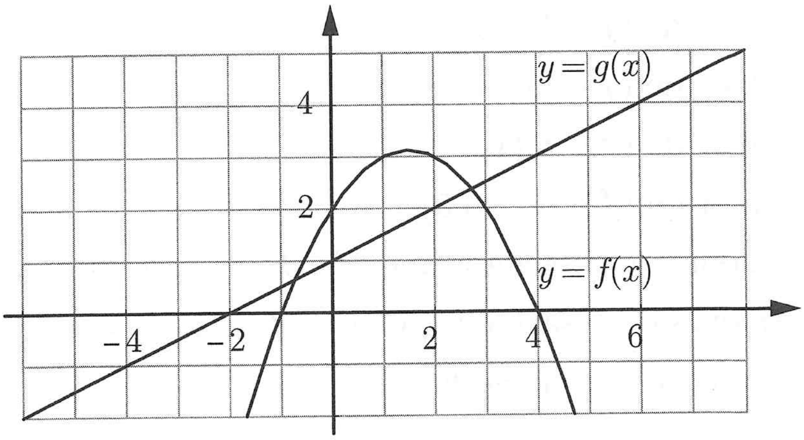
c) $g(x) = f(x-2)$

d) $g(x) = f(x) + 2$

e) $g(x) = f(x+1) - 2$

f) $g(x) = 2\,f(x)$

20. On donne les fonctions f et g par leurs graphes.



Dessiner le graphe des fonctions définies par :

a) $h(x) = f(x) + g(x)$ b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

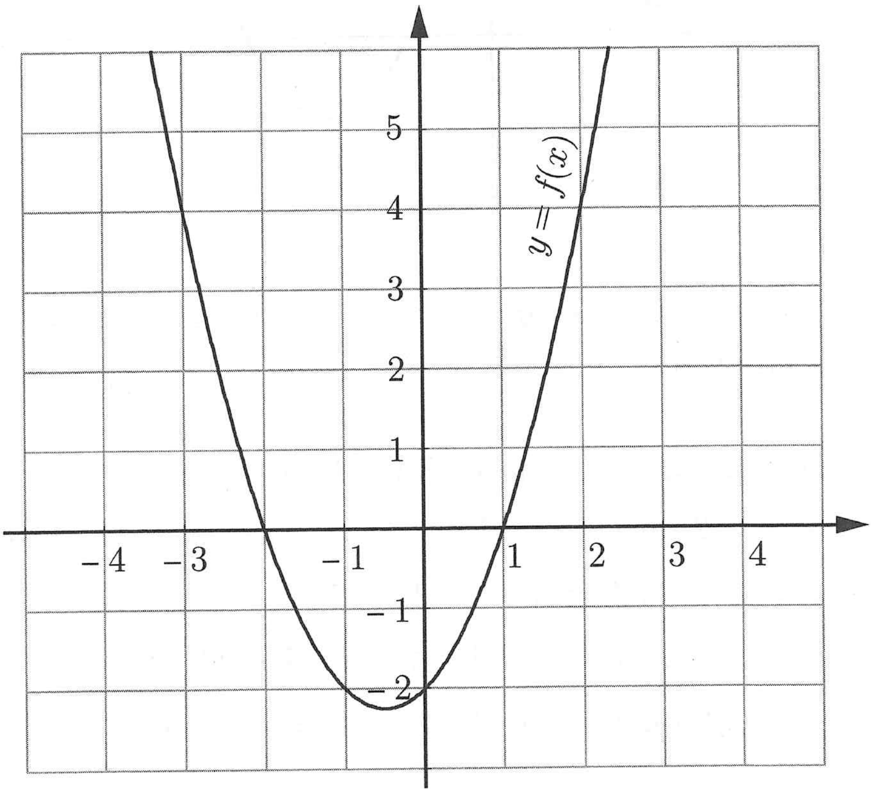
c) $h(x) = g(x) - f(x)$ d) $h(x) = f(x) - g(x)$

21. Soit $f : x \mapsto 2x + 1$ et $g : x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Déterminer les fonctions $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$.

b) Esquisser les graphes de f, g, h et k.

22. La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer, en observant le graphe,

a) la valeur de $(f \circ f)(0)$;

b) la valeur de $(f \circ f)(-1)$;

c) la valeur de $(f \circ f)(1)$;

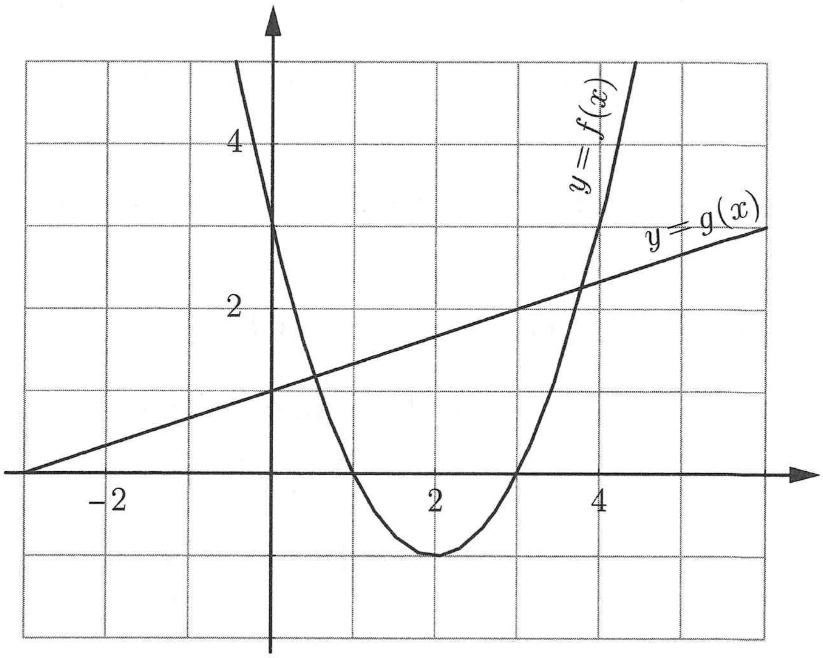
d) la valeur de $(f \circ f)(-0.5)$;

e) les valeurs de x sachant que $(f \circ f)(x) = 0$;

f) les valeurs de x sachant que $y = (f \circ f)(x) = -2$.

g) Esquisser le graphe de $h(x) = (f \circ f)(x)$.

23. Les fonctions f et g sont données par leurs graphes.
Dessiner quelques points des graphes de $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$, puis esquisser ces graphes.



24. Soit $f : x \mapsto 2\,x + 3$ et $g : x \mapsto k\,x + 2$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour quelle valeur de k a-t-on $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$?

25. Les fonctions suivantes de D dans A sont-elles bijectives ?

a) $x \mapsto x^2 + 2$ où $D = \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$ et $A = \{2\,;3\,;6\}$

b) $x \mapsto x^2 + 2$ où $D = \{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$ et $A = \{1\,;2\,;3\,;6\}$

c) $x \mapsto x^2 + 2$ où $D = \{0\,;1\,;2\,;3\}$ et $A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;11\,;12\}$

d) $x \mapsto x^2 + 2$ où $D = \{0\,;1\,;2\}$ et $A = \{2\,;3\,;6\}$

26. Déterminer les réciproques des bijections ci-dessous.

a) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 7x-5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_- \\ x &\mapsto -x^2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{3\} &\to \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \\ x &\mapsto \dfrac{x}{x-3} \end{aligned}$

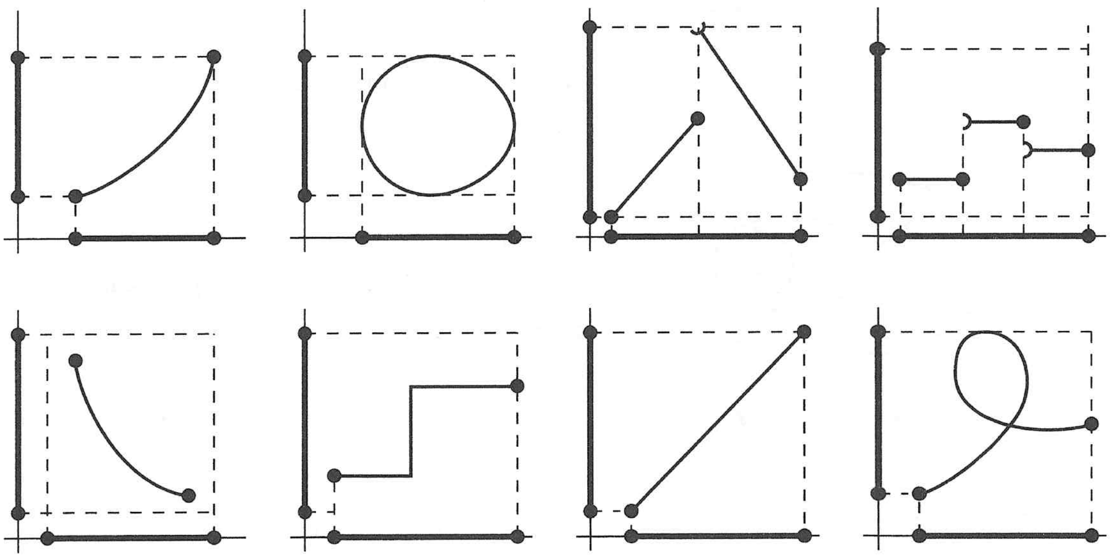
d) $\begin{aligned} i\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{\tfrac{3}{2}\} &\to \mathbb{R} \smallsetminus \{\tfrac{3}{2}\} \\ x &\mapsto \dfrac{3x-7}{2x-3} \end{aligned}$

27. On donne une fonction $f\colon x \mapsto a\,x + b$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

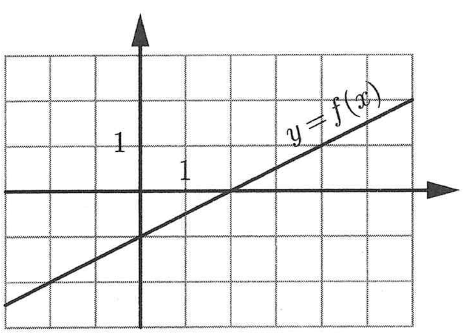
a) A quelle condition la fonction f admet-elle une réciproque? Dans ce cas, expliciter cette fonction réciproque.

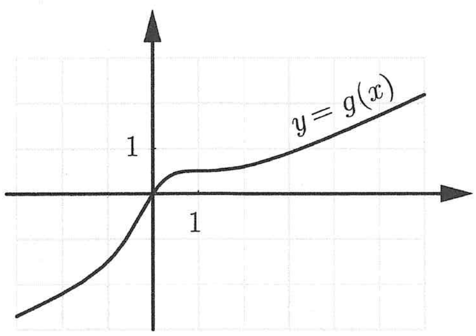
b) Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f coïncide-t-elle avec ${}^r f$?

28. Déterminer parmi les dessins ci-dessous ceux qui représentent le graphe d'une fonction. Dans ces cas, déterminer si les fonctions sont bijectives. Les segments gras sur les axes représentent les ensembles de départ et d'arrivée.



29. Les graphes de f et g sont donnés ci-dessous. Esquisser les graphes de ${}^r f$ et de ${}^r g$.





1.6 Réponses aux exercices du chapitre 1

1. a) $A = \{-1\,;1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$ $\qquad B = \{1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\ldots\,;\frac{1}{9}\}$

$C = \{-1\,;0\}$ $\qquad D = \{\}$ $\qquad E = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$ $\qquad F = \{\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 9\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 14\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 3n + 1\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } n < 7\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n^2+1}\,,\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n < 6\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2^n\,,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } n \leq 10\}$

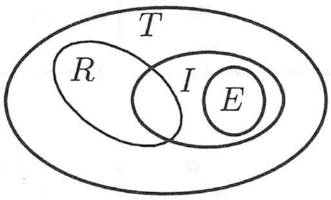
2. $A = [-3\,;5]$ $\qquad B = [4\,;5[$ $\qquad C =]-\infty\,;1[$

$D = [10\,;+\infty[$ $\qquad E = [-2\,;2]$ $\qquad F =]-\infty\,;+\infty[$

$G = [2\,;2]$

3. a) $A = \{0\,;1\,;2\}$ et $B = \{3\,;4\}$ par exemple

b) $A = \{0\,;2\,;3\,;4\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$ par exemple

4. 

$I \cap E = E$

$E \cap R = \{\}$

$I \cap R =$ ensemble des triangles isocèles rectangles.

5. $D = \{6\,;8\,;10\}$ $\qquad E = \{11\}$ $\qquad F = \{\}$ $\qquad G = \{6\,;8\,;10\}$

6. $A = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$ $\qquad B = \{d\,;e\,;f\}$

7. a) $]-\infty\,;2[\, \cup\,]2\,;+\infty[$ $\qquad$ b) $]-\infty\,;2] \cup [4\,;+\infty[$

c) $]-\infty\,;2[\, \cup\,]4\,;+\infty[$ $\qquad$ d) $]-\infty\,;-5[\, \cup\,]5\,;+\infty[$

8. $\mathbb{R} \setminus [-5\,;2[$

9. a) $[-2\,;0[$ $\qquad [-3\,;3]$ $\qquad]3\,;4[$ $\qquad [-3\,;-2[\cup[0\,;4[$

b) $[-2\,;2]$ $\qquad]-3\,;1[$ $\qquad]-4\,;-3]$ $\qquad]-4\,;-2[\cup[1\,;2]$

c) $]-1\,;3[$ $\qquad [-3\,;3[$ $\qquad]-5\,;-3[$ $\qquad]-5\,;-1]$

10. a) $f(D) = \{-11\,;-8\,;-5\,;-2\,;1\}$ b) $f(D) = \{-3\,;-2\,;1\}$
c) $f(D) = \{-\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{3}{4}\,;-\frac{4}{5}\,;-\frac{5}{6}\}$ d) $f(D) = \{-\frac{1}{5}\,;0\,;1\,;\frac{3}{5}\}$

11. a) $f(\mathbb{N}) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ b) $f(\mathbb{R}) = \{1\,;2\}$
c) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ d) $f(\mathbb{R}) = [\,2\,;\infty\,[$
e) $f(\mathbb{R}) = \{-1\,;0\,;1\}$

12. a) oui b) non c) non d) oui e) non
f) non g) oui h) non i) non j) oui

13. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$
e) $D = \mathbb{R}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\}$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\,;3\}$ h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
i) $D = [\,1\,;+\infty\,[$ j) $D = \,]-5\,;+\infty\,[$
k) $D = \,]-\infty\,;2\,]$ l) $D = \,]-\infty\,;\frac{1}{2}\,]$

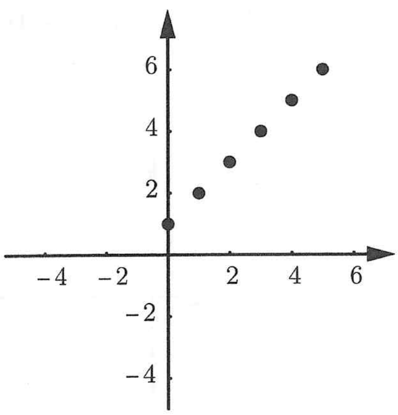
14. a) $x = 3$ b) $x = -\frac{9}{2}$
c) $x = 0$ ou $x = 1$ d) $x = -1$ ou $x = 1$
e) $x = -3$ ou $x = 3$ f) $x = 0$ ou $x = 1$

15.

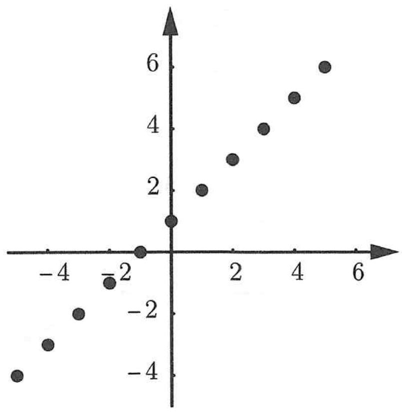
a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$Y(a)$	14.3	20.0	25.0	29.4	33.3	36.8	40.0	42.9	45.5	47.8	50.0	52.0
$C(a)$	12.5	16.7	20.8	25.0	29.2	33.3	37.5	41.7	45.8	50.0	54.2	58.3

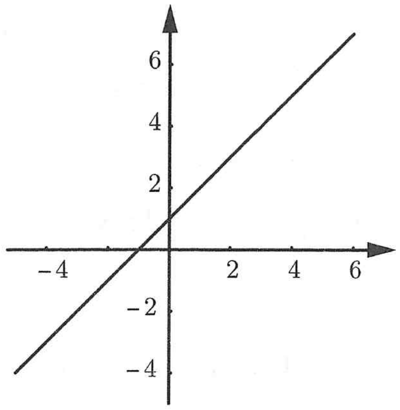
a) jusqu'à 9 ans
b) à 13 ans c) 0.63 ml d) 12.1 %

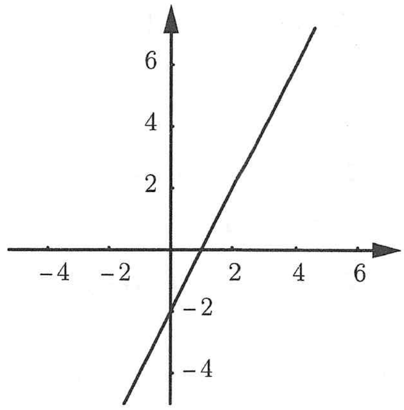
16. a)

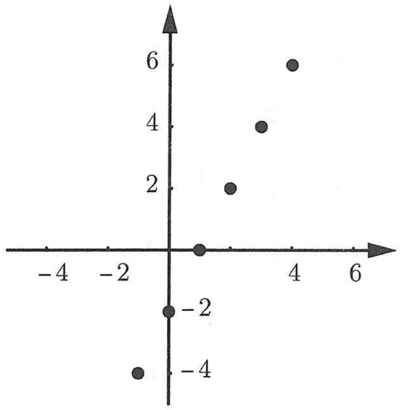


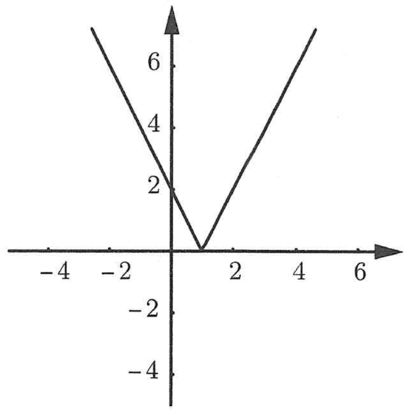
b)

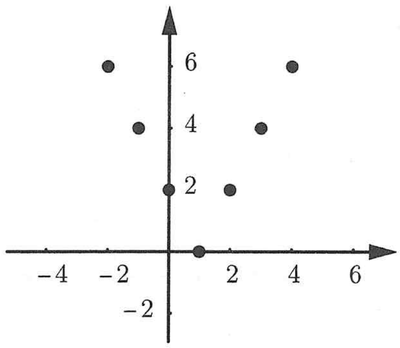


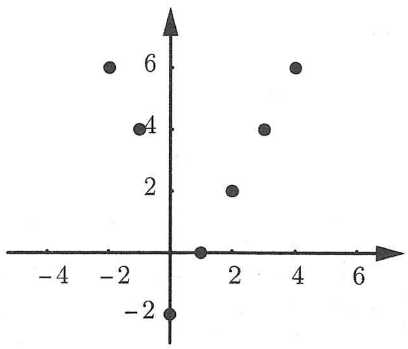
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

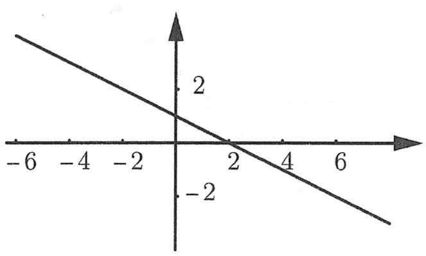
h) 

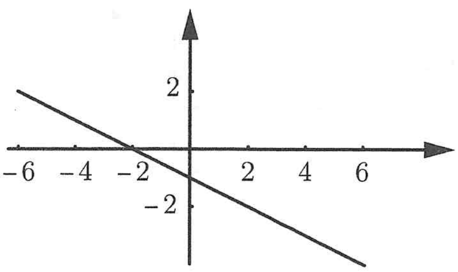
17. a) $f(0) \cong -2$ b) $f(-2) \cong -3$

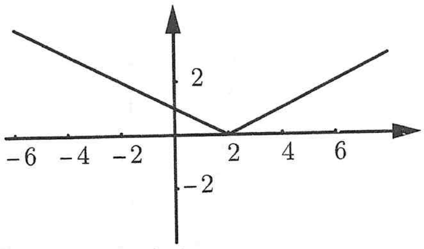
c) $x \cong -3$ ou $x \cong 4.2$ d) $x \cong -3.3$ ou $x \cong 5$

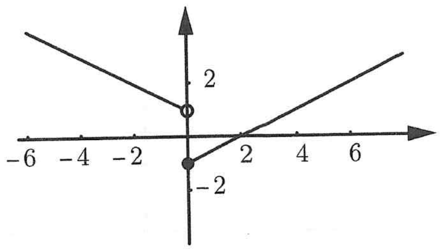
e) $a \cong -3.2$ et $x \cong -1.5$ f) $x \cong -2.4$ ou $x \cong 5.6$

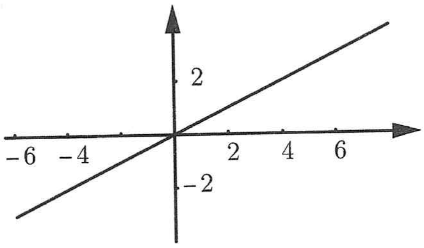
g) $x \cong -3.5$ ou $x \cong 1$

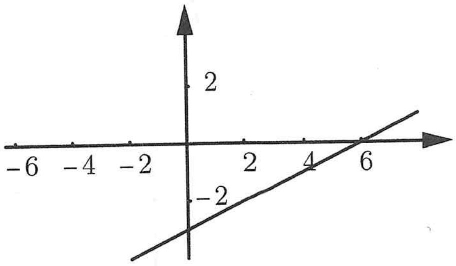
18. a) 

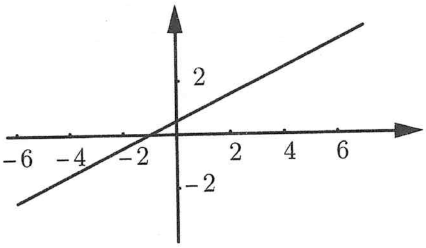
b) 

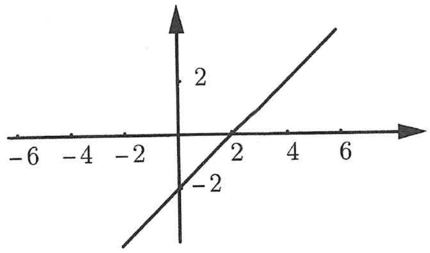
c) 

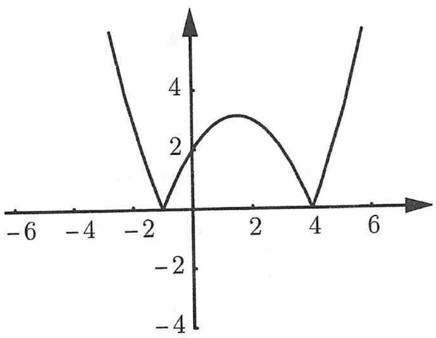
d) 

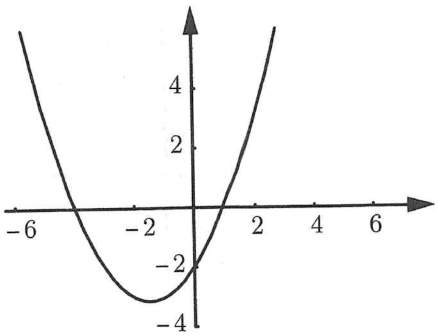
e) 

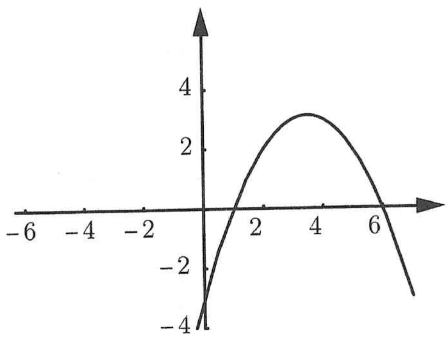
f) 

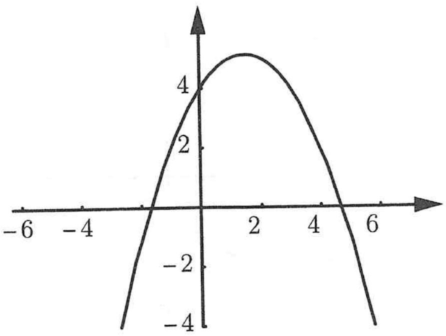
g) 

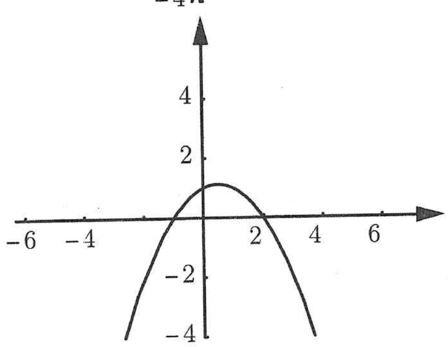
h) 

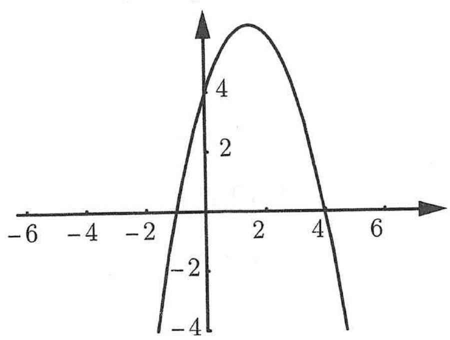
19. a) 

b) 

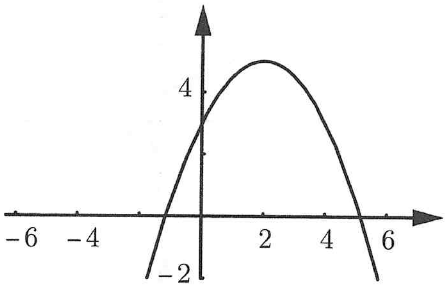
c) 

d) 

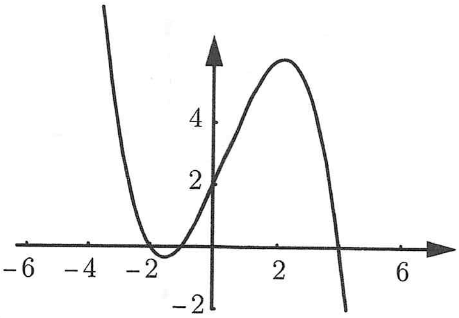
e) 

f) 

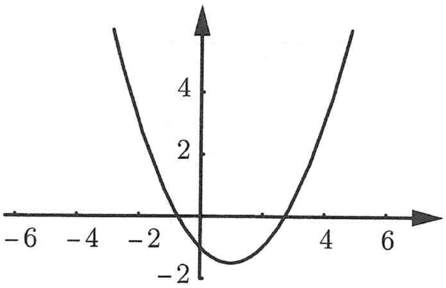
20. a)



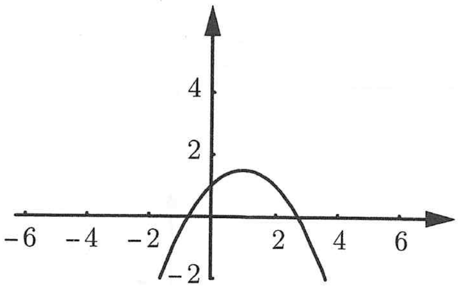
b)



c)

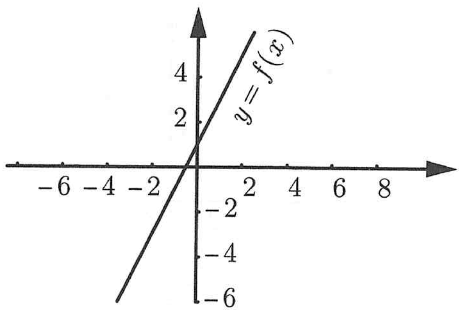


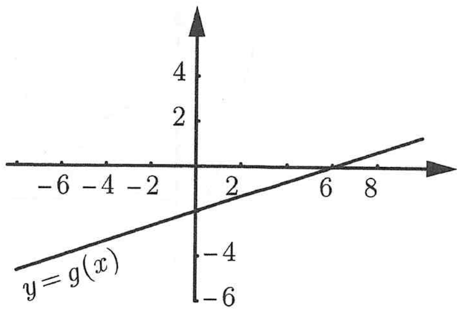
d)

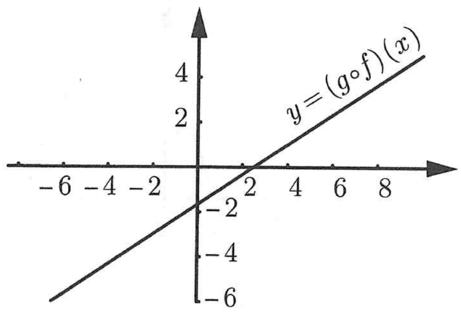


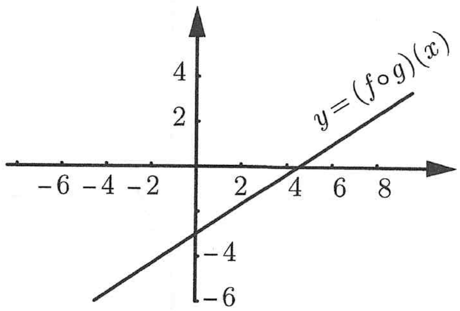
21. a) $h(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{5}{3}$

b) $k(x) = \frac{2}{3}\,x - 3$









22. a) $(f \circ f)(0) \cong 0$

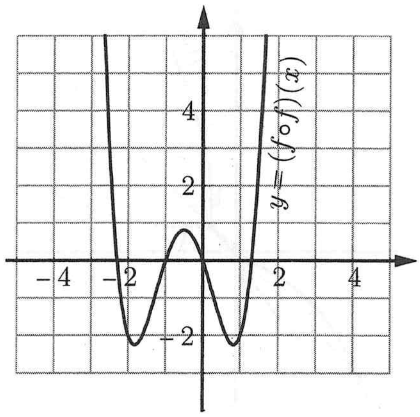
b) $(f \circ f)(-1) \cong 0$

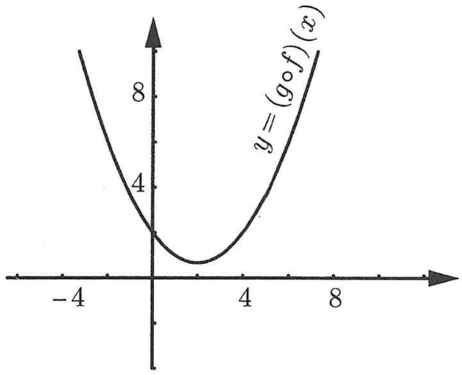
c) $(f \circ f)(1) \cong -2$

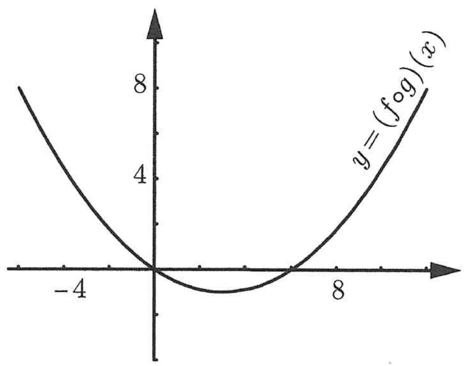
d) $(f \circ f)(-0.5) \cong 0.8$

e) $x \cong -2.3\,,\ x \cong -1\,,\ x \cong 0$ ou $x \cong 1.3$

f) $x \cong -2\,,\ x \cong -1.6\,,\ x \cong 0.6$ ou $x \cong 1$

g) 

23. a) 

b) 

24. $k = \dfrac{5}{3}$

25. a) Non b) Non c) Non d) Oui

26. a) $D = \mathbb{R}\,,\ A = \mathbb{R}\,,\ {}^{r}f(x) = \dfrac{1}{7}\,x + \dfrac{5}{7}$

b) $D = \mathbb{R}_-\,,\ A = \mathbb{R}_+\,,\ {}^{r}g(x) = \sqrt{-x}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}\,,\ A = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,,\ {}^{r}h(x) = \dfrac{3\,x}{x-1}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}\,,\ A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}\,,\ {}^{r}i(x) = \dfrac{3\,x-7}{2\,x-3}$

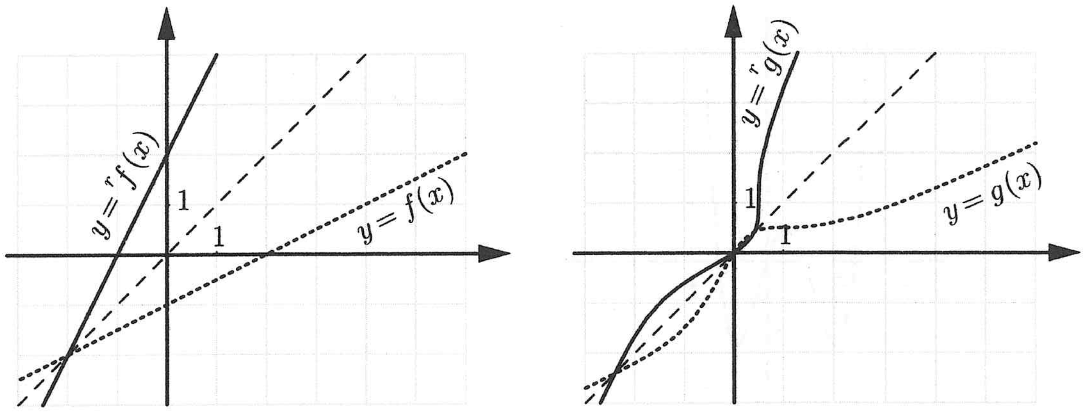
27. a) $a \neq 0\,,\ {}^{r}f(x) = \dfrac{1}{a}\,x - \dfrac{b}{a}$

b) $a = 1$ et $b = 0$ ou $a = -1$ et b quelconque

28.

Bijective	Non	Fonction	Fonction
Non	Non	Bijective	Non

29.

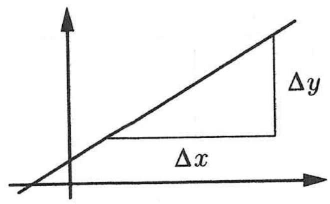


2. Fonctions du premier degré

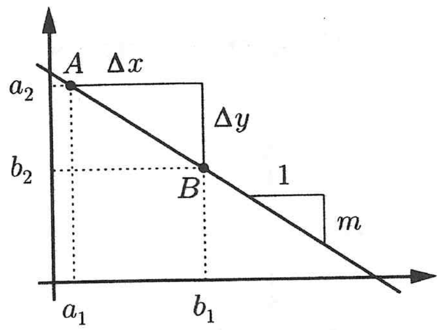
2.1 Droites

Pente d'une droite

La **pente** d'une droite est le rapport $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement selon l'axe Ox et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe Oy.



Pour trouver la pente m d'une droite dessinée, on peut choisir deux points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ sur la droite, déterminer la différence des abscisses $\Delta x = b_1 - a_1$ et la différence des ordonnées $\Delta y = b_2 - a_2$. La pente est égale au quotient

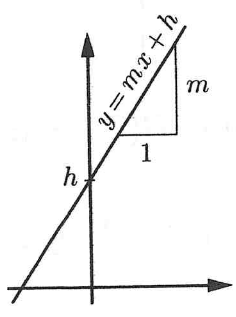


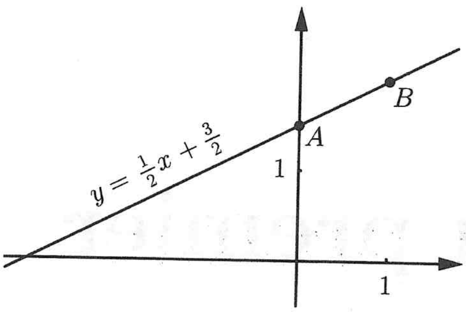
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est indépendant du choix des points A et B.

Fonction affine

La fonction définie par $f(x) = mx + h$ est appelée **fonction affine**. Son graphe est une droite qui passe par le point $(0; h)$ et dont la pente vaut m.
Si $m \neq 0$, la fonction est du **premier degré**.

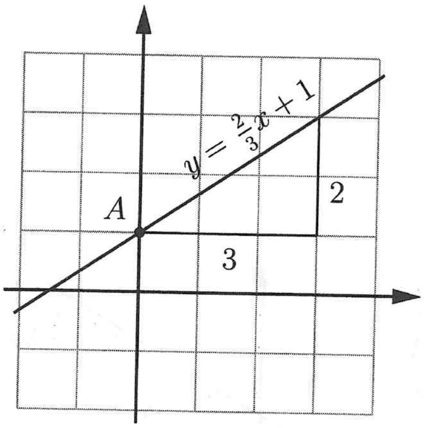




Exemple

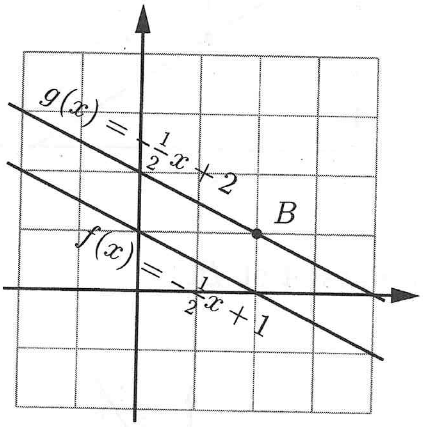
Le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est une droite.
Pour dessiner cette droite, on peut calculer les coordonnées de deux points.
Si $x = 0$, alors $y = f(0) = \frac{3}{2}$. Le point $A(0\,;\frac{3}{2})$ est donc un point de la droite.
Si $x = 1$, alors $y = 2$. Le point $B(1\,;2)$ est donc un point de la droite.

Graphe à l'aide de la pente



Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ est une droite.
Pour dessiner cette droite on peut calculer les coordonnées d'un point, par exemple le point $A(0\,;1)$ et utiliser le fait que la pente de cette droite vaut $\frac{2}{3}$.

Droites parallèles



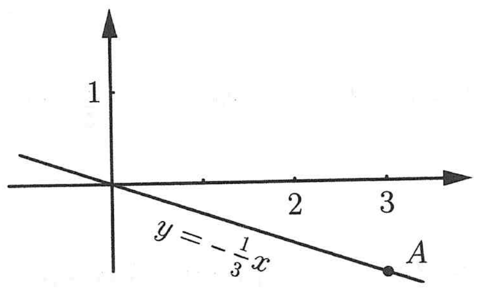
Cherchons la fonction g dont le graphe est la droite qui passe par le point $B(2\,;1)$ et qui est parallèle au graphe de la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.
Deux droites parallèles ont même pente, donc $g(x) = -\frac{1}{2}x + h$.
Pour trouver la valeur de h, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées du point B.

Comme $B(2\,;1)$ appartient à la droite, $g(2) = 1$ et donc

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + h \implies h = 1 + 1 \implies h = 2$$

Fonction linéaire

La fonction définie par $f(x) = mx$ est appelée **fonction linéaire.** Son graphe est une droite qui passe par l'origine et dont la pente vaut m.



Exemple

Le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{3}x$ est une droite qui passe par l'origine.

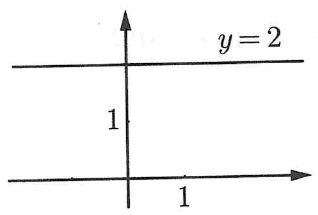
Pour la dessiner, on cherche un deuxième point.

Si $x = 3$, alors $y = f(3) = -1$. Le point $A(3\,;-1)$ est donc un point de la droite.

Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines.

Fonction constante

La fonction définie par $f(x) = h$ est appelée fonction **constante.** Son graphe est une droite parallèle à l'axe Ox qui passe par le point $(0\,;h)$.



Exemple

Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = 2$ est une droite horizontale et l'ordonnée de chacun de ses points est 2.

La pente de cette droite est nulle.

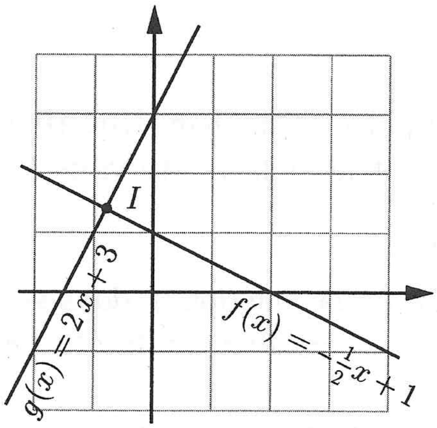
Bien que n'étant pas du 1$^{\text{er}}$ degré, les fonctions constantes sont des cas particuliers de fonctions affines.

2.2 Equations

Pour trouver le point d'intersection I des graphes de deux fonctions f et g, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Exemple 1

Les graphes des fonctions f et g données par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ se coupent en un point I.



$$2\,x+3=-\tfrac{1}{2}\,x+1$$
$$2\,x+\tfrac{1}{2}\,x=1-3$$
$$\tfrac{5}{2}\,x=-2$$
$$5\,x=-4$$
$$x=-\tfrac{4}{5}$$
$$y=2\cdot(-\tfrac{4}{5})+3=\tfrac{7}{5} \quad \text{donc } I(-\tfrac{4}{5}\,;\tfrac{7}{5})$$

Exemple 2

Le graphe de la fonction f donnée par $f(x)=2\,x+3$ coupe l'axe Ox en un point I. L'axe Ox est le graphe de la fonction constante nulle g définie par $g(x)=0$.

$$2\,x+3=0$$
$$2\,x=-3$$
$$x=-\tfrac{3}{2}$$

L'équation a une seule solution.
Comme $y=0$, le point d'intersection est $I(-\frac{3}{2}\,;0)$

Exemple 3

Les graphes des fonctions f et g données par $f(x)=2\,x+3$ et $g(x)=2\,x-2$ sont deux droites parallèles.

$$2\,x+3=2\,x-2$$
$$2\,x-2\,x=-3-2$$
$$0=-5$$

L'équation ne possède aucune solution.

Exemple 4

Les graphes des fonctions f et g données par $f(x)=2\,x+6$ et $g(x)=2(x+3)$ sont deux droites confondues.

$$2\,x+6=2(x+3)$$
$$0=0$$

Toute valeur de x est ici solution. L'équation possède donc une infinité de solutions.
Par exemple, si $x=1$, alors $y=5$; le point $A(1\,;5)$ appartient au graphe de f et à celui de g (évidemment, les deux graphes sont les mêmes).

2.3 Systèmes de deux équations

On peut trouver l'expression $f(x) = m\,x + h$ d'une fonction affine, si l'on connaît deux points A et B de son graphe en résolvant un système de deux équations à deux inconnues m et h.

Cherchons par exemple la fonction donnée par $f(x) = m\,x + h$ dont le graphe est une droite d qui passe par les points $A(2\,;7)$ et $B(-1\,;1)$

$A(2\,;7)$ appartient à la droite d'où $\quad m \cdot 2 \; + h = 7$

$B(-1\,;1)$ appartient à la droite d'où $\quad m \cdot (-1) + h = 1$

Le système $\begin{cases} 2m + h = 7 \\ -m + h = 1 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues.

On élimine h par soustraction

$$\begin{array}{l|r} \begin{cases} 2m + h = 7 \\ -m + h = 1 \end{cases} & \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline 3m \qquad = 6 & \end{array}$$

On obtient $m = 2$ et, en remplaçant m par 2 dans l'une des deux équations, on trouve $h = 3$.

La fonction cherchée est donc donnée par $f(x) = 2\,x + 3$

Tout système $\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \end{cases}$ de 2 équations à 2 inconnues x et y peut être résolu de façon analogue.

Exemple 1

Résolvons le système $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|r} \begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} & \begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array} \\ \hline \qquad -5y = -20 & \end{array}$$

On obtient $y = 4$ et, en remplaçant y par 4 dans la 1re équation, on trouve $x = 3$.

Le système possède donc la solution $(3\,;4)$.

Exemple 2

Résolvons le système $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|r} \begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} & \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \qquad 0 = -7 & \end{array}$$

Le système ne possède aucune solution.

Exemple 3

Résolvons le système $\begin{cases} 4x - 6y + 12 = 0 \\ 6x - 9y + 18 = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l} \begin{cases} 4x - 6y + 12 = 0 \\ 6x - 9y + 18 = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \\ \hline \qquad\qquad 0 = 0 & \end{array}$$

Le système possède une infinité de solutions.

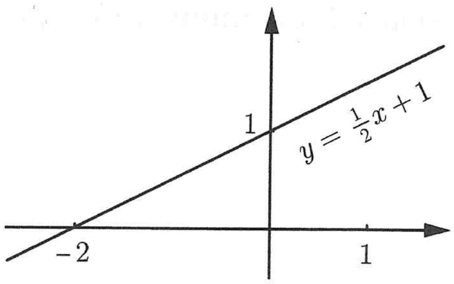
Par exemple, les couples $(0;2)$, $(-3;0)$ *et* $(-6;-2)$ *sont solutions du système.*

Si $x = t$, *on obtient* $y = \dfrac{2t+6}{3}$.

Ainsi, tout couple de la forme $\left(t\,;\dfrac{2t+6}{3}\right)$ *est solution.*

2.4 Inéquations

Pour résoudre l'inéquation $ax + b > 0$, on peut observer le graphe de la fonction donnée par $f(x) = ax + b$.



Exemple

Soit l'inéquation $\frac{1}{2}x + 1 > 0$

La fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ *coupe l'axe* Ox *en* $x = -2$

En observant le graphe de f *esquissé ci-contre, on constate que*

$\frac{1}{2}x + 1 > 0$ *si* $x > -2$

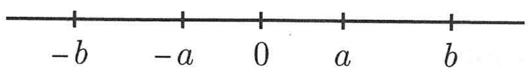
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-2\,;+\infty[$

Il est également possible de résoudre cette inéquation algébriquement :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{2}x + 1 & > & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}x & > & -1 & \cdot 2 \\ x & > & -2 & \end{array}$$

La résolution d'une inéquation du 1er degré est analogue à celle d'une équation du 1er degré, cependant il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif.

En effet, un changement de signe inverse toute inégalité.



$a < b \iff -a > -b$

Exemple 1

$$\begin{array}{rcl|l} -x-2 & > & 0 & +2 \\ -x & > & 2 & \cdot(-1) \\ x & < & -2 & \end{array}$$

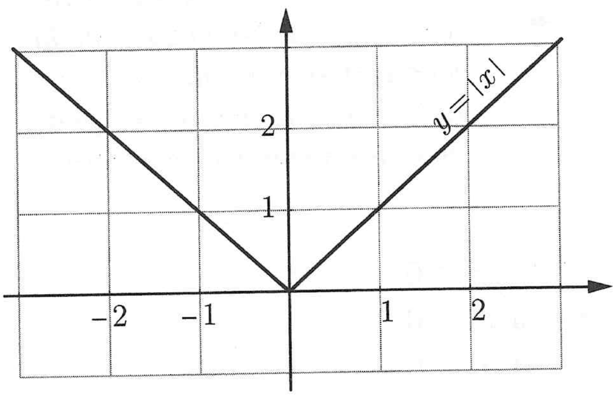
$$S =]-\infty\,; -2[$$

Exemple 2

$$\begin{array}{rcl|l} 3-2x & \leq & 0 & -3 \\ -2x & \leq & -3 & \cdot(-\frac{1}{2}) \\ x & \geq & \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$S = [\,\tfrac{3}{2}\,; +\infty\,[$$

2.5 Fonctions définies par morceaux

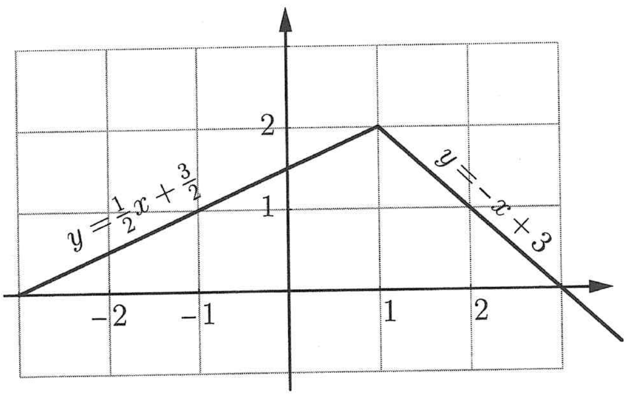


Le graphe de la fonction **valeur absolue** donnée par $f(x) = |\,x\,|$ est représenté ci-contre.
On constate que ce graphe est formé de deux demi-droites, la demi-droite d'équation $y = -x$ pour les x négatifs et la demi-droite d'équation $y = x$ pour les x positifs.

On peut donner une expression de cette même fonction sans utiliser le symbole *valeur absolue*, en séparant, dans la définition de f, les x positifs des x négatifs.

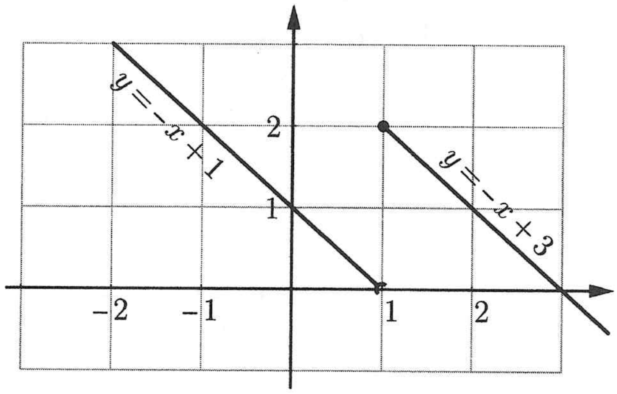
$$|\,x\,| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction donnée de cette façon est dite **définie par morceaux** ou définie par intervalles.



Exemple 1

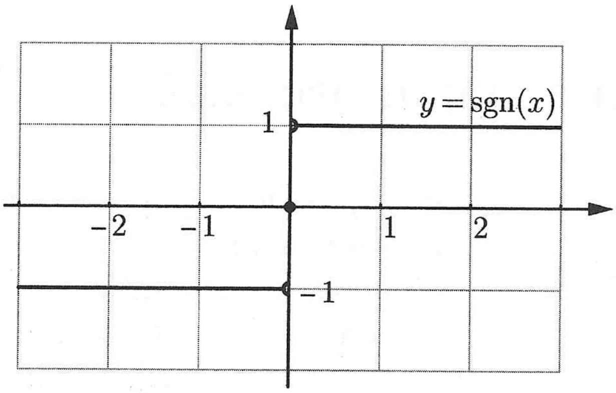
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ \textit{si}\ x < 1 \\ -x + 3 \ \textit{si}\ x \geq 1 \end{cases}$$



Exemple 2

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x<1 \\ -x+3 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction présente un **saut** *en* $x = 1$ *.*



Exemple 3

La fonction **signe** *donnée par* $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ *prend la valeur 1 si* x *est positif, la valeur* -1 *si* x *est négatif et la valeur 0 si* x *est nul. Elle est définie par morceaux et peut être donnée par l'expression :*

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

2.6 Exercices

1. Dessiner les graphes des fonctions

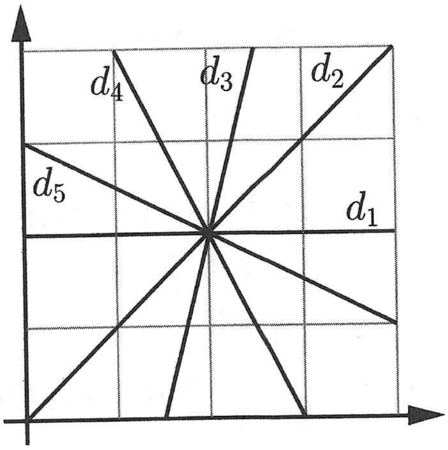
$$f(x) = -2\,x + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \tfrac{1}{2}\,x - 3$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = g(x)$ c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$ f) $f(x) > g(x)$ g) $f(x) \geq x$

2. a) Estimer les pentes des cinq droites dessinées ci-contre.



b) Dessiner une droite

1) de pente 5

2) de pente -10

3) de pente $-\frac{1}{3}$

c) Existe-t-il une fonction dont le graphe est une droite verticale ?

3. On donne la fonction affine $a(x) = 2\,x - 1$ et la fonction linéaire $l(x) = 2\,x$.

a) Dessiner les graphes de a et de l.

b) Vérifier que $l(2) + l(3) = l(5)$

c) Vérifier que $l(5 \cdot x) = 5 \cdot l(x)$

d) Vérifier que $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$ et que $l(k \cdot x) = k \cdot l(x)$

e) La fonction a possède-t-elle ces mêmes propriétés ?

4. Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$ b) $3\,x + 8 = 2\,(x + 4)$

c) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$ d) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$

e) $\dfrac{t-5}{3} = \dfrac{2-t}{2}$ f) $\sqrt{2}\,x = 1 + x$

g) $\sqrt{6} = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3}$ h) $3\,x - \dfrac{4-x}{2} = x - \dfrac{1}{3}$

5. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$ b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$ d) $-(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$ f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

6. Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 4 = -6y \\ 1 - x = 6y \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 10 \end{cases}$

7. Résoudre les systèmes d'équations en fonction du paramètre t :

a) $\begin{cases} x + y = t \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = t \\ 3x - y = 2t \end{cases}$

8. Résoudre les systèmes d'inéquations :

a) $\begin{cases} 3 - x < \frac{x}{3} \\ 1 + 4x \geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 - x \leq 2x + 4 \\ 2x - 1 < -x \end{cases}$

9. a) Trouver la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(7\,;-2)$ et $B(-3\,;1)$.

b) Trouver la fonction affine dont le graphe coupe l'axe Ox en $I(-5\,;0)$ et dont la pente vaut $-\frac{5}{8}$.

c) Trouver la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et dont le graphe passe par le point $A(5\,;5)$.

d) Trouver l'abscisse du point $C(x\,;10)$ sachant que les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;-2)$ et C sont alignés.

10. Dessiner les graphes des fonctions affines f telles que :

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2

b) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$

c) $f(2) = 0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$

d) $f(3) = 1$ et la pente du graphe de f vaut 1

e) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0

11. La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la fonction $v(t) = 9.8 \cdot t + v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse

b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t = 4\,\text{s}$ sachant qu'au temps $t = 2\,\text{s}$ sa vitesse était de 21 m/s ?

12. Une barre métallique mesure 45 cm à une température de 15 °C et 45, 2 cm à une température de 51 °C. En admettant que l'allongement de la barre est proportionnel à l'élévation de la température, on demande :

a) La longueur de la barre à une température de 60 °C

b) La température à laquelle la barre mesure 44, 7 cm.

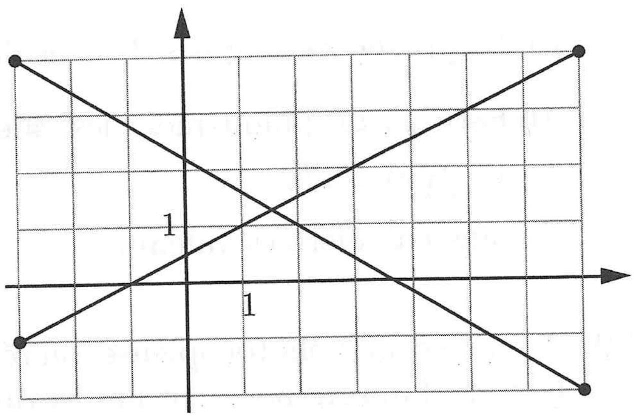
13. Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

14. Une autoroute de 120 km relie les villes A et B. Un habitant de A se rend à la ville B à la vitesse moyenne de 60 km/h. A quelle vitesse doit-il revenir de B à A s'il veut que sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour soit de :

a) 80 km/h b) 100 km/h c) 120 km/h

15. Un garçon tond le gazon en 90 minutes, mais sa sœur peut le faire en 60 minutes. Combien leur faudrait-il de temps s'ils travaillaient ensemble avec deux tondeuses ?

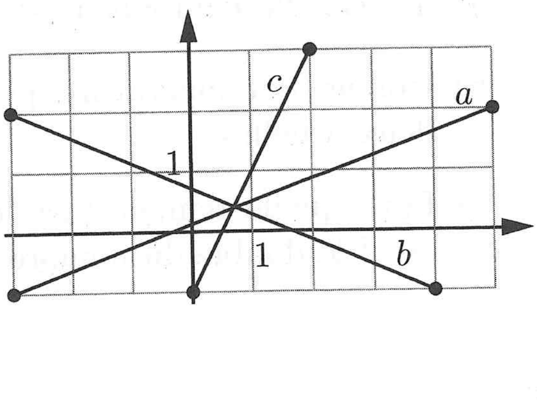
16. a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-contre.



b) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2\,; -1)$.

17. Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



18. On considère la fonction donnée par $f(x) = a\,x + a$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Dessiner le graphe de f pour quelques valeurs de a.

b) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, le graphe de $f(x) = a\,x + a$ passe-t-il par le point $A(3\,;8)$?

c) Vérifier que, pour toute valeur de a, le graphe de f passe par un même point B dont on donnera les coordonnées.

19. Soit $f(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = -\frac{2}{5}\,x + 3$

a) Trouver les fonctions :

1) ^{r}f	2) ^{r}g	3) $f \circ g$
4) $g \circ f$	5) $^{r}(f \circ g)$	6) $^{r}(g \circ f)$

b) Trouver les valeurs de x telles que :

1) $f(x) = 0$	2) $g(x) = 0$	3) $f(x) = 3$
4) $g(x) = 5$	5) $f(x) = x$	6) $g(x) = -2\,x$
7) $g(2\,x) = 2$	8) $f(3\,x) = 3\,x$	9) $f(x-1) = x - 1$

c) Esquisser les graphes de f et de g.

d) Estimer graphiquement les valeurs x et $y = f(x)$ telles que :

1) $f(x) = g(x)$ 2) $f(x) = 2\,g(x)$

puis calculer ces valeurs.

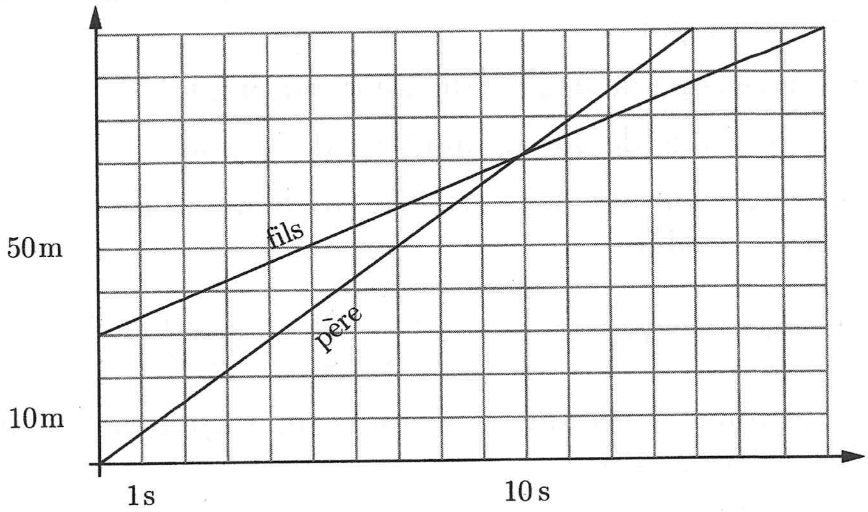
20. A l'aide d'une photocopieuse, on réduit un document à 80 %. Avec quel facteur d'agrandissement faut-il photocopier la copie pour obtenir une nouvelle copie identique à l'original ?

21. La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

22. Un père défie son fils au 100 m et lui laisse 30 m d'avance. Les graphes simplifiés de cette course sont donnés ci-dessous.



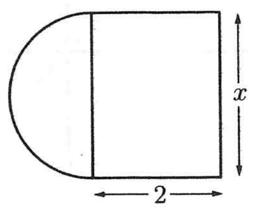
a) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

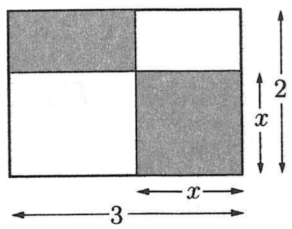
c) Quelle a été la vitesse du père, celle du fils ?

d) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

23. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque ?



24. Pour quelle valeur de x le carré et le rectangle grisés ont-ils la même aire ?



25. Pour un travail écrit comptant 12 points, la note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 12 points.

a) Trouver la fonction affine qui donne la note en fonction du nombre de points.

b) Le maître A décide de donner la note 6 à partir de 10 points (0 point donne la note 1 et 10 points et plus la note 6).
Le maître B décide de commencer de noter à 2 (0 point donne la note 2 et 12 points la note 6).
Pour quels résultats est-on avantagé par le maître A plutôt que par le maître B ?

26. Un élève a obtenu les notes 4.5, 4, 3 et 4.
Quelle note minimale (entre 1 et 6 au demi point) doit-il obtenir au prochain test pour avoir

a) une moyenne de 4 arrondie au demi point ?

b) une moyenne de 4.5 arrondie au demi point ?

c) une moyenne de 4.5 arrondie au demi point si le prochain test compte double ?

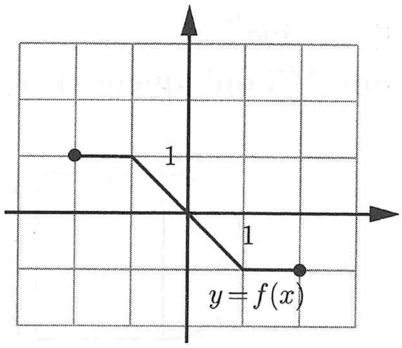
27. Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

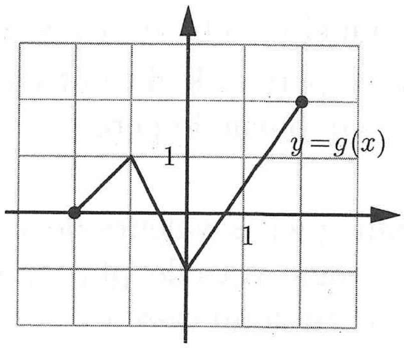
a) Déterminer l'ordonnée des points du graphe de f d'abscisse $x = 2$, $x = -1$ et $x = 4$.

b) Déterminer l'abscisse des points du graphe de f d'ordonnée 1.

c) Déterminer l'abscisse des points du graphe de f d'ordonnée 5.

28. Déterminer $f(x)$ et $g(x)$.

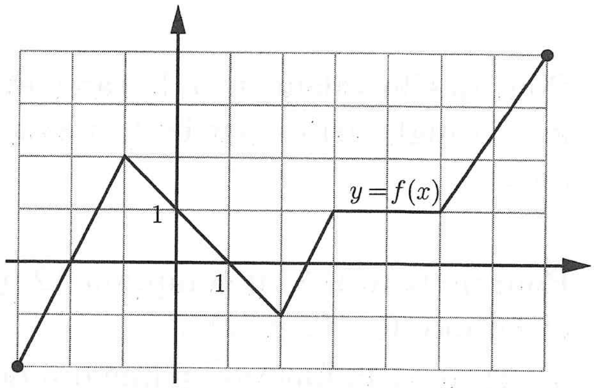




29. Déterminer $f(x)$, puis résoudre :

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) > 1$



30. On donne la fonction : $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;-1] \\ 2x & \text{si} \quad x \in \,]-1\,;2] \\ \frac{1}{2}x+3 & \text{si} \quad x \in \,]2\,;+\infty[\end{cases}$

a) Dessiner le graphe de f

b) Résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = x$

c) Résoudre l'inéquation $f(x) < x$

31. Pour quelle valeur de a le graphe de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{si} \quad x \leq a \\ x-1 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$ forme-t-il une ligne brisée ?

32. Ecrire les fonctions suivantes sans utiliser de valeurs absolues, puis esquisser les graphes :

a) $f(x) = |\,x-5\,|$ b) $f(x) = -3\,|\,x\,|+6$

c) $f(x) = |-2\,x+3\,| - |\,x+2\,|$ d) $f(x) = \big|\,|\,x\,|-2\,\big|$

e) $f(x) = |\,x-5\,| + |\,x+1\,| - |\,2\,x-3\,|$

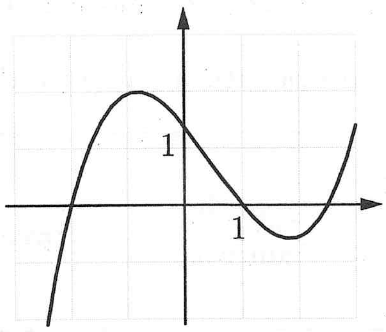
33. Dessiner les graphes de

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(2\,x+1)$ b) $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(1-x)$

34. A partir du graphe de f esquissé ci-contre, dessiner les graphes de

a) $g(x) = \operatorname{sgn}\big(f(x)\big)$

b) $h(x) = f\big(\operatorname{sgn}(x)\big)$

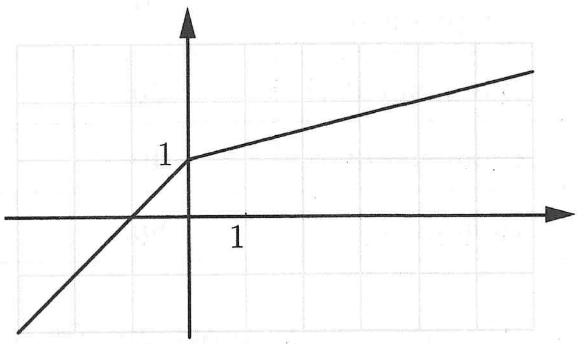


35. A partir du graphe de f esquissé ci-contre

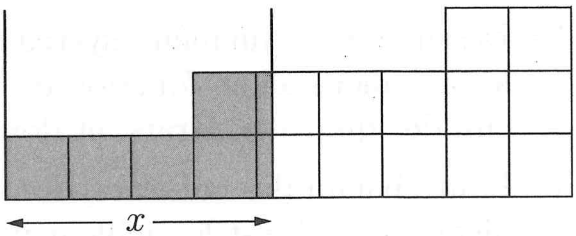
a) Dessiner la réciproque ${}^r\!f$ de f

b) Déterminer $f(x)$ et ${}^r\!f(x)$

c) Résoudre l'équation $f(x) = {}^r\!f(x)$



36. L'unité de longueur étant le côté des carreaux du quadrillage, on désigne par $f(x)$ l'aire du domaine grisé, pour $0 \leq x \leq 9$.



a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ et $f(9)$.

b) Déterminer $f(x)$ sur chacun des intervalles $[\,0\,;3\,]$, $]\,3\,;7\,]$ et $]\,7\,;9\,]$.

c) Représenter la fonction f.

d) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 10$ et $f(x) = 15$, puis contrôler les résultats à l'aide d'un calcul.

37. Un nombre entier de six chiffres commence par le chiffre 1. Si l'on déplace ce 1 à la droite du nombre, on obtient un nouveau nombre égal au triple du nombre initial. Quel est ce nombre initial ?

38. Une balle est tirée horizontalement sur une cible. Le tireur entend le bruit de l'impact 1.5 s plus tard. Si la vitesse de la balle est de 990 m/s et la vitesse du son de 330 m/s, à quelle distance de la cible se trouve le tireur ?

39. Un jour, j'ai ramassé tellement de champignons que j'ai eu de la peine à les porter. En fait, je ne portais pratiquement que de l'eau, car les champignons frais contiennent 90 % d'eau. Je les ai mis à sécher. Après un certain temps, ils pesaient 15 kg de moins et contenaient encore 60 % d'eau. Quelle quantité de champignons ai-je ramassé?

40. Un opérateur propose différents contrats pour la téléphonie mobile :

Type de contrat	Taxe mensuelle	Minutes de conversation gratuite	Prix par minute de communication supplémentaire
Carte à prépaiement	0.–	0	–.80
Abonnement A	25.–	15	–.55
Abonnement B	40.–	25	–.45
Abonnement C	85.–	120	–.40

a) Un client a, en moyenne, 90 minutes de communication par mois. Calculer, pour chacun des contrats, la somme qu'il doit payer.

b) Dessiner, dans un même système d'axes, les graphes qui représentent le prix mensuel en fonction du temps de communication pour chacun des quatre contrats, et donner les expressions de ces fonctions.

c) Pour chacun des contrats, donner l'intervalle de temps de communication, où il est le meilleur marché.

d) L'opérateur de télécommunications offre, pour la carte à prépaiement, une réduction de 25 % aux périodes à *tarif réduit*. Un client téléphone en moyenne 90 minutes par mois. Quelle partie de la communication doit être au moins effectuée durant les périodes à tarif réduit pour que la carte à prépaiement soit meilleur marché que la l'abonnement A ?

41. Une caisse d'assurance maladie propose à ses clients différentes franchises

Pour une franchise de 230.– , la prime annuelle s'élève à 4 710.–

Pour une franchise de 400.– , la prime annuelle s'élève à 4 630.–

Pour une franchise de 600.– , la prime annuelle s'élève à 4 470.–

Pour une franchise de 1 200.– , la prime annuelle s'élève à 3 990.–

Pour une franchise de 1 500.– , la prime annuelle s'élève à 3 750.–

En plus de la franchise, une participation de 10 % aux frais qui dépassent la franchise reste à la charge de l'assuré. Cette participation est limitée à 600.– par année.

a) Quelle franchise un assuré doit-il choisir pour obtenir la solution la moins chère en supposant que ses factures médicales totaliseront 1 000.– l'an prochain ?

b) Quelle franchise un assuré doit-il choisir pour obtenir la solution la moins chère en supposant que ses factures médicales totaliseront 8 000.– l'an prochain ?

c) Tracer le graphe qui donne la dépense totale en fonction des coûts de santé pour un assuré ayant une franchise de 600.– . On admettra que les coûts peuvent varier entre 0 et 10 000 francs par an.

d) Donner l'expression de la fonction qui, pour une franchise de 1 500.–, donne la dépense totale en fonction des coûts de santé.

e) Donner l'expression de la fonction qui, pour une franchise f et une prime p, donne la dépense totale en fonction des coûts de santé.

42. Activité tableur

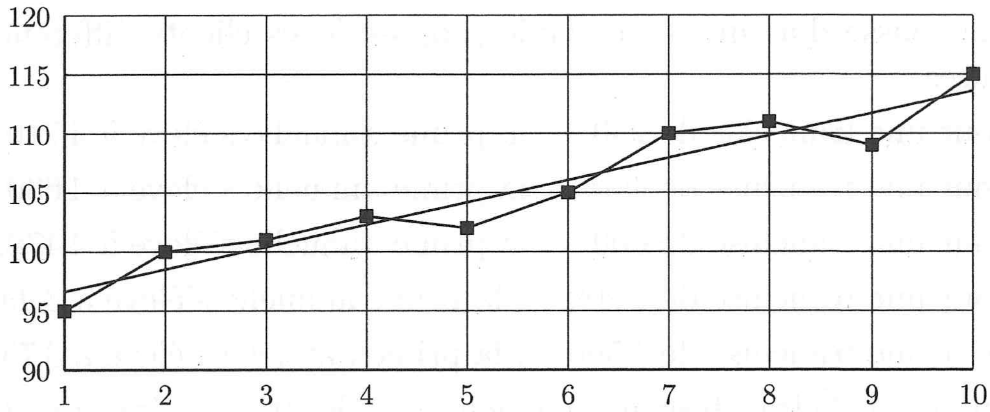
Le tableau suivant décrit le cours hebdomadaire d'une action pour les 10 premières semaines de l'année écoulée.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur	95	100	101	103	102	105	110	111	109	115

a) Faire dessiner, avec le tableur, les segments de droites qui représentent graphiquement cette situation.

b) Ajouter au dessin le graphe de la droite qui décrit au mieux cette situation. Cette droite est appelée *droite de régression linéaire.*

On obtient un graphique semblable au dessin ci-dessous



c) Estimer, en observant le dessin, l'expression de la droite de régression linéaire.

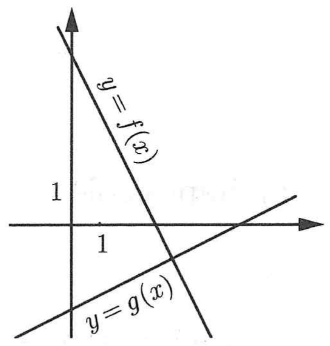
d) Quelle est la plus grande différence entre le cours de l'action et la valeur donnée par la droite de régression linéaire ?

e) En supposant que l'action poursuive la même tendance, quel sera son cours à la vingtième semaine ?

f) Sachant que, au cours de la 20^e semaine, l'action vaut 100 francs, faire dessiner une nouvelle droite de régression linéaire qui tient compte de cette donnée supplémentaire.
Quelle valeur cette nouvelle droite de régression, donne-t-elle pour le cours de l'action à la 10^e semaine ?

2.7 Réponses aux exercices du chapitre 2

1.



a) $x = 3$ b) $x = \frac{18}{5}$

c) $x = 2$ d) $x > 3$

e) $x < \frac{18}{5}$ f) $x \leq 2$

2. a) $m_1 = 0$ $m_2 = 1$ $m_3 = 4$ $m_4 = -2$ $m_5 = -0.5$

c) Non

4. a) $x = -23$ b) $x = 0$

c) $x = -\frac{3}{8}$ d) tout x est solution

e) $t = \frac{16}{5}$ f) $x = \sqrt{2} + 1 \cong 2.41$

g) $u = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{2} \cong 0.507$ h) $x = \frac{2}{3}$

5. a) $x \geq -2$ b) $x \leq 2$ c) $a > -2$

d) $x > \frac{15}{2}$ e) $x \geq -\frac{3}{10}$ f) $x < \frac{15}{17}$

6. a) $(x\,;y) = (\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$ b) $(x\,;y) = (15\,;35)$

c) $(x\,;y) = (-1\,;\frac{1}{3})$ d) $(x\,;y) = (2t+1\,;t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

e) Aucune solution f) $(x\,;y) = (2\,;0)$

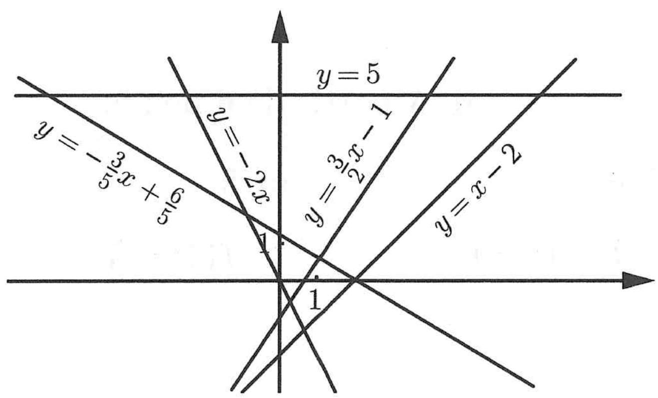
7. a) $(x\,;y) = (\frac{t}{2}\,;\frac{t}{2})$ b) $(x\,;y) = (3t\,;7t)$

8. a) $x > \frac{9}{4}$ b) $x \in [-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}[$

9. a) $f(x) = -\frac{3}{10}\,x + \frac{1}{10}$ b) $f(x) = -\frac{5}{8}\,x - \frac{25}{8}$

c) $f(x) = 5$ d) $x = -5$

10.



11. a) $t(v) = \dfrac{(v - v_0)}{9.8}$ b) 40.6 m/s

12. a) 45.25 cm b) $-39\,^\circ$C

13. 340 francs

14. a) 120 km/h b) 300 km/h c) impossible

15. 36 minutes

16. a) $I(\frac{17}{11}\,;\frac{14}{11})$ b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$ c) $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

17. Elles forment un triangle.

18. b) $a = 2$ c) $B(-1\,;0)$

19. a) 1) ${}^r\!f(x) = 3\,x + \frac{3}{2}$ 2) ${}^r\!g(x) = -\frac{5}{2}\,x + \frac{15}{2}$

3) $(f \circ g)(x) = -\frac{2}{15}\,x + \frac{1}{2}$ 4) $(g \circ f)(x) = -\frac{2}{15}\,x + \frac{16}{5}$

5) ${}^r(f \circ g)(x) = -\frac{15}{2}\,x + \frac{15}{4}$ 6) ${}^r(g \circ f)(x) = -\frac{15}{2}\,x + 24$

b) 1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{15}{2}$ 3) $\frac{21}{2}$

4) -5 5) $-\frac{3}{4}$ 6) $-\frac{15}{8}$

7) $\frac{5}{4}$ 8) $-\frac{1}{4}$ 9) $\frac{1}{4}$

d) 1) $(x\,;y) = (\frac{105}{22}\,;\frac{12}{11})$ 2) $(x\,;y) = (\frac{195}{34}\,;\frac{24}{17})$

20. 125 %

21. a) -40 b) 160 °C

22. a) Le père a gagné avec 3 secondes d'avance.

b) $\cong$ 12.35 m c) $\cong$ 7.14 m/s , $\cong$ 4.12 m/s d) $\cong$ 70.83 m

23. $x < \frac{16}{\pi}$

24. $\frac{6}{5}$

25. a) $n(x) = \frac{5}{12}\,x + 1$ b) A partir de 6 points

26. a) 3.5 b) 6 c) 5

27. a) $f(2) = 3$ $f(-1) = 6$ $f(4) = 7$

b) aucun

c) 0 et 3

28. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-2\,;-1\,[\\ -x & \text{si} \quad x \in [-1\,;1\,[\\ -1 & \text{si} \quad x \in [1\,;2] \end{cases}$

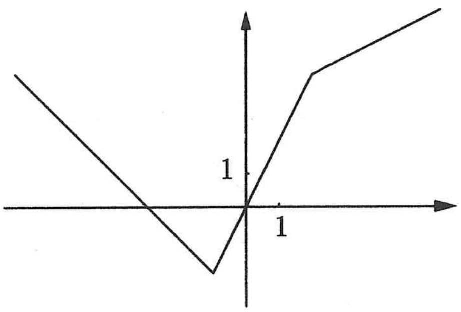
$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \in [-2\,;-1\,[\\ -2x - 1 & \text{si} \quad x \in [-1\,;0\,[\\ \frac{3}{2}x - 1 & \text{si} \quad x \in [0\,;2] \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x \in [-3\,;-1\,[\\ -x + 1 & \text{si} \quad x \in [-1\,;2\,[\\ 2x - 5 & \text{si} \quad x \in [2\,;3\,[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3\,;5\,[\\ \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} & \text{si} \quad x \in [5\,;7] \end{cases}$

a) $x = -1$ et $x = \frac{17}{3}$

b) $x \in \left]-\frac{3}{2}\,;0\right[\cup \left]5\,;7\right]$

30.



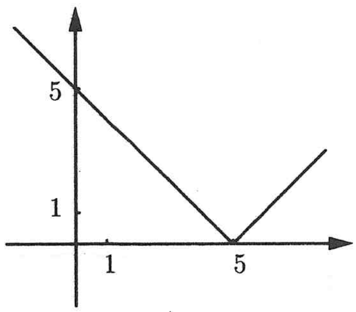
b) $x = -4$ et $x = 0.5$

$x = -1.5$, $x = 0$ et $x = 6$

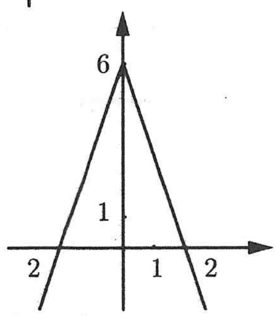
c) $x \in \left]-1.5\,;0\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$

31. $a = 4$

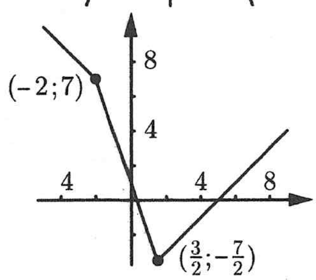
32. a) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$



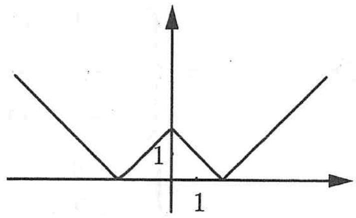
b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x < 0 \\ -3x + 6 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



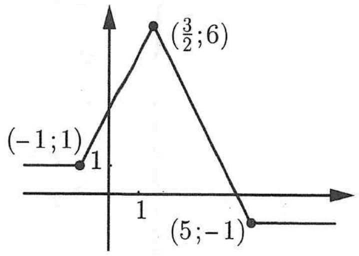
c) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-2\right[\\ -3x + 1 & \text{si } x \in \left[-2\,;\frac{3}{2}\right[\\ x - 5 & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[\end{cases}$



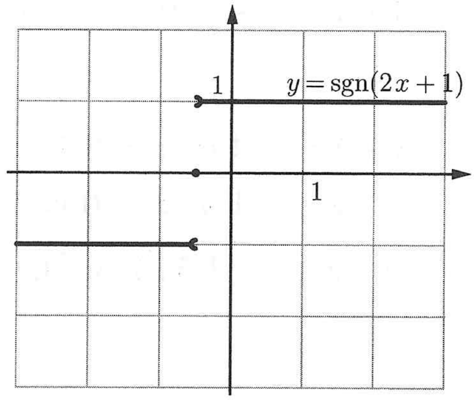
d) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;-2\,[\\ x+2 & \text{si} \quad x \in [-2\,;0\,[\\ -x+2 & \text{si} \quad x \in [\,0\,;2\,[\\ x-2 & \text{si} \quad x \in [\,2\,;+\infty\,[\end{cases}$



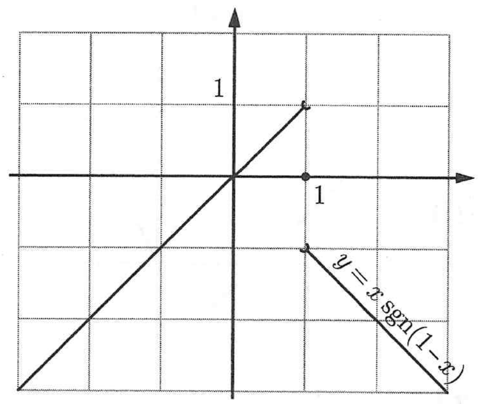
e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;-1\,[\\ 2\,x+3 & \text{si} \quad x \in [-1\,;\frac{3}{2}\,[\\ -2\,x+9 & \text{si} \quad x \in [\,\frac{3}{2}\,;5\,[\\ -1 & \text{si} \quad x \in [\,5\,;+\infty\,[\end{cases}$



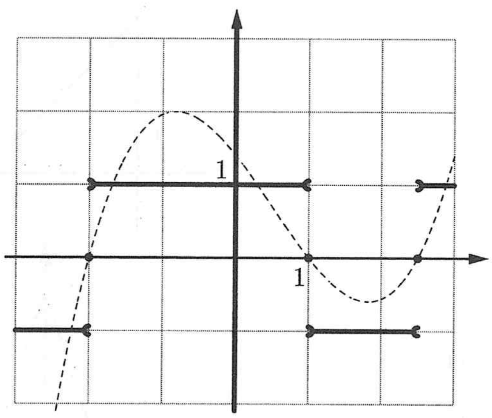
33. a)



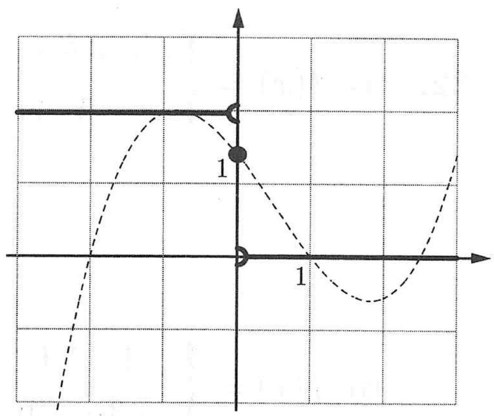
b)



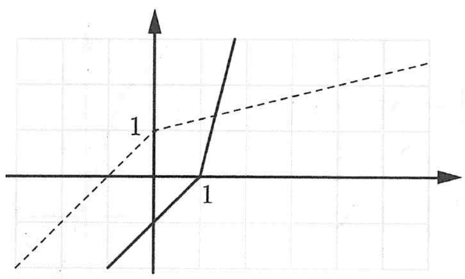
34. a)



b)



35. a)

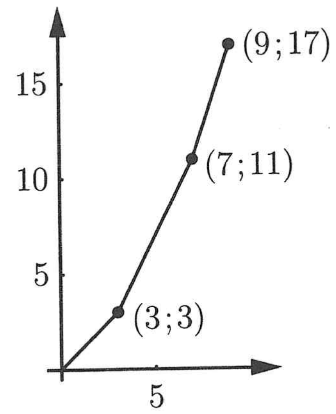


b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}\,x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

$^r f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4\,x-4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

c) $x = \frac{4}{3}$

36.



a) $f(0) = 0$, $f(3) = 3$, $f(7) = 11$ et $f(9) = 17$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;3[\\ 2x - 3 & \text{si } x \in [3\,;7[\\ 3x - 10 & \text{si } x \in [7\,;9] \end{cases}$

d) $f(x) = 10 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$

$f(x) = 15 \Leftrightarrow x = \frac{25}{3}$

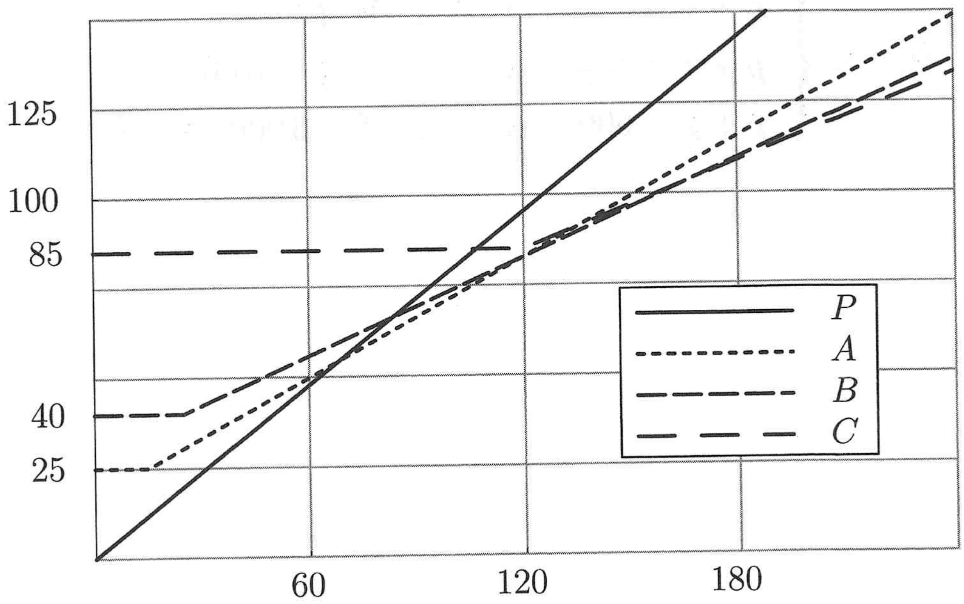
37. 142 857

38. 371.25 m

39. 20 kg

40. a) P : 72.– A : 66.25 B : 69.25 C : 85.–

b)



$P(x) = 0.8\,x$

$A(x) = 0.55\,x + 16.75 \quad (x \geq 15)$

$B(x) = 0.45\,x + 28.75 \quad (x \geq 25)$

$C(x) = 0.4\,x + 37 \quad (x \geq 120)$

c) P : moins de 67 minutes

A : entre 67 et 120 minutes

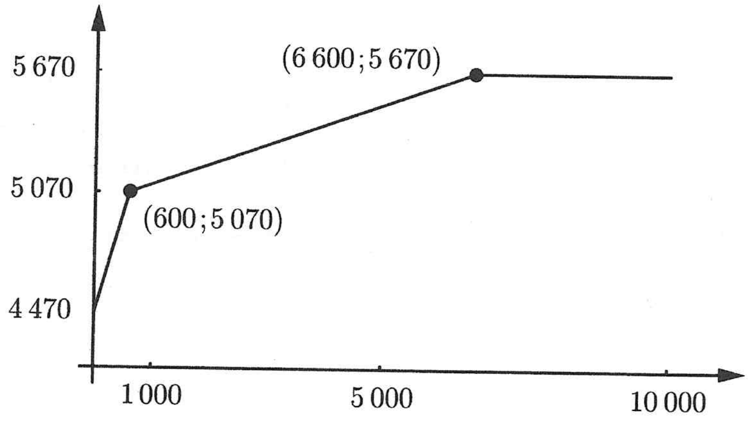
B : entre 120 et 165 minutes

C : plus de 165 minutes

d) Plus de 28 minutes et 45 secondes

41. a) 1 500.– b) 230.–

c)



d) $f(x) = \begin{cases} 3\,750 + x & \text{si} \quad x \in [\,0\,;1\,500\,[\\ 5\,250 + \frac{x-1\,500}{10} & \text{si} \quad x \in [\,1\,500\,;7\,500\,[\\ 5\,850 & \text{si} \quad x \in [\,7\,500\,;+\infty\,[\end{cases}$

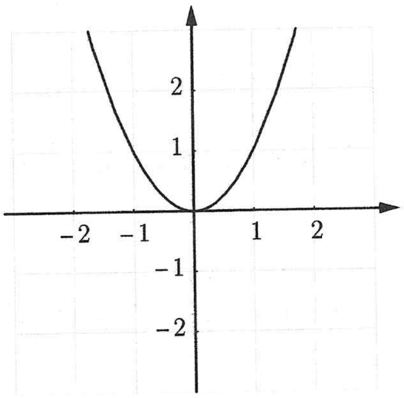
e) $f(x) = \begin{cases} p + x & \text{si} \quad x \in [\,0\,;f\,[\\ p + f + \frac{x-f}{10} & \text{si} \quad x \in [\,f\,;f+6\,000\,[\\ p + f + 600 & \text{si} \quad x \in [\,f+6\,000\,;+\infty\,[\end{cases}$

3. Fonctions du deuxième degré

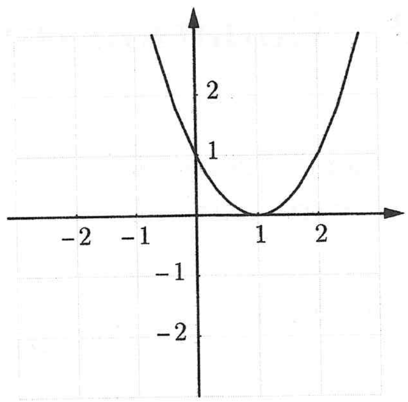
3.1 Paraboles

La fonction définie par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ $(a \neq 0)$ est une fonction du deuxième degré. Son graphe est une parabole.

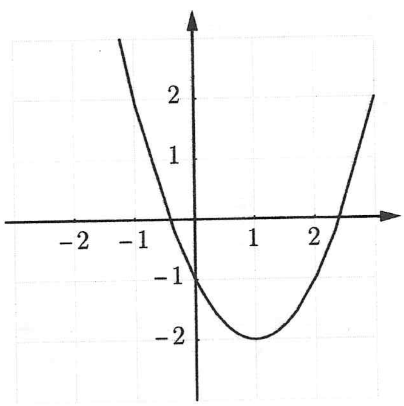
Exemples de graphes de fonctions du 2e degré



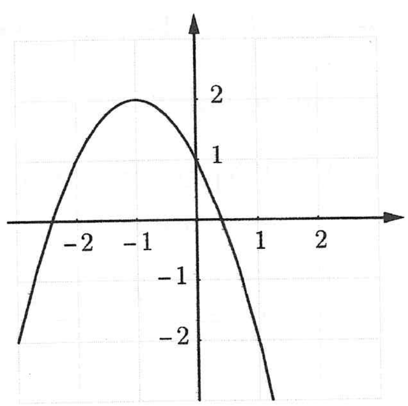
$y = x^2$



$y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$



$y = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$

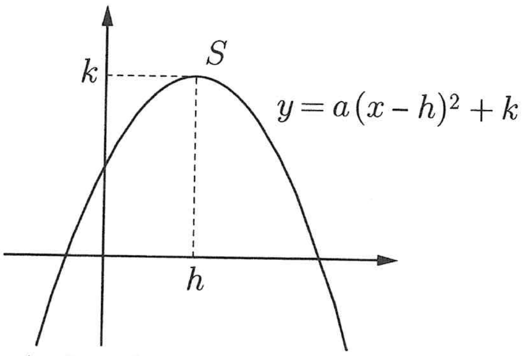


$y = -(x+1)^2 + 2 = -x^2 - 2x + 1$

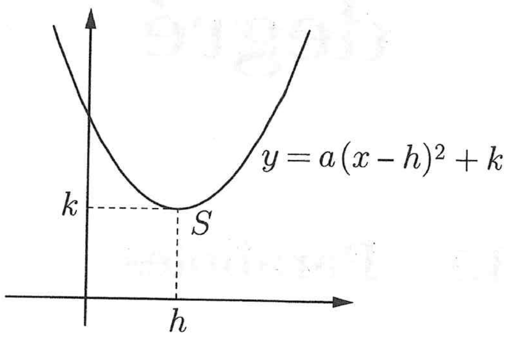
On peut vérifier que $a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}$

Toute fonction du 2^e^ degré $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ peut donc s'écrire sous la forme $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$ avec $h = \frac{-b}{2\,a}$ et $k = -\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}$

Son graphe est une parabole de sommet $S(h\,;k)$.



$a < 0$



$a > 0$

3.2 Equation du 2^e^ degré

Chercher les zéros de $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ revient à résoudre l'équation du 2^e^ degré $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Comme $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}$, l'équation est équivalente à $\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$.

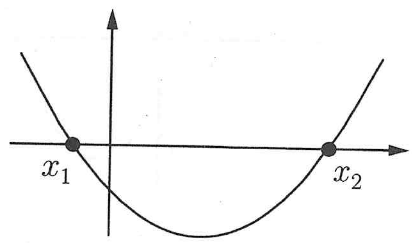
Notons $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ le **discriminant** de cette équation.

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ.

Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions

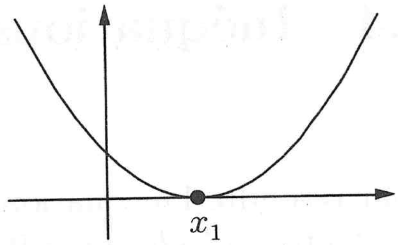
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

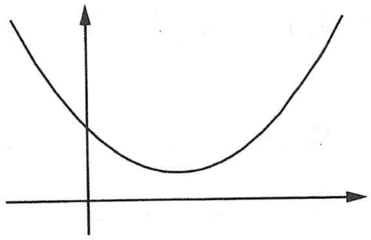


Si $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution

$$x_1 = \frac{-b}{2\,a}$$



Si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.



Exemple

Cherchons les solutions de l'équation $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 0$
Le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$ *est positif, donc l'équation possède deux solutions* $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{49}}{4} = -3$ *et* $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{49}}{4} = \dfrac{1}{2}$

3.3 Factorisation

Soit $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ une fonction du 2$^{\text{e}}$ degré.

Si $\Delta > 0$ f possède deux zéros x_1 et x_2
et on peut écrire $f(x) = a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.
On a : $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (relations de Viète[1]).

Si $\Delta = 0$ f possède un seul zéro x_1
et on peut écrire $f(x) = a\,(x - x_1)^2$.

Si $\Delta < 0$ f ne possède aucun zéro et on ne peut pas la décomposer en un produit de deux facteurs du 1$^{\text{er}}$ degré.

Exemple

L'équation $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 0$ *de l'exemple ci-dessus possède deux solutions :* $x_1 = -3$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$. *La fonction* $f(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 3$ *peut donc se factoriser sous la forme*

$$f(x) = 2\,(x + 3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 3) \cdot (2\,x - 1)$$

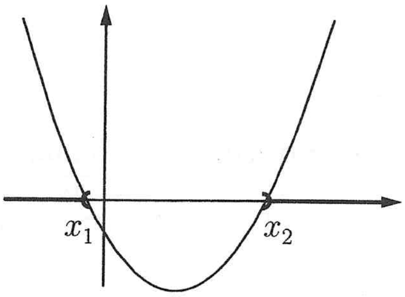
[1] François Viète, mathématicien français (1540–1603)

3.4 Inéquations du deuxième degré

Pour résoudre l'inéquation $a\,x^2 + b\,x + c > 0$, on résout l'équation correspondante $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ puis l'on observe le graphe de la fonction donnée par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ pour déterminer les solutions de l'inéquation.

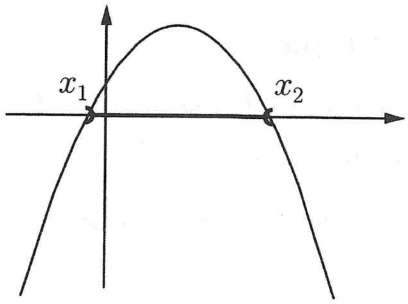
Si $\Delta > 0$ et $a > 0$, on a

$$S = \,]-\infty\,; x_1\,[\, \cup \,]\,x_2\,; +\infty\,[$$



Si $\Delta > 0$ et $a < 0$, on a

$$S = \,]\,x_1\,; x_2\,[$$

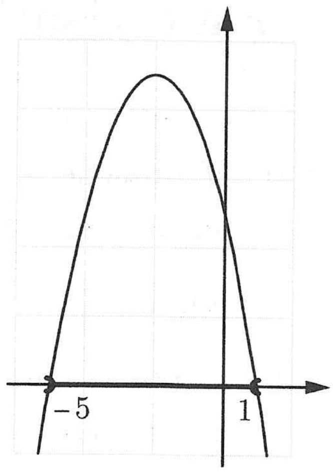


Exemple 1

Résolution de l'inéquation $-x^2 - 4\,x + 5 > 0$

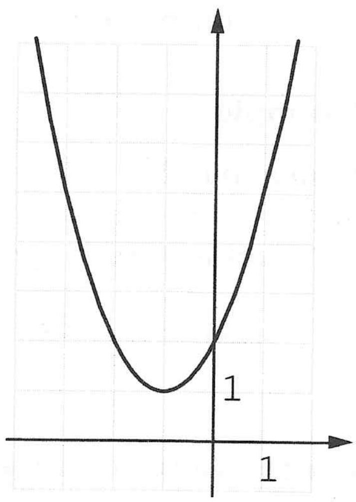
1) *Recherche des solutions de l'équation correspondante :* $-x^2 - 4\,x + 5 = 0$.
   On trouve $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -5$.

2) *Esquisse du graphe (cas où* $a < 0$*).*
   On en déduit que $S = \,]-5\,; 1\,[$



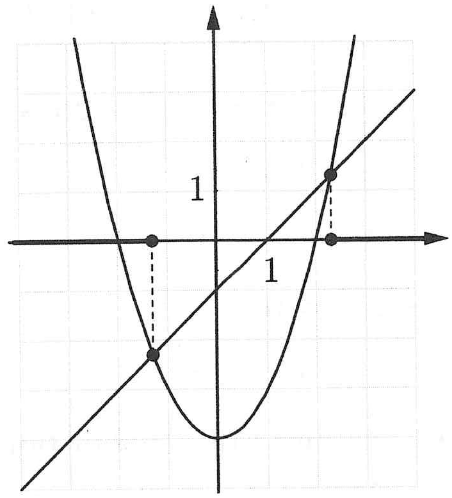
Exemple 2

L'équation $x^2 + 2\,x + 2 = 0$ *n'a pas de solution. Le dessin permet de constater que l'inéquation* $x^2 + 2\,x + 2 < 0$ *ne possède aucune solution alors que l'inéquation* $x^2 + 2\,x + 2 > 0$ *est vérifiée pour toutes les valeurs de* x .



Exemple 3

Observons les graphes des fonctions $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = x - 1$ et cherchons les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq g(x)$.



$x^2 - 4 \geq x - 1$

$x^2 - x - 3 \geq 0$

En résolvant l'équation $x^2 - x - 3 = 0$,

on trouve $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \cong -1.30$ *et*

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \cong 2.30$

Les graphes esquissés ci-contre permettent de donner la réponse :

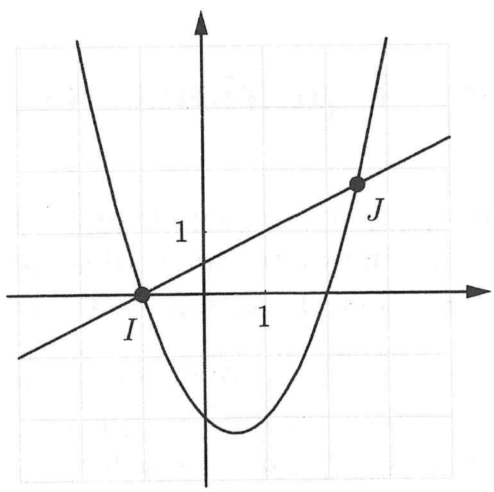
$$x \in \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2} ; +\infty\right[$$

3.5 Applications

Intersection d'une droite et d'une parabole

Chercher l'intersection entre la parabole d'équation $y = x^2 - x - 2$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ conduit à résoudre l'équation

$$x^2 - x - 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



$2x^2 - 2x - 4 = x + 1$

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49 > 0$

$x_1 = \dfrac{3-7}{4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{5}{2}$

$y_1 = \dfrac{x_1+1}{2} = 0$ et $y_2 = \dfrac{x_2+1}{2} = \dfrac{7}{4}$

On obtient les points d'intersection $I(-1 ; 0)$ et $J(\frac{5}{2} ; \frac{7}{4})$.

Intersection de deux paraboles

Chercher l'intersection des paraboles d'équations $y = x^2 + 6x + 9$ et $y = -x^2 - 2x + 1$ conduit à résoudre l'équation

$x^2 + 6x + 9 = -x^2 - 2x + 1$

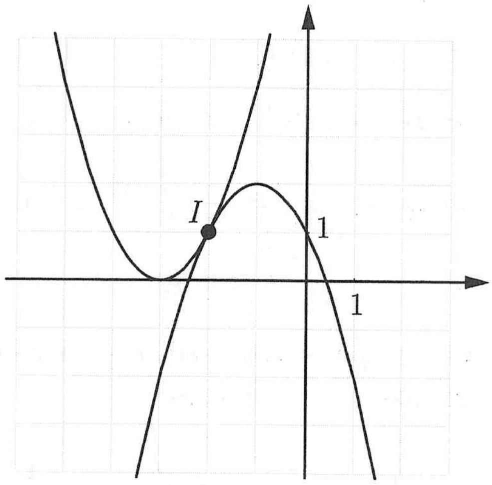
$2x^2 + 8x + 8 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0$

$x = -2$, d'où $y = 1$

Les graphes ont un seul point commun $I(-2;1)$.



3.6 Equations bicarrées

Pour résoudre l'équation $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$, on pose $x^2 = t$. L'équation devient $4t^2 + 11t - 3 = 0$. En la résolvant on trouve $t_1 = \frac{1}{4}$ et $t_2 = -3$.

Il reste donc à résoudre les deux équations $x^2 = \frac{1}{4}$ et $x^2 = -3$.

La première a deux solutions $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$, alors que la seconde n'en a aucune.

3.7 Equations avec des racines carrées

Pour résoudre une équation où l'inconnue se trouve sous une racine carrée, on isole une racine avant d'élever au carré les deux membres de l'équation. On fait ainsi disparaître cette racine carrée.

Attention : le fait d'élever au carré les deux membres d'une équation peut introduire des solutions qui ne satisfont pas l'équation initiale. Il est donc nécessaire de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemple

Résolution de l'équation $\sqrt{x+5}+x-1=0$

$\sqrt{x+5}+x-1=0$	$-(x-1)$
$\sqrt{x+5}=-x+1$	$(\ldots)^2$
$x+5=(-x+1)^2$	développer
$x+5=x^2-2x+1$	$-(x+5)$
$x^2-3x-4=0$	*Résolution d'une équation du 2^e^ degré*
$x_1=-1$ *et* $x_2=4$	

Il est nécessaire de vérifier dans l'équation de départ :

$\sqrt{-1+5}+(-1)-1=0$ *donc* $x_1=-1$ *est solution de l'équation*

$\sqrt{4+5}+4-1=6$ *donc* $x_2=4$ *n'est pas solution de l'équation*

L'équation $\sqrt{x+5}+x-1=0$ *possède donc une seule solution* $x=-1$.

3.8 Exercices

1. Exprimer $f(x)$ sous la forme $a\,(x-h)^2+k$, et en déduire les coordonnées du sommet des paraboles.

a) $f(x)=x^2-6\,x+11$

b) $f(x)=-x^2-4\,x-8$

c) $f(x)=2\,x^2-x+\frac{9}{16}$

d) $f(x)=-\frac{1}{2}\,x^2+2\,x+7$

2. Résoudre (sans formule) les équations ci-dessous.

a) $x^2-9=0$

b) $x^2+5\,x=0$

c) $(x-3)^2=0$

d) $(x-3)^2-4=0$

e) $4\,(x+5)^2-9=0$

f) $4\,(x+5)^2+9=0$

g) $(x-p)^2-q=0$

h) $x^2+6\,x+9-4=0$

i) $x^2+6\,x+5=0$

j) $x^2+5\,x+4=0$

k) $2\,x^2+10\,x+8=0$

l) $a\,x^2+b\,x+c=0$

3. Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2-3\,x+2=0$

b) $x^2-5\,x+4=0$

c) $x^2-4\,x+5=0$

d) $x^2+6\,x+9=0$

e) $-x^2+30\,x-209=0$

f) $2\,x^2-5\,x-2=0$

g) $-\frac{1}{2}\,x^2+x+6=0$

h) $2\,x^2=x+6$

4. Factoriser si possible les polynômes suivants.

a) $p(x)=x^2+19\,x+18$

b) $p(x)=x^2-4\,x+4$

c) $p(x)=2\,x^2+5\,x-3$

d) $p(x)=3\,x^2-5\,x+2$

e) $p(x)=4\,x^2-20\,x+25$

f) $p(x)=x^2-9$

g) $p(x)=x^2-\frac{4}{9}$

h) $p(x)=9\,x^2-5\,x$

i) $p(x)=8\,x^2+6\,x+1$

j) $p(x)=\frac{1}{3}\,x^2-x+4$

5. Dessiner les graphes des fonctions f suivantes.

a) $f(x)=x^2-4\,x$

b) $f(x)=2\,x^2-4\,x-2$

c) $f(x)=-x^2+4$

d) $f(x)=-\frac{1}{2}\,x^2-x+4$

6. Calculer l'intersection des graphes de $f(x)=2\,x^2-4\,x+3$ et de $g(x)=3\,x^2-12\,x+18$

7. Calculer l'intersection des graphes de $f(x) = -x^2 + 13\,x - 48$ et de $g(x) = x^2 - 11\,x + 24$, puis représenter graphiquement f et g dans un même système d'axes.

8. Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations ci-dessous.

a) $f(x) = 0$ b) $g(x) = 0$ c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > 0$ e) $f(x) < 0$ f) $g(x) \geq 0$

g) $g(x) \leq 0$ h) $f(x) < g(x)$ i) $g(x) \leq -2$

9. Représenter graphiquement les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 2\,x & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

10. Définir les fonctions suivantes par intervalles sans utiliser de valeur absolue.

a) $f(x) = |\,x^2 - 3\,x + 2\,|$ b) $f(x) = x^2 - 3\,|\,x\,| + 2$

c) $f(x) = x^2 - |\,2\,x - 1\,|$ d) $f(x) = |\,x^2 - 2\,x\,| - 1$

11. On donne la fonction $f(x) = x^2 - 2\,x - |\,2\,x - 1\,|$

a) Définir f par intervalles sans utiliser de valeur absolue.

b) Dessiner soigneusement le graphe de f.

c) Résoudre l'équation $f(x) = -1$.

d) Donner la solution de l'inéquation $f(x) > -1$.

e) Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x) = m$ a-t-elle 3 solutions ?

12. Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

a) de sommet $S(2\,;5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4\,;-1)$;

b) qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite $y = 8$;

c) qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite $y = -1$.

13. Vérifier que la parabole d'équation $y = (x-3)^2$ est tangente à la droite $y = 2\,x - 7$ et déterminer les coordonnées du point de contact.

14. Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1\,;2)$ tangente à la droite $y = x$.

15. Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x) = x^2 - 5\,x + 4$ et $g(x) = -4\,x + 10$

b) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2\,x^2 - 6$

16. Pour quelles valeurs de a l'équation $x^2 + a\,x - x + 4 = 0$ ne possède-t-elle aucune solution ?

17. a) Pour quelles valeurs de m l'équation $2\,x^2 + m\,x + 2 = 0$ possède-t-elle une seule solution ?

b) Pour quelles valeurs de m l'équation $-\frac{1}{3}\,x^2 + (m+1)\,x + m = 0$ possède-t-elle deux solutions ?

c) Pour quelles valeurs de m les graphes des fonctions $f(x) = -x^2 + m$ et $g(x) = x^2 + m\,x + 2$ sont-ils tangents ?

18. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'équation $x^2 + a\,x + 3 = x$ a-t-elle exactement une solution ?

19. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + a\,x + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

20. On donne la fonction $f(x) = \left|\,x^2 - 4\,x\,\right|$.
Pour quelle valeur de m l'équation $f(x) = m$ possède-t-elle trois solutions ?

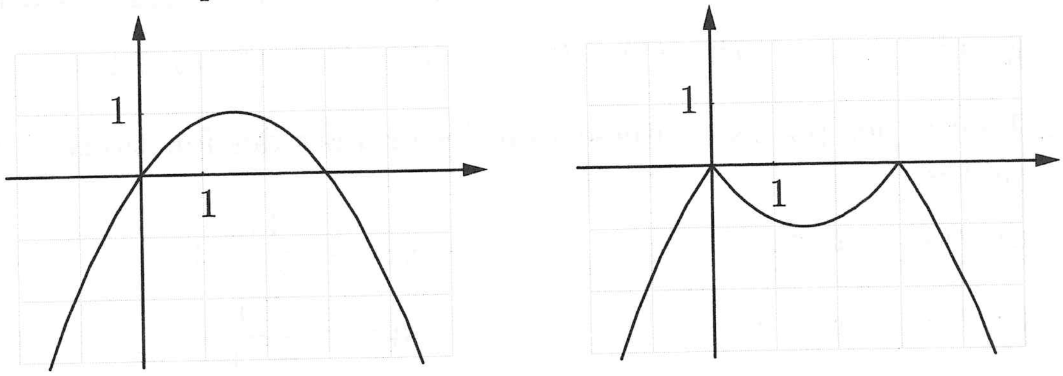
21. On considère la fonction $f(x) = |\,x^2 - 2\,x\,|$.
Pour quelles valeurs de m, l'équation $f(x) = m$ possède-t-elle deux solutions ?

22. Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de $f(x) = x^2 + a$ est-il tangent au graphe de $g(x) = 4\,x - x^2$?

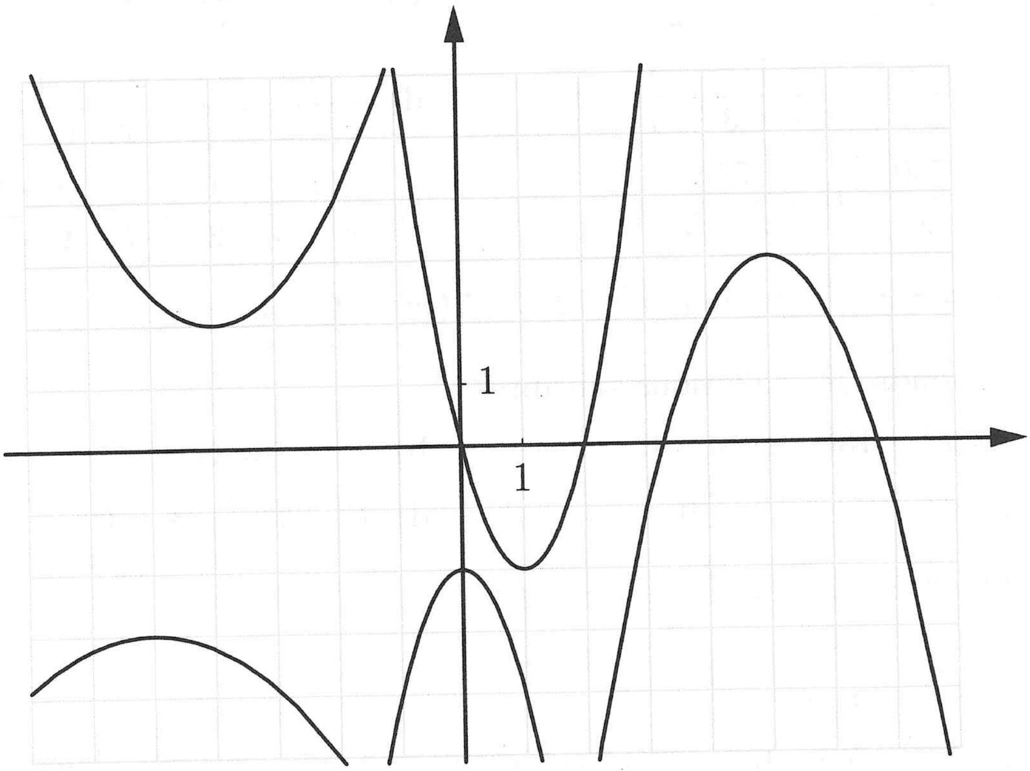
23. Trouver, en fonction de b, le nombre de points d'intersection des paraboles $y = 2\,x^2 + b\,x - 4$ et $y = x^2 + 2\,x + 4\,b$.

24. Soit $f(x) = \frac{3}{4}\,x^2$ et $g(x) = a\,x + b$.
Trouver a et b sachant que $g(1) = 0$ et que les graphes de f et de g ont exactement un point commun.

25. Donner une expression fonctionnelle pour les graphes ci-dessous



26. Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



27. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4\,x + 4$.

a) Dessiner le graphe de f

b) Déterminer x tel que $f(x) = \frac{1}{4}$

c) Déterminer l'intervalle I sachant que $f(x) < 1$ pour tout $x \in I$.

28. Résoudre par rapport à x les équations suivantes.

a) $(x-4)^2 = (2\,x-5)^2$

b) $x^3 - 6\,x^2 + 8\,x = 0$

c) $3\,x^4 - 13\,x^3 - 10\,x^2 = 0$

d) $(x^5 - 9\,x^4)\cdot(x-1)\cdot(x^2-1) = 0$

e) $x^2 - (u+v)\,x + u\,v = 0$

f) $a\,x^2 - (a^2+1)\,x + a = 0$

g) $x^2 - 2\,u\,x + (u^2 - v^2) = 0$

h) $m^2\,x^2 - 3\,m\,x + 2 = 0$

29. Trouver les points d'intersection des graphes des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2\,x^2 - 6$ $\qquad g(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

30. Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

a) $\dfrac{x-1}{2\,x-1} = \dfrac{3\,x-5}{4\,x-2}$

b) $\dfrac{x^2+x+1}{2\,x+2} = x$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3\,x-4}{(x-1)\cdot(x-2)}$

e) $\dfrac{750}{x} + 6 = \dfrac{720}{x-5}$

f) $\dfrac{x}{x-6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x+6}{6-x}$

31. Résoudre l'équation $(x^2-2)^2 - 5\,(x^2-2) - 14 = 0$.

32. Résoudre les équations suivantes.

a) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 1 = 0$

c) $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$

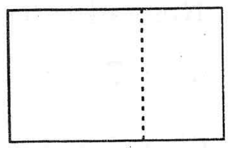
d) $x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0$

e) $(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) + 1 = 0$

f) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 3 = 0$

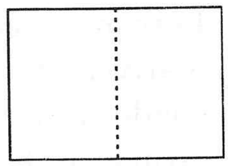
g) $(x^2 - 5\,x + 6)^2 - 2\,(x^2 - 5\,x + 6) = 0$

33. On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



Déterminer la longueur du petit coté d'un rectangle d'or dont le grand coté mesure 1 mètre.

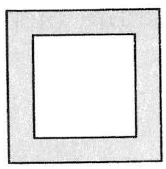
34. a) On dit qu'un rectangle est de *format* A si, lorsqu'il est coupé en deux rectangles égaux, ces derniers sont semblables au premier (préservation du rapport des côtés).



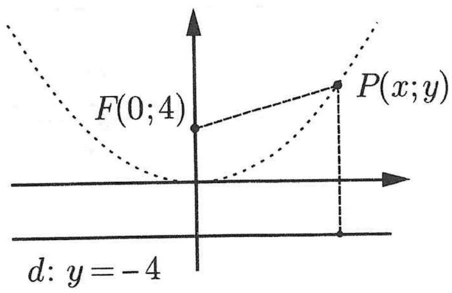
Déterminer le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle de format A.

b) Une feuille de papier A0 est une feuille de format A dont la surface mesure $1\,\mathrm{m}^2$. En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles A1 ; en coupant en deux une feuille A1, on obtient deux feuilles A2 et ainsi de suite.
Déterminer, en millimètres, la longueur et la largeur d'une feuille de format A4.

35. Le grand carré est de côté $1\,\mathrm{m}$. Trouver la largeur (constante) de la bande, sachant qu'elle a la même aire que le carré intérieur.



36. On donne le point $F(0\,;4)$, la droite d d'équation $y = -4$ et un point $P(x\,;y)$ quelconque avec $y > 0$.



a) Trouver la distance de P à d.

b) Trouver la distance de P à F.

c) Décrire l'ensemble des points P qui sont équidistants de la droite d et du point F (équation et dessin).

37. Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir le sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

38. Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de $240\,\mathrm{m}^2$, quelle est sa largeur ?

39. Résoudre les équations suivantes

a) $\sqrt{7-x} = x-5$

b) $x = 4+\sqrt{4x-19}$

c) $\sqrt{x+1} - x = x+2$

d) $x - \sqrt{-7x-24} = -2$

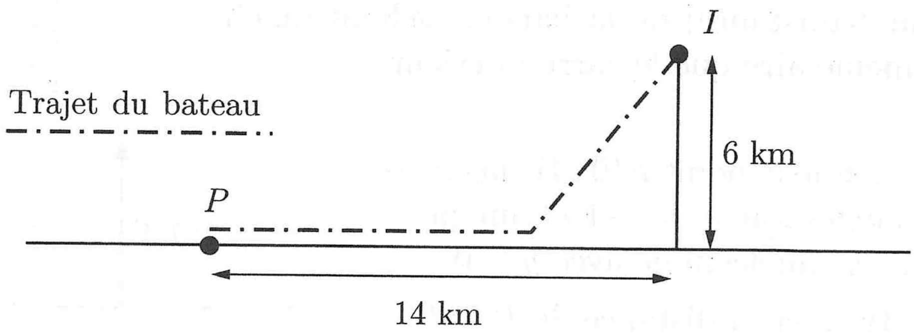
e) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

f) $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

40. Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4.9\,t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ $330\,\mathrm{m/s}$, estimer la hauteur de la falaise.

41. Deux trains partent en même temps de deux villes A et B distantes de 360 km. Ils se rencontrent au bout de 4 heures. Pour que la rencontre se fasse à mi-distance, il faudrait que le train à destination de B parte 54 minutes avant l'autre. Calculer la vitesse moyenne des deux trains.

42. Un bateau relie en 45 minutes un port P et une île I située comme le montre la figure ci-dessous. Le bateau longe le rivage jusqu'à un certain point, puis se dirige en ligne droite vers l'île. Si le bateau parcourt 24 km par heure le long du rivage et 20 km par heure lorsqu'il est en pleine mer, déterminer la longueur du trajet.



3.9 Réponses aux exercices du chapitre 3

1. a) $f(x) = (x-3)^2 + 2$ $\quad S(3\,;2)$

b) $f(x) = -(x+2)^2 - 4$ $\quad S(-2\,;-4)$

c) $f(x) = 2\,(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}$ $\quad S(\frac{1}{4}\,;\frac{7}{16})$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,(x-2)^2 + 9$ $\quad S(2\,;9)$

2. a) $x_1 = -3\,,\ x_2 = 3$

b) $x_1 = -5\,,\ x_2 = 0$

c) $x = 3$

d) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 5$

e) $x_1 = -\frac{13}{2}\,,\ x_2 = -\frac{7}{2}$

f) Pas de solution

g) $x_1 = p - \sqrt{q}\,,\ x_2 = p + \sqrt{q}$ si $q > 0$

h) $x_1 = -5\,,\ x_2 = -1$

i) $x_1 = -5\,,\ x_2 = -1$

j) $x_1 = -4\,,\ x_2 = -1$

k) $x_1 = -4\,,\ x_2 = -1$

l) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$ si $b^2 - 4\,a\,c > 0$

3. a) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 2$

b) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 4$

c) Pas de solution

d) $x = -3$

e) $x_1 = 11\,,\ x_2 = 19$

f) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$

g) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$

h) $x_1 = -\frac{3}{2}\,,\ x_2 = 2$

4. a) $p(x) = (x+18)\cdot(x+1)$

b) $p(x) = (x-2)^2$

c) $p(x) = 2\,(x+3)\cdot(x-\frac{1}{2})$

d) $p(x) = 3\,(x-\frac{2}{3})\cdot(x-1)$

e) $p(x) = 4\,(x-\frac{5}{2})^2$

f) $p(x) = (x-3)\cdot(x+3)$

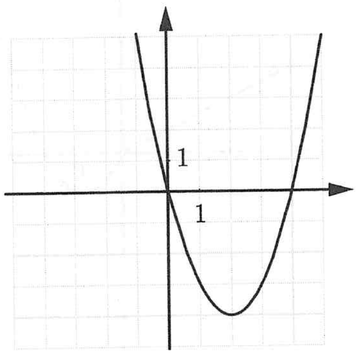
g) $p(x) = (x-\frac{2}{3})\cdot(x+\frac{2}{3})$

h) $p(x) = 9\,x\,(x-\frac{5}{9})$

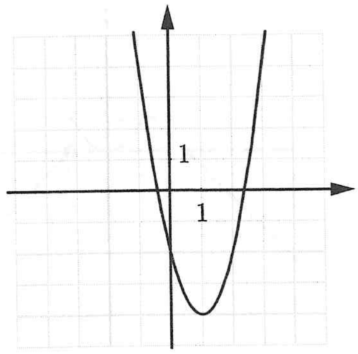
i) $p(x) = 8\,(x+\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{4})$

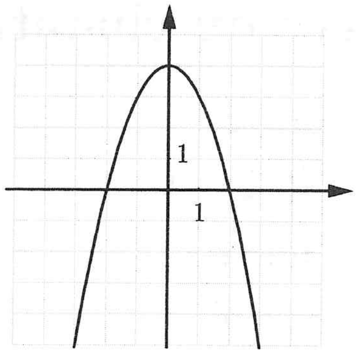
j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

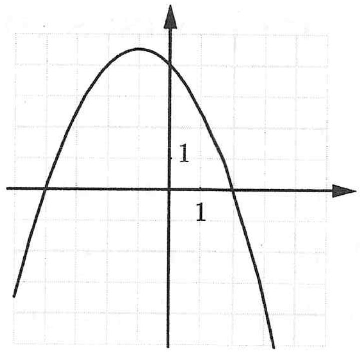
5. a)



b)

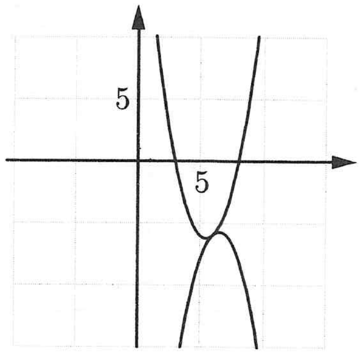


c) 

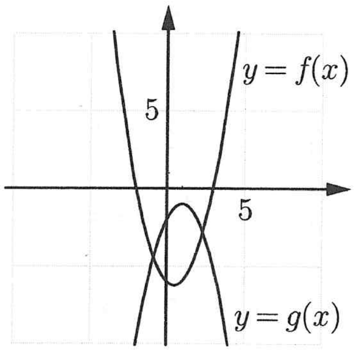
d) 

6. $I_1(3\,;9)$ et $I_2(5\,;33)$

7. $I(6\,;-6)$



8.



a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

b) Pas de solution

c) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

d) $S =]-\infty\,;-2[\, \cup\,]3\,;+\infty[$

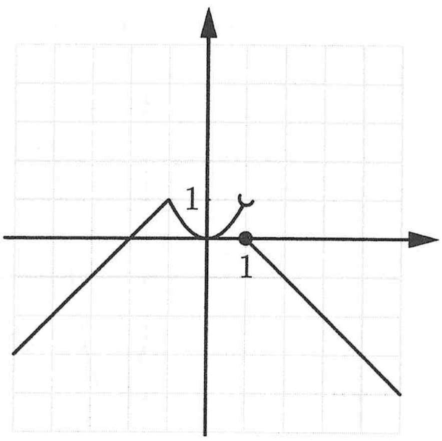
e) $S =]-2\,;3[$

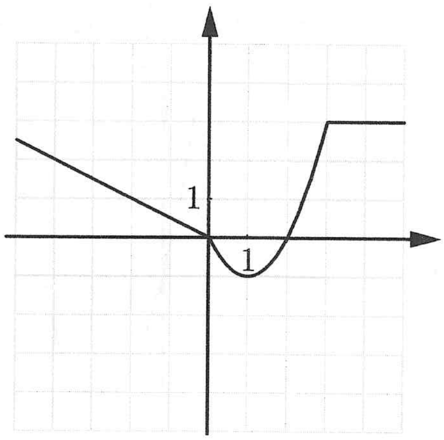
f) $S = \{\}$

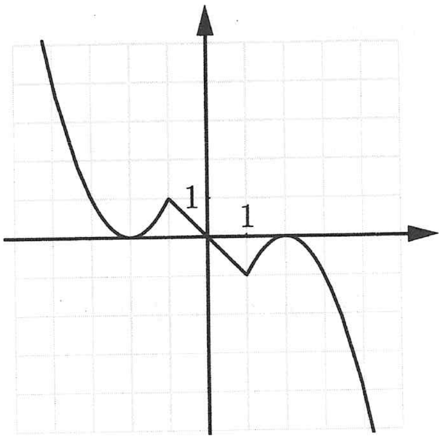
g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \left]\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\,;\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right[$

i) $S =]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$

9. a) 

b) 

c) 

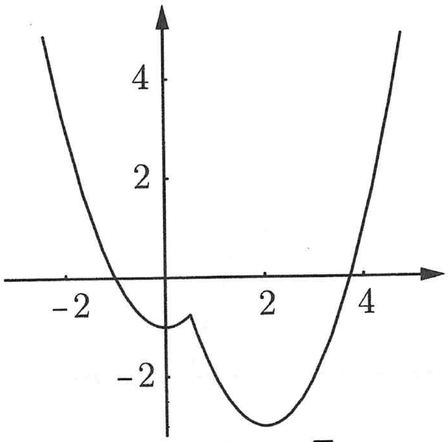
10. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \in [1;2] \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \in [0;2] \\ x^2 - 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

11. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

b) 

c) $x_1 = 0$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, $x_3 = 2 + \sqrt{2}$

d) $x \in]-\infty;0[\cup]0;2-\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{2};+\infty[$

e) $m_1 = -1$, $m_2 = -\frac{3}{4}$

12. a) $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 5$ b) $y = -2(x+3)\cdot(x-1)$

c) $y = \frac{1}{4}(x+3)\cdot(x-1)$

13. $C(4\,;1)$

14. $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 2$

15. a) $I(-2\,;18)$ et $J(3\,;-2)$ b) $I(-2\,;2)$ et $J(3\,;12)$

16. $a \in \,]-3\,;5\,[$

17. a) $m = \pm 4$ c) $m = -4\,(1 \pm \sqrt{2})$

b) $m \in \,]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]-\frac{1}{3}\,;+\infty\,[$

18. $a_1 = 1 + \sqrt{12}$, $a_2 = 1 - \sqrt{12}$

19. $a_1 = 6$, point de contact $(-3\,;-4)$, $a_2 = -6$, point de contact $(3\,;-4)$

20. $m = 4$

21. $m \in \{0\} \cup]1\,;+\infty[$

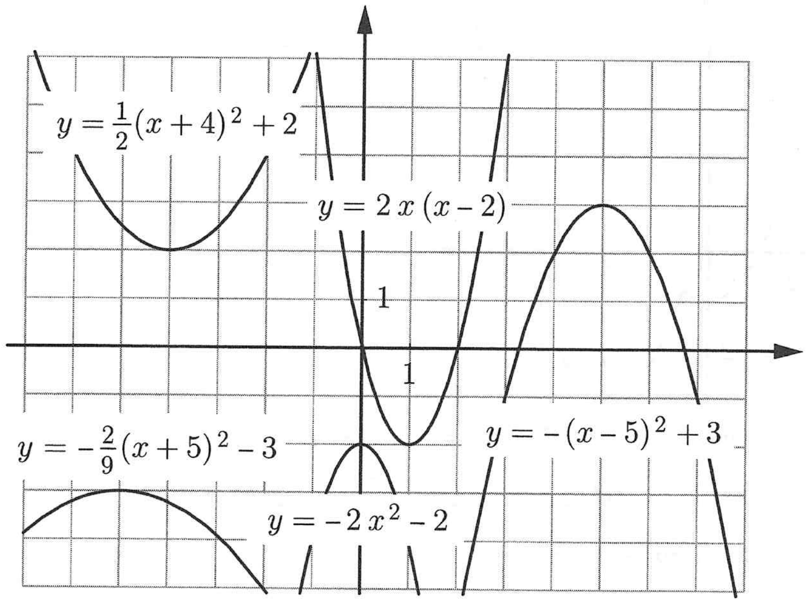
22. $a = 2$

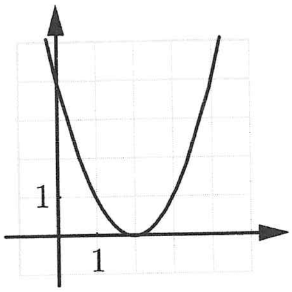
23. Aucun point d'intersection si $b \in \,]6-\sqrt{48}\,;6+\sqrt{48}\,[$
Un point d'intersection si $b = 6-\sqrt{48}$ ou $b = 6+\sqrt{48}$
Deux points d'intersection si $b \in \,]-\infty\,;6-\sqrt{48}\,[\,\cup\,]\,6+\sqrt{48}\,;+\infty\,[$

24. $a = 0$, $b = 0$ et $a = 3$, $b = -3$

25. a) $y = -\frac{4}{9}\,x\,(x-3)$ b) $y = -\left|\,\frac{4}{9}\,x\,(x-3)\,\right|$

26.



27. 

b) $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$

c) $I =]\,1\,;3\,[$

28. a) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 3$

b) $x_1 = 0\,,\ x_2 = 2\,,\ x_3 = 4$

c) $x_1 = -\frac{2}{3}\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 5$

d) $x_{1,2} = \pm 1\,,\ x_3 = 0\,,\ x_4 = 9$

e) $x_1 = u\,,\ _2 = v$

f) $x_1 = a\,,\ x_2 = \frac{1}{a}$

g) $x_1 = u + v\,,\ x_2 = u - v$

h) $x_1 = \frac{1}{m}\ ,\ x_2 = \frac{2}{m}$

29. a) $(2\,;2)$ et $(-2\,;2)$

b) $(1\,;2)$ et $(-1\,;2)$

30. a) $x_1 = 3$

b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

c) $x_1 = 5\,,\ x_2 = -\frac{5}{3}$

d) $x_1 = 4$

e) $x_1 = -25\,,\ x_2 = 25$

f) $x_1 = -3\,,\ x_2 = 18$

31. $x_1 = -3\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 3$

32. a) $x_1 = -3,\ x_{2,3} = \pm 2\,,\ x_4 = 3$

b) $x_1 = -1\,,\ x_2 = 1$

c) Pas de solution

d) $x_1 = -1\,,\ x_2 = 2$

e) $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$

f) $x_1 = -1\,,\ x_2 = \frac{1}{3}$

g) $x_1 = 1\,,\ x_2 = 2\,,\ x_3 = 3\,,\ x_4 = 4$

33. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

34. a) $\sqrt{2}$

b) 297.3×210.2

35. 14.64 cm

36. a) $y + 4$

b) $\sqrt{x^2 + y^2 - 8\,y + 16}$

c) $y = \frac{1}{16}\,x^2$

37. 20 cm $\times$ 20 cm

38. 2 m

39. a) $x = 6$

b) $x_1 = 5\,,\ x_2 = 7$

c) $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{3}{4}$

d) Pas de solution

e) $x = -1$

f) $x = -\frac{5}{4}$

40. 70.27 m

41. 40 km/h et 50 km/h

42. 16 km ou 15.64 km

4. Fonctions polynômes

4.1 Définition

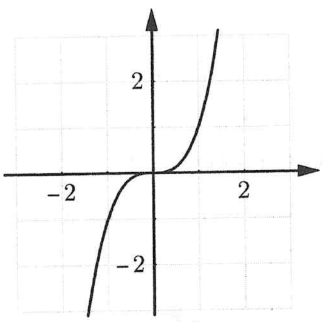
La fonction donnée par $f(x) = c_n\,x^n + c_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + c_1\,x + c_0$ $(c_n \neq 0)$ est une fonction **polynôme** de **degré** n ou polynôme de degré n ; elle est définie pour toute valeur réelle de x.

Les nombres réels c_n , c_{n-1} , … , c_1 et c_0 sont les **coefficients** de f.

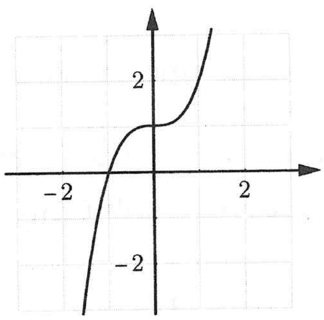
4.2 Fonctions du 3e degré

La fonction définie par $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ $(a \neq 0)$ est une fonction polynôme du 3e degré.

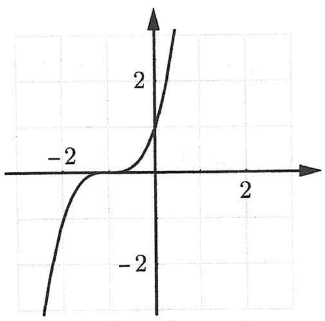
Exemples de graphes de fonctions polynômes du 3e degré



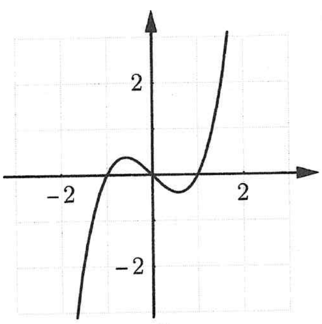
$y = x^3$



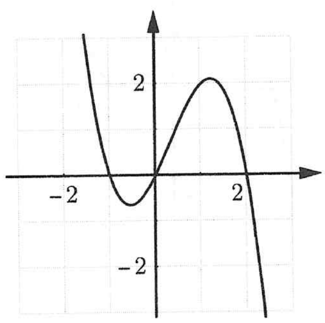
$y = x^3 + 1$



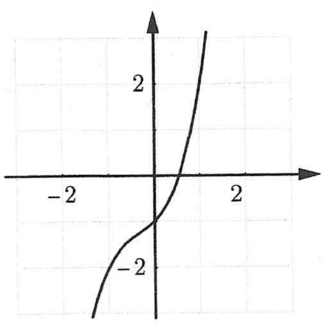
$y = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$



$y = x^3 - x$



$y = -x^3 + x^2 + 2x$



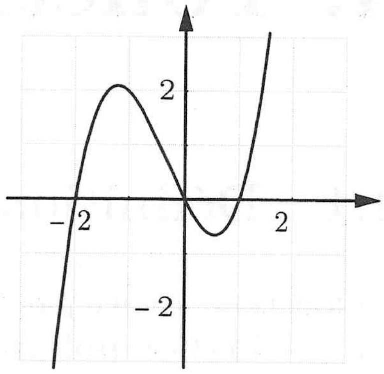
$y = x^3 + x^2 + x - 1$

4.3 Equations du 3^e degré

Exemple

En observant la figure ci-contre, on constate que le graphe de la fonction donnée par $f(x) = x^3 + x^2 - 2\,x$ *coupe l'axe* Ox *en trois points.*

L'équation $x^3 + x^2 - 2\,x = 0$ *possède donc trois solutions.*



Pour trouver les solutions de cette équation, il est possible, dans ce cas particulier, de mettre x *en évidence et de se ramener ainsi à la résolution d'une équation du 1er degré et d'une équation du 2e degré.*

$$x^3 + x^2 - 2\,x = 0$$

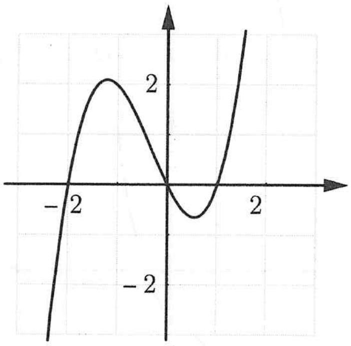
$$x\,(x^2 + x - 2) = 0$$

Les deux équations à résoudre sont $x = 0$ *et* $x^2 + x - 2 = 0$.

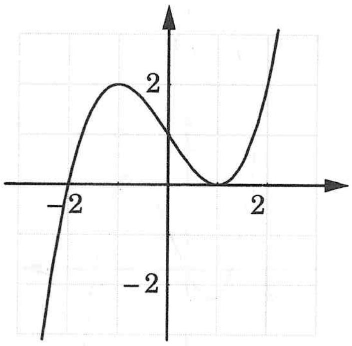
On obtient les solutions $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ *et* $x_3 = 1$.

Une équation du 3e degré possède une, deux ou trois solutions.

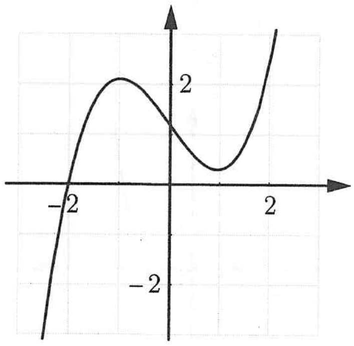
L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions



L'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions



L'équation $f(x) = 0$ possède 1 solution



On constate que le graphe coupe toujours l'axe Ox.

Equations du 3^e degré pouvant se résoudre par factorisation

Bien qu'il existe une formule[1] de résolution des équations du 3^e degré, on se limite ici à des cas particuliers.

Exemple 1

Résolution par mise en évidence

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$
$$(x-3)\,x^2 - (x-3) = 0$$
$$(x-3)\cdot(x^2-1) = 0$$

La règle du produit nul permet de trouver les solutions de l'équation en résolvant les deux équations $x - 3 = 0$ *et* $x^2 - 1 = 0$

Les trois solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ *sont donc* $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ *et* $x_3 = 1$.

Exemple 2

Résolution par recherche d'une solution particulière et division

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

On peut trouver, par tâtonnement, que $x = 2$ *est solution de l'équation.*

Le polynôme $x^3 - x^2 - 14x + 24$ *peut alors s'écrire comme le produit du binôme* $x - 2$ *par un polynôme du 2^e degré :*

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x-2)\cdot(\text{polynôme du } 2^e \text{ degré})$$

On obtient ce polynôme du 2^e degré en divisant $x^3 - x^2 - 14x + 24$ *par* $x - 2$. *Effectuons cette division :*

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 - & x^2 - & 14x + 24 & \;x - 2 \\ \cline{4-4}
x^3 - & 2x^2 & & x^2 + x - 12 \\ \cline{1-3}
 & x^2 - & 14x + 24 & \\
 & x^2 - & 2x & \\ \cline{2-3}
 & & -12x + 24 & \\
 & & -12x + 24 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

L'équation $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ *s'écrit* $(x-2)\cdot(x^2 + x - 12) = 0$

L'équation $x^2 + x - 12 = 0$ *admet les deux solutions* $x = -4$ *et* $x = 3$

Les trois solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ *sont donc* $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ *et* $x_3 = 3$.

---

[1] Tartaglia et Cardan, XVI^e siècle

4.4 Division euclidienne

Diviser un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$ revient à chercher des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{avec} \quad \deg\big(r(x)\big) < \deg\big(q(x)\big)$$

On appelle $p(x)$ le **dividende**, $d(x)$ le **diviseur**, $q(x)$ le **quotient** et $r(x)$ le **reste**.

Exemple

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 5x - 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 \qquad\quad - x \quad\;\; & x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^2 + 6x - 1 & \\
-3x^2 \qquad\; + 3 & \\ \cline{1-1}
6x - 4 &
\end{array}
$$

Le quotient de la division est $x - 3$ *et le reste est* $6x + 4$.

On peut écrire : $x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x - 3) + 6x - 4$

Un polynôme $p(x)$ est dit **divisible** par un polynôme $d(x)$ si le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ vaut zéro.

Si $p(x)$ est un polynôme de degré n et $d(x)$ est un polynôme de degré m, alors le quotient de la division de $p(x)$ par $d(x)$ est un polynôme de degré $n - m$ et le reste est un polynôme de degré inférieur à m.

Théorème

Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par le binôme $x - a$ vaut $p(a)$.

En effet, si $q(x)$ est le quotient et r le reste de la division de $p(x)$ par $x - a$, on a : $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r$.

En remplaçant x par a, on obtient $p(a) = r$.

Théorème

Le nombre a est un zéro de $p(x) = c_n\, x^n + c_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0$ si et seulement si $p(x)$ est divisible par $x - a$.

Division par $x - a$ selon le schéma de Horner

Pour diviser un polynôme par le binôme $x - a$, il est pratique d'utiliser le schéma de Horner[2] illustré par l'exemple ci-dessous.

Exemple

Divisons $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ *par* $x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,x & +\,2 & \;x - 3 \\ \cline{6-6}
x^4 & -\,3x^3 & & & & \;x^3 + 2x + 5 \\ \cline{1-5}
& & 2x^2 & -\,x & +\,2 & \\
& & 2x^2 & -\,6x & & \\ \cline{3-5}
& & & 5x & +\,2 & \\
& & & 5x & -\,15 & \\ \cline{4-5}
& & & & 17 &
\end{array}
$$

Cette même division peut être effectuée de la manière ci-dessous.

Partons du tableau suivant

1	−3	2	−1	2	
					(3)

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du polynôme.

Le (3) *de la deuxième ligne du tableau est le zéro de* $x - 3$.

Construisons, en commençant par le coin inférieur gauche, le tableau suivant :

1	−3	2	−1	2	
	⊕	⊕	⊕	⊕	
	3	0	6	15	(3)
1	0	2	5	17	

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $x^3 + 2x + 5$ *et le reste* 17.

On peut donc écrire: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 3) \cdot (x^3 + 2x + 5) + 17$.

[2]William G. HORNER, mathématicien anglais (1786–1837)

Factorisation

Factoriser un polynôme de degré n consiste à écrire ce polynôme sous forme d'un produit de polynômes de degré plus petit que n.

Exemple 1

Le polynôme du 2^e^ degré $p(x) = x^2 - 3x + 2$ *peut se factoriser, car les solutions de l'équation* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *sont* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$.
On a donc: $x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$

Exemple 2

Le polynôme du 2^e^ degré $p(x) = x^2 - 2x + 3$ *ne peut pas se factoriser car l'équation* $x^2 - 2x + 3 = 0$ *ne possède aucune solution (le discriminant de l'équation est strictement négatif).*

Exemple 3

$p(x) = 2x^2 + 5x - 3 = 2\,(x - \frac{1}{2}) \cdot (x+3) = (2x-1) \cdot (x+3)$

Exemple 4

$p(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1) \cdot (x^2+2)$

Un polynôme est dit **irréductible** s'il ne peut pas être écrit comme un produit de deux polynômes de degré ≥ 1.

Exemple

Le polynôme $x^2 + 4$ *est irréductible alors que le polynôme* $x^2 - 4$ *n'est pas irréductible, car* $x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$

Théorème 1

Les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Tout polynôme peut donc s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

Théorème 2

Un polynôme de degré n a au plus n zéros.

Théorème 3

Soit $p(x) = c_n\,x^n + c_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + c_2\,x^2 + c_1\,x + c_0$ un polynôme à coefficients entiers.

a) Si a est un zéro entier de $p(x)$, alors a est un diviseur de c_0.

b) Si $a = \frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $p(x)$, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de c_0 et v est un diviseur de c_n.

Démonstration du théorème 3a)

Sachant que a est un zéro de $p(x)$, on a

$$c_n\,a^n + c_{n-1}\,a^{n-1} + \cdots + c_2\,a^2 + c_1\,a = -c_0$$
$$a \cdot (c_n\,a^{n-1} + c_{n-1}\,a^{n-2} + \cdots + c_2\,a + c_1) = -c_0$$

Comme les coefficients de $p(x)$ sont entiers et que a est entier, c_0 est un multiple de a.

Remarque

Pour chercher les zéros rationnels d'un polynôme à coefficients entiers, on dresse une liste des candidats grâce à ce dernier théorème.

Exemple 1

Déterminer les zéros rationnels de $p(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 7\,x + 2$
Les zéros entiers possibles sont ± 1, ± 2, *car les diviseurs de 2 sont* ± 1 *et* ± 2.
Les zéros rationnels possibles sont ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$ *car les diviseurs de 3 sont* ± 1 *et* ± 3 *et les diviseurs de 2 sont* ± 1 *et* ± 2.
On obtient ici les trois zéros du polynôme car $p(1) = 0$, $p(-2) = 0$ *et* $p(\frac{1}{3}) = 0$.

Exemple 2

Cherchons les zéros du polynôme $p(x) = 6\,x^4 + 7\,x^3 - 7\,x^2 - 3\,x + 2$
Les diviseurs de $c_4 = 6$ *sont* ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.
Les diviseurs de $c_0 = 2$ *sont* ± 1, ± 2.
Les zéros rationnels possibles sont ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{1}{6}$, ± 2, $\pm \frac{2}{3}$.
En essayant successivement ces candidats, on constate que ni 1, *ni* -1 *ne sont des zéros, mais que* $x_1 = \dfrac{1}{2}$ *est un zéro de* p.
Divisons $p(x)$ *par* $x - \frac{1}{2}$ *en utilisant le schéma de Horner*

6	7	-7	-3	2	
	3	5	-1	-2	$\frac{1}{2}$
6	10	-2	-4	0	

Donc $p(x) = 2\,(x-\frac{1}{2})\cdot(3\,x^3+5\,x^2-x-2) = (2\,x-1)\cdot(3\,x^3+5\,x^2-x-2)$

Il faut encore résoudre l'équation $3\,x^3 + 5\,x^2 - x - 2 = 0$. *Les zéros rationnels possibles de* $3\,x^3 + 5\,x^2 - x - 2$ *sont* ± 1, $\pm\frac{1}{3}$, ± 2, $\pm\frac{2}{3}$.

Par essais successifs de ces candidats, on constate que $x_2 = -\frac{2}{3}$ *est un zéro de* $3\,x^3 + 5\,x^2 - x - 2$.

Divisons $3\,x^3 + 5\,x^2 - x - 2$ *par* $x + \frac{2}{3}$.

On obtient le polynôme $x^2 + x - 1$.

Il reste encore à résoudre l'équation du deuxième degré: $x^2 + x - 1 = 0$.

On obtient encore les solutions $x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x_4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *qui ne sont pas rationnelles.*

En résumé, le polynôme $p(x) = 6\,x^4 + 7\,x^3 - 7\,x^2 - 3\,x + 2$ *possède les quatre zéros* $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On peut écrire $p(x)$ *sous la forme*

$$p(x) = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

4.5 Tableau des signes et inéquations

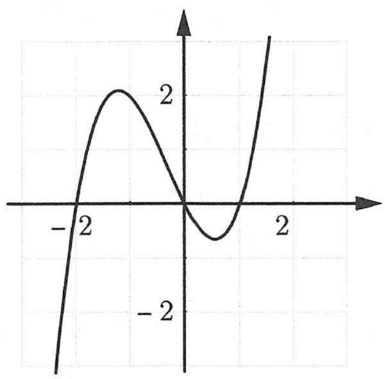
Le **tableau des signes** d'une fonction présente les intervalles pour lesquels cette fonction est positive et ceux pour lesquels elle est négative.

Exemple 1

La fonction f *est donnée par le graphe ci-contre.*

On constate sur ce graphe que cette fonction s'annule en -2, 0 *et* 1, *qu'elle est négative sur* $]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$ *et positive sur* $]-2\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

Cette caractéristique est présentée dans le tableau des signes ci-dessous.



x		-2		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Exemple 2

La fonction f *est donnée par* $f(x) = (x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$.
La règle du produit nul nous indique que f *s'annule en* -3 , -1 *et* 2 .
Voici le tableau détaillé des signes.

x		-3		-1		2	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

La dernière ligne est obtenue par la règle des signes, elle fournit l'information sur le signe de f .

Inéquation

Le tableau des signes permet de résoudre des inéquations.

Exemple

Soit l'inéquation $x^3 + 3\,x^2 > 2\,x + 6$.

On commence par l'écrire sous la forme $x^3 + 3\,x^2 - 2\,x - 6 > 0$.

Etablissons le tableau des signes de la fonction $p(x) = x^3 + 3\,x^2 - 2\,x - 6$.

Les zéros de $p(x)$ *sont* -3 , $-\sqrt{2}$ *et* $+\sqrt{2}$. *Le tableau des signes de* p *est*

x		-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ce tableau nous donne l'ensemble solution de l'inéquation originale
$S =]-3;-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2};+\infty[$

4.6 Parité d'une fonction

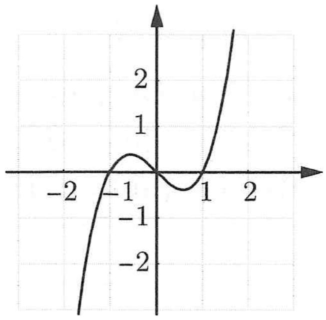
Une fonction telle que $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition est dite **paire**.

Une fonction telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition est dite **impaire**.

Le graphe d'un fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy , celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 1

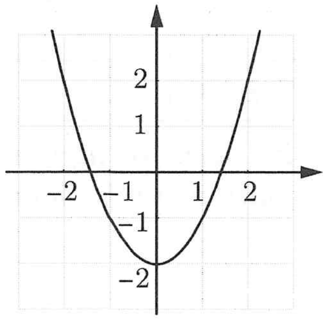
La fonction donnée par $f(x) = x^3 - x$ *est impaire car :*



$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x \\ &= -(x^3 - x) = -f(x) \end{aligned}$$

Exemple 2

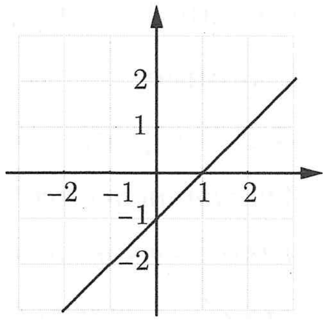
La fonction donnée par $f(x) = x^2 - 2$ *est paire car :*



$$f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$$

Exemple 3

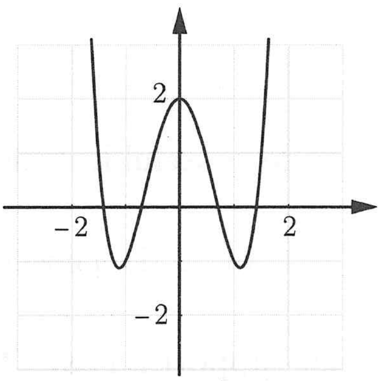
La fonction donnée par $f(x) = x - 1$ *n'est ni paire ni impaire car :*



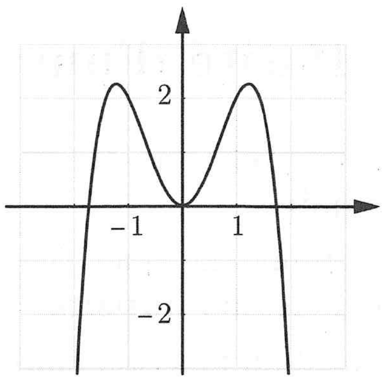
$$f(-x) = -x - 1$$

est différent de $f(x)$ *et de* $-f(x)$.

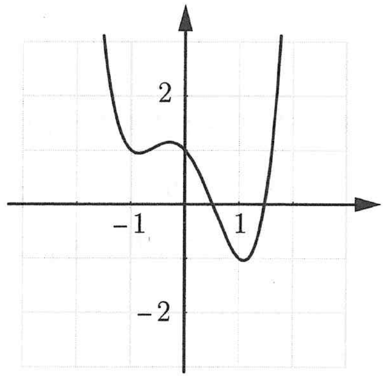
4.7 Quelques graphes de polynômes



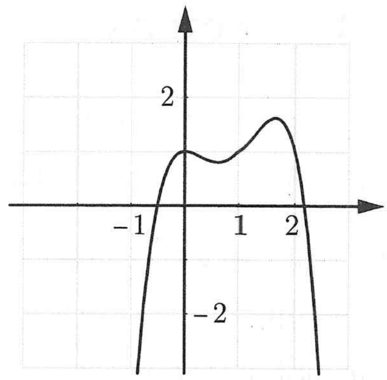
$y = 2\,x^4 - 5\,x^2 + 2$



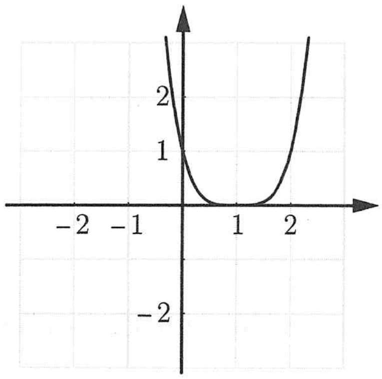
$y = -x^4 + 3\,x^2$



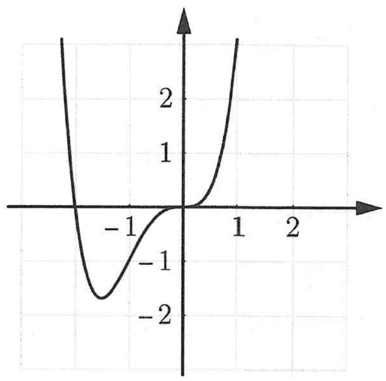
$y = x^4 - 2\,x^2 - x + 1$



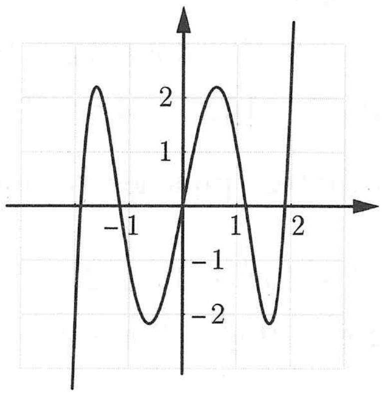
$y = -x^4 + 3\,x^3 - 2\,x^2 + 1$



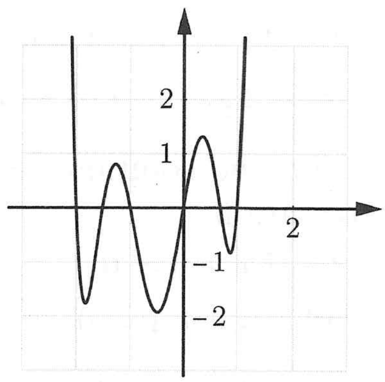
$y = (x-1)^4$



$y = x^4 + 2\,x^3$



$y = x^5 - 5\,x^3 + 5\,x$



$y = 3\,x^6 + \frac{17}{2}\,x^5 - x^4 - \frac{19}{2}\,x^3 - 3\,x^2 + 6\,x$

4.8 Exercices

1. Soit $p(x) = x^2 + x + 2$ et $q(x) = x^3 - 2\,x$. Déterminer les polynômes

a) $p + q$ b) $p - q$ c) $p \cdot q$

2. Soit $p(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1$ et $q(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2$.

Déterminer

a) le polynôme $p + q$

b) le degré du polynôme $p \cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

3. Soit $p(x) = x^7 - 3\,x^6 + 2\,x^5 - x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 + x - 4$ et $q(x) = 3\,x^5 + 2\,x^4 - x^2 + 3\,x - 1$.

Déterminer

a) le polynôme $p - q$

b) le degré du polynôme $p \cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 9.

4. Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

c) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$ d) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

5. Trouver une solution des équations suivantes, puis les résoudre par factorisation.

a) $x^3 - 7\,x + 6 = 0$ b) $x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 2 = 0$

c) $8\,x^3 - 4\,x + 1 = 0$ d) $2\,x^3 - 9\,x^2 - 2\,x + 24 = 0$

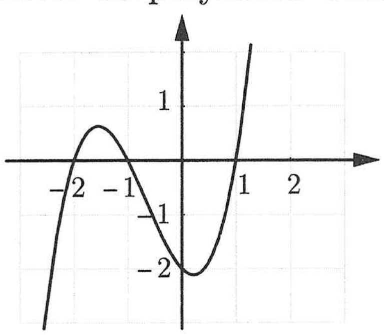
6. Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes.

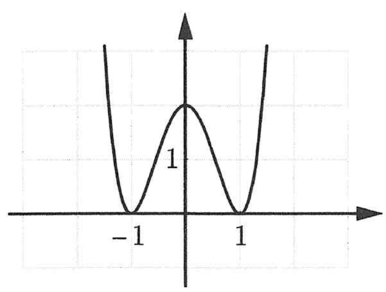
a) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$ b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

c) $f(x) = x^3 + 5\,x^2 + 8\,x + 4$ d) $f(x) = x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 1$

e) $f(x) = x(x + 2)^2 \cdot (2 - x^2) \cdot (x^2 - 1) \cdot (3 - 2\,x)$

7. Trouver un polynôme dont le graphe est donné ci-dessous.

a) 

b) 

8. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$

b) $x^5 - 5x^3 + 4x \leq 0$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

d) $(x-2) \cdot (x^2 + 6x - 1) > (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 1)$

9. Factoriser le polynôme $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$.

10. Décomposer le polynôme $p(x) = 3x^5 - 15x^3 + 12x$ en produit de facteurs irréductibles.

11. Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $3x^5 - 8x^4 + 7x^3 + x^2 - 5x + 6$ par $x + 2$

12. Montrer que $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

13. Utiliser le schéma de Horner pour calculer la valeur de f en x_0.

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ $\quad x_0 = 2$

b) $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 2$ $\quad x_0 = -2$

c) $f(x) = 6x^7 - 3x^6 - 24x^5 + 4x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x$ $\quad x_0 = 3$

d) $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 9$ $\quad x_0 = -2$

14. Déterminer le paramètre a pour que $x^4 - ax^3 + 3x^2 - 2ax - a^2$ soit divisible par $x - 2$. Calculer ensuite le quotient.

15. Déterminer le paramètre a pour que $ax^3 + x^2 + a^2x + 3a^2 + 11$ soit divisible $x + 2$.

16. Déterminer le paramètre a pour que $a^2x^3 - 4ax + 3$ soit divisible par $x - 1$.

17. Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que le quotient de la division de $p(x)$ par $2x^2 + 1$ soit égal à $5x^2 - 3x + 1$ et le reste égal à $-x + 1$.

18. Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que le quotient de la division de $p(x)$ par $5x^2 - 3$ soit égal à $2x^2 - 7x + 5$ et le reste égal à $5x + 7$.

19. Déterminer les paramètres a et b pour que $x^3 - ax^2 + b$ soit divisible par le trinôme $x^2 + x - 1$.

20. Déterminer a et b pour que $x^5 + 2\,x^4 + 3\,x^3 + 4\,x^2 + a\,x + b$ soit divisible par $x^2 - 5\,x + 6$.

21. Calculer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a) $f(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = 2\,x^2 - 1$

b) $f(x) = 2\,x^3 - 1$ $\quad g(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x$ $\quad g(x) = 7\,x^3 - x$

d) $f(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2$ $\quad g(x) = 2\,x^2 - 3$

e) $f(x) = 14\,x^4 - 27\,x^3 + 21\,x^2 - 3\,x - 2$
$g(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 2$

f) $f(x) = 14\,x^5 - 36\,x^4 + 23\,x^3 - 11\,x^2 + 18\,x - 8$
$g(x) = 7\,x^3 - x$

g) $f(x) = 12\,x^5 - 7\,x^4 + 2\,x^2 - 6\,x$ $\quad g(x) = -5\,x^2 + 2\,x - 1$

22. Trouver un polynôme qui s'annule en -1, en 1, en 4, en 7 et en 0. Existe-t-il d'autres polynômes satisfaisant aux mêmes conditions ?

23. Déterminer un polynôme p du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

il admet -2 pour zéro ;
il est divisible par $x + 1$;
il admet le facteur x dans sa décomposition en facteurs ;
il admet 180 pour reste de sa division par $x - 3$;
$p(2) = 0$.

24. Déterminer un polynôme p du cinquième degré satisfaisant aux six conditions suivantes :

sa valeur en 0 est 0 ;
il admet 2 pour zéro ;
il est divisible par $x + 2$;
$\mathrm{p}(1) = 0$;
il admet $x - 3$ dans sa décomposition en facteurs ;
le reste de la division de p par $x + 3$ est 720.

25. Déterminer un polynôme p du cinquième degré satisfaisant aux six conditions suivantes :

$p(0) = 0$;
$p(1) = 0$;
il est divisible par $x + 1$;

il est divisible par $x+2$;
il est divisible par $x-2$;
le reste de sa division par $x-3$ est égal à 360.

26. Déterminer un polynôme p du quatrième degré satisfaisant aux quatre conditions suivantes :
sa valeur numérique en 0 est égale à 0 ;
il est divisible par $x-3$;
il admet 2 pour zéro ;
le reste de sa division par $x+3$ est égal à -630.

27. Déterminer un polynôme p du troisième degré satisfaisant aux quatre conditions suivantes :
sa valeur numérique en 0 est 14 ;
il est divisible par $x-1$;
il admet -2 pour zéro ;
le reste de sa division par $x-2$ est égal à -12.

28. Déterminer un polynôme p du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :
sa valeur numérique en 0 est égale à 0 ;
il est divisible par $x-2$;
il admet 3 pour zéro ;
le reste de sa division par $x+1$ est égal à -24 ;
$p(1)=16$.

29. Calculer le reste de la division de $5x^{100}+7x^5-x+47$ par $x-1$.

30. Calculer le reste de la division de $3x^{100}+5x^{85}-4x^{38}+2x^{17}-6$ par $x+1$.

31. Montrer que les équations suivantes n'ont pas de solutions rationnelles.

a) $6x^4+3x^2-4x+6=0$ b) $2x^5+3x^3+7=0$

32. Chercher les zéros rationnels des polynômes suivants.

a) $f(x)=6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$
b) $f(x)=18x^3-15x^2-4x+4$
c) $f(x)=3x^4-6x^3+4x^2-10x+2$
d) $f(x)=2x^3-x^2-x-3$
e) $f(x)=6x^4+x^3+5x^2+x-1$

33. Résoudre les équations suivantes.

a) $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$

b) $6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$

c) $3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = 0$

34. Etablir le tableau des signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

c) $f(x) = x^4 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{16}x$

d) $f(x) = 4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 10x + 6$

35. Discuter la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x$

c) $f(x) = x^6 - 5x^2 + 7$

d) $f(x) = x^9 - 5x^5 + 4x^3 - x$

36. On donne le polynôme $p(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 2$.
Déterminer le polynôme $q(x)$ de degré $n \leq 4$ tel que $q(5) = p(5)$, $q(-2) = p(-2)$, $q(1) = p(1)$, $q(-1) = p(-1)$ et $q(2) = 80$.
Indication : poser $q(x) = p(x) + a\,(x-5)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

37. On donne le polynôme $p(x) = x^3 - 4x$.

a) Esquisser le graphe de p

b) Esquisser le graphe d'une fonction polynôme q telle que $q(-2) = p(-2)$, $q(-1) = p(-1)$, $q(0) = p(0)$, $q(1) = p(1)$ et $q(2) = 3$.

c) Déterminer le polynôme $q(x)$ de degré $n \leq 4$ défini en b).

38. Déterminer le polynôme $p(x)$ de degré $n \leq 4$ tel que
$p(0) = 2$, $p(1) = -7$, $p(-1) = 3$, $p(2) = 6$ et $p(-2) = -10$.
Marche à suivre :

1) trouver un polynôme p_1 tel que $p_1(0) = 2$;

2) trouver un polynôme p_2 tel que $p_2(0) = p_1(0)$ et $p_2(1) = -7$ en suivant la méthode de l'exercice 36 ;

3) trouver un polynôme p_3 tel que $p_3(0) = p_2(0)$, $p_3(1) = p_2(1)$ et $p_3(-1) = 3$;

4) trouver un polynôme p_4 tel que $p_4(0) = p_3(0)$, $p_4(1) = p_3(1)$, $p_4(-1) = p_3(-1)$ et $p_4(2) = 6$;

5) trouver un polynôme p tel que $p(0) = p_4(0)$, $p(1) = p_4(1)$, $p(-1) = p_4(-1)$, $p(2) = p_4(2)$ et $p(-2) = -10$.

39. Déterminer le polynôme $p(x)$ de degré $n \leq 4$ tel que $p(0) = -1$, $p(1) = -2$, $p(-1) = -6$, $p(2) = 9$ et $p(-2) = -11$.

40. Montrer que le polynôme $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ n'admet aucun zéro. En déduire que ce polynôme n'a pas de diviseur de degré 1.

41. Montrer que le polynôme $f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$ ne possède aucun diviseur de degré 1.
Calculer $(x^2 + 2x + 5) \cdot (x^2 - 2x + 5)$. Que peut-on en déduire ?

42. Former des équations polynomiales de degré n à coefficients entiers dont S est l'ensemble des solutions.

a) $S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$ $\qquad n = 2$
b) $S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$ $\qquad n = 3$
c) $S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$ $\qquad n = 4$
d) $S = \left\{3 - \sqrt{2}\,;3 + \sqrt{2}\right\}$ $\qquad n = 2$
e) $S = \left\{0\,;2 - \sqrt{3}\,;2 + \sqrt{3}\right\}$ $\qquad n = 3$
f) $S = \left\{-1\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;1\right\}$ $\qquad n = 4$
g) $S = \varnothing$ $\qquad n = 4$
h) $S = \left\{-\sqrt{3}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right\}$ $\qquad n = 6$

43. On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de $1\,000\,\text{cm}^3$.

44. On veut construire un réservoir pour le gaz propane sous la forme d'un cylindre circulaire droit d'une hauteur de 10 m terminé par un hémisphère à chaque extrémité.
Déterminer le rayon qui donne un volume de 27π m^3.

4.9 Réponses aux exercices du chapitre 4

1. a) $x^3 + x^2 - x + 2$ b) $-x^3 + x^2 + 3x + 2$

c) $x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x$

2. a) $r(x) = 5x^3 - x^2 + x + 1$

b) $s(x) = 6x^6 + \ldots + 1x^4 \ldots$

3. a) $r(x) = x^7 - 3x^6 - x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x - 3$

b) $s(x) = 3x^{12} + \ldots + 0x^9 \ldots$

4. a) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

c) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$

d) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$

5. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

b) $x = -2$

c) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

d) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

6. a)

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c)

x		-2		-1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

d)

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

e)

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

7. a) $f(x) = (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

b) $f(x) = 2\,(x+1)^2 \cdot (x-1)^2$

8. a) $x \in \,]-1\,;2\,[\,\cup\,]\,3\,;+\infty\,[$

b) $x \in \,]-\infty\,;-2\,]\,\cup\,[-1\,;0\,]\,\cup\,[\,1\,;2\,[$

c) $x \in \,]-\infty\,;-1\,]\,\cup\,\{1\}$

d) $x \in \,]-3\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;2\,[$

9. $2\,x\,(x-2-\sqrt{8})\cdot(x-2+\sqrt{8})$

10. $f(x) = 3\,x\,(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

11. a) quotient : $x^3+2\,x^2+3\,x+4$ reste : 5

b) quotient : $x^4-x^3+x^2-x+1$ reste : 0

c) quotient : $3\,x^4-14\,x^3+35\,x^2-69\,x+133$ reste : -260

12.

1	−6	15	−20	15	−6	1	
	1	−5	10	−10	5	−1	1
1	−5	10	−10	5	−1	0	

13. a) $f(2) = 0$ b) $f(-2) = 190$

c) $f(3) = 5\,400$ d) $f(-2) = -21$

14. $a = 2$ et $a = -14$

15. $a = 3$ et $a = 5$

16. $a = 1$ et $a = 3$

17. $p(x) = 10\,x^4-6\,x^3+7\,x^2-4\,x+2$

18. $p(x) = 10\,x^4-35\,x^3+19\,x^2+26\,x-8$

19. $a = -2\,,\; b = -1$

20. $a = -418\,,\; b = 732$

21. a) $q(x) = \frac{3}{2}\,x-\frac{1}{2}\,,\quad r(x) = \frac{5}{2}\,x+\frac{1}{2}$

b) $q(x) = \frac{2}{3}\,,\quad r(x) = \frac{2}{3}\,x^2-\frac{2}{3}\,x-\frac{5}{3}$

c) $q(x) = x^2-\frac{1}{7}\,x+1\,,\quad r(x) = -\frac{1}{7}\,x^2-6\,x$

d) $q(x) = 3\,x^2+2\,x+1\,,\quad r(x) = 6\,x+3$

e) $q(x) = 7\,x^2-3\,x-1\,,\quad r(x) = 0$

f) $q(x) = 2\,x^2-\frac{36}{7}\,x+\frac{25}{7}\,,\quad r(x) = -\frac{113}{7}\,x^2+\frac{151}{7}\,x-8$

g) $q(x) = -\frac{12}{5}\,x^3+\frac{11}{25}\,x^2+\frac{82}{125}\,x-\frac{141}{625}\,,\quad r(x) = -\frac{3\,058}{625}\,x-\frac{141}{625}$

22. $f(x) = x\,(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-7)$; oui.

23. $p(x) = 3\,x\,(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

24. $p(x) = -2\,x\,(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

25. $p(x) = 3\,x\,(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

26. Par exemple $p(x) = -\frac{7}{3}\,x^2\,(x-3)\cdot(x-2)$

27. $p(x) = (2\,x-7)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$

28. $p(x) = (3\,x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

29. 58

30. -14

32. a) $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ b) Aucun c) Aucun

d) $x = \dfrac{3}{2}$ e) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

33. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$

c) $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = 0$

34. a)

x		-3		-1		2		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b)

x		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

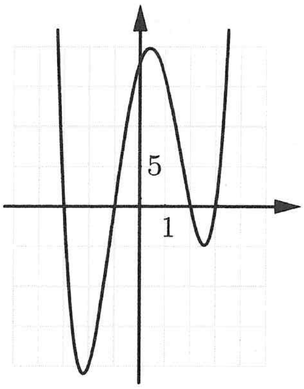
c)

x		$-\frac{5}{4}$		$-\frac{\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

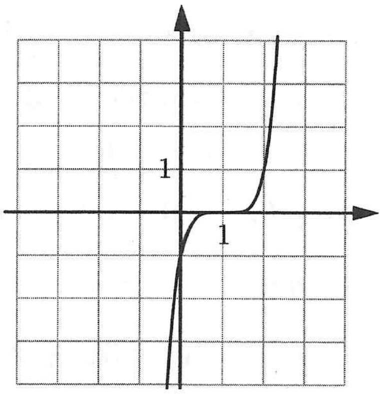
d)

x		$-\frac{3}{2}$		$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

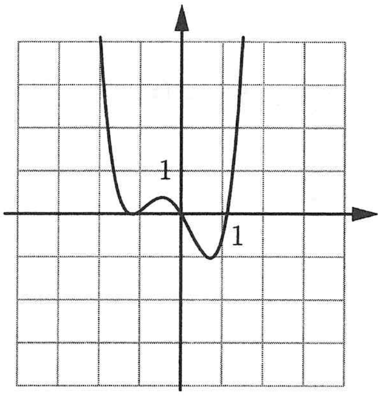
a)



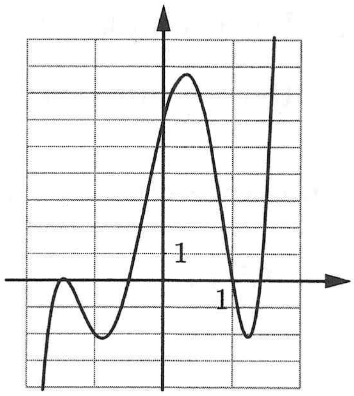
b)



c)



d)



35. a) impaire

b) ni paire, ni impaire

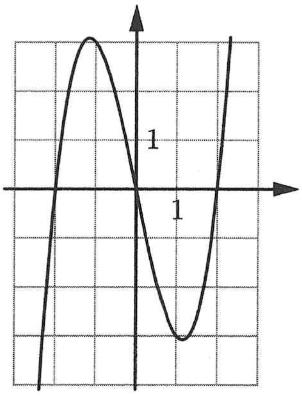
c) paire

d) impaire

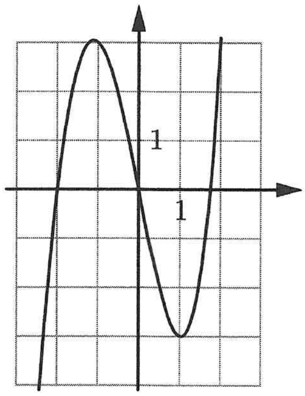
36. $q(x) = p(x) - 2\,(x-5)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$ = -2\,x^4 + 7\,x^3 + 25\,x^2 - 13\,x - 18$

37. a)



b)



c) $q(x) = \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{5}{4}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^2 - \frac{17}{4}\,x$

38. $p(x) = x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 - 8\,x + 2$

39. $p(x) = x^4 + x^3 - 4\,x^2 + x - 1$

42. a) $a\,(3\,x-1)\cdot(x-3) = 0$

b) $a\,(3x-1)\cdot(x-3)^2$ ou $f(x)=a\,(3\,x-1)^2\cdot(x-3)=0$

c) Par exemple $a\,(3\,x-1)^2\cdot(x-3)^2=0$
ou $a\,(3\,x-1)\cdot(x-3)\cdot(x^2+1)=0$

d) $a\,(x^2-6\,x+7)=0$

e) $a\,(x^3-4\,x^2+x)=0$

f) $a\,(x-1)\cdot(3\,x+2)\cdot(3\,x-2)\cdot(x+1)=0$

g) Par exemple $x^4+1=0$

h) Par exemple $(x^2-3)\cdot(x^2-2)\cdot(x^2+1)=0$

43. En choisissant $x=5$ ou $x=5\,(2-\sqrt{2})$

44. $r=1.5$ m

5. Fonctions rationnelles

5.1 Définition

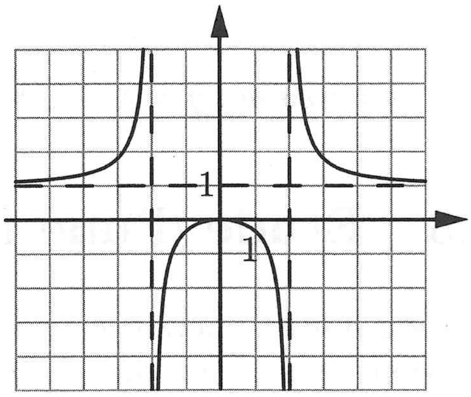
La fonction donnée par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes est appelée **fonction rationnelle**.

L'ensemble de définition D d'une fonction rationnelle comprend toutes les valeurs réelles de x sauf celles qui annulent le dénominateur $q(x)$.

Exemple

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ est une fonction rationnelle. Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

Son graphe est représenté ci-contre.



On remarque que, quand x tend vers $\pm\infty$, la courbe se rapproche de la droite horizontale $y = 1$. Cette droite est appelée asymptote horizontale.

De manière analogue, les droites $x = 2$ et $x = -2$ sont appelées asymptotes verticales.

5.2 Fonction homographique

Une fonction **homographique** est une fonction rationnelle dont le numérateur est une constante ou un polynôme de degré un et le dénominateur un polynôme de degré un.

Une fonction homographique est donnée par $f(x) = \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$

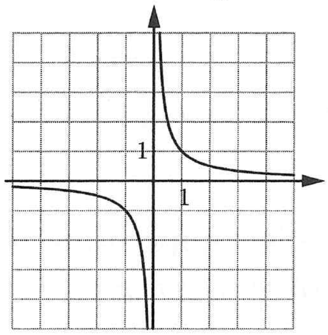
$(a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0)$

L'ensemble de définition de la fonction homographique $f(x) = \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$ est $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Son graphe est une hyperbole qui admet la droite d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ comme asymptote verticale et la droite d'équation $y = \dfrac{a}{c}$ comme asymptote horizontale.

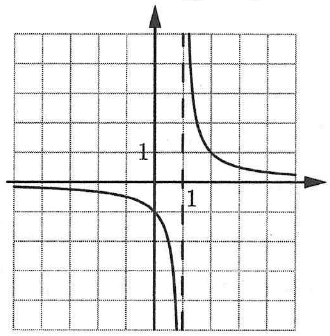
Exemples

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



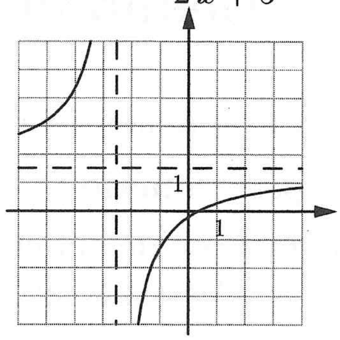
Asymptotes
verticale : $x = 0$
horizontale : $y = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



Asymptotes
verticale : $x = 1$
horizontale : $y = 0$

$f(x) = \dfrac{3\,x-1}{2\,x+5}$



Asymptotes
verticale : $x = -\frac{5}{2}$
horizontale : $y = \frac{3}{2}$

5.3 Etude d'une fonction rationnelle

L'étude d'une fonction consiste à donner diverses informations sur cette fonction, puis à en esquisser son graphe.

Exemple 1

Etude de la fonction f *donnée par* $f(x) = \dfrac{x-1}{2\,x+2}$

- *Ensemble de définition*

  f *n'est pas définie lorsque* $2\,x+2 = 0$, *donc* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

  Le graphe de f *coupe l'axe* Ox *en* $I(1\,;0)$ *et l'axe* Oy *en* $J(0\,;-\frac{1}{2})$

x		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2\,x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage de $x = -1$*

  Si $x \xrightarrow{<} -1$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$
  Si $x \xrightarrow{>} -1$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$

  Le graphe de f *admet la droite* $x = -1$ *comme asymptote verticale.*

- *Comportement asymptotique*

  Le quotient de la division de $x - 1$ *par* $2x + 2$ *est* $\dfrac{1}{2}$ *et le reste est égal à* -2.

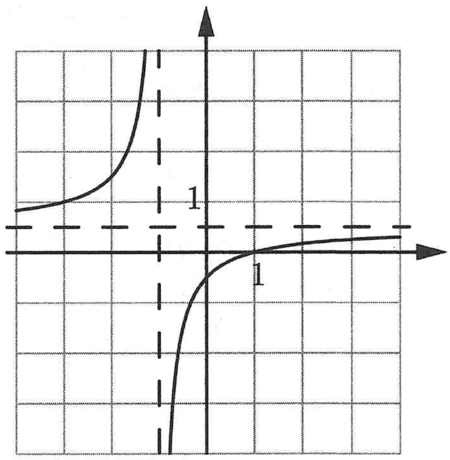
  La fonction peut donc s'écrire $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-2}{2x+2}$

  Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{-2}{2x+2} \xrightarrow{>} 0$ *et* $f(x) \xrightarrow{>} \dfrac{1}{2}$

  Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{-2}{2x+2} \xrightarrow{<} 0$ *et* $f(x) \xrightarrow{<} \dfrac{1}{2}$

  Le graphe de f *admet la droite d'équation* $y = \frac{1}{2}$ *comme asymptote horizontale.*

- *Graphe*



Exemple 2

Etude de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-3}$

- *Ensemble de définition*

  f *n'est pas définie lorsque* $x - 3 = 0$, *donc* $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

  Le graphe de f *coupe l'axe* Ox *en* $I_1(1\,;0)$ *et* $I_2(-2\,;0)$ *et l'axe* Oy *en* $J(0\,;\frac{2}{3})$

		-2		1		3	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage* $x = 3$

  Si $x \xrightarrow{<} 3$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$
  Si $x \xrightarrow{>} 3$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$

  Le graphe de f *admet la droite* $x = 3$ *comme asymptote verticale.*

- *Comportement asymptotique*

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 + & x - & 2 & \; x - 3 \\ \cline{4-4}
x^2 - & 3x & & \; x + 4 \\ \cline{1-3}
 & 4x - & 2 & \\
 & 4x - & 12 & \\ \cline{2-3}
 & & 10 &
\end{array}
$$

  Le quotient de la division de $x^2 + x - 2$ *par* $x - 3$ *est* $x + 4$ *et le reste vaut 10.*

  La fonction peut donc s'écrire $f(x) = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

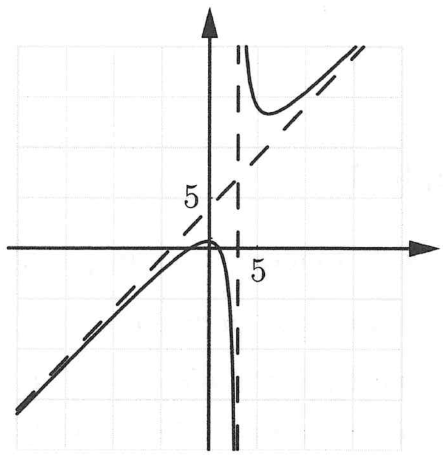
  Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{10}{x-3} \xrightarrow{<} 0$ *et* $f(x) \xrightarrow{<} x + 4$

  Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{10}{x-3} \xrightarrow{>} 0$ *et* $f(x) \xrightarrow{>} x + 4$

  La courbe se rapproche de la droite $y = x + 4$ *quand* x *tend vers* $\pm\infty$. *Cette droite est appelée asymptote oblique. Le graphe de* f *admet donc la droite* $y = x + 4$ *comme asymptote oblique.*

- *Graphe*



Exemple 3

Etude de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$

- *Ensemble de définition*

  f *n'est pas définie lorsque* $x^2 - 2x = 0$, *donc* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

Le graphe de f coupe l'axe Ox en $I(-1\,;0)$

		-1		0		2	
x^3+1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-2x	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$		$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage de $x=0$ et de $x=2$*

Si $x \xrightarrow{<} 0$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$
Si $x \xrightarrow{>} 0$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$

Si $x \xrightarrow{<} 2$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$
Si $x \xrightarrow{>} 2$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$

Le graphe de f admet les droites d'équations $x=0$ et $x=2$ comme asymptotes verticales.

- *Comportement asymptotique*

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & +1 & x^2-2x \\ \cline{4-4}
x^3 & -2x^2 & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & +1 & \\
 & 2x^2 & -2x & \\ \cline{2-3}
 & & 2x+1 &
\end{array}
$$

Le quotient de la division de x^3+1 par x^2-2x est $x+2$ et le reste est $2x+1$.

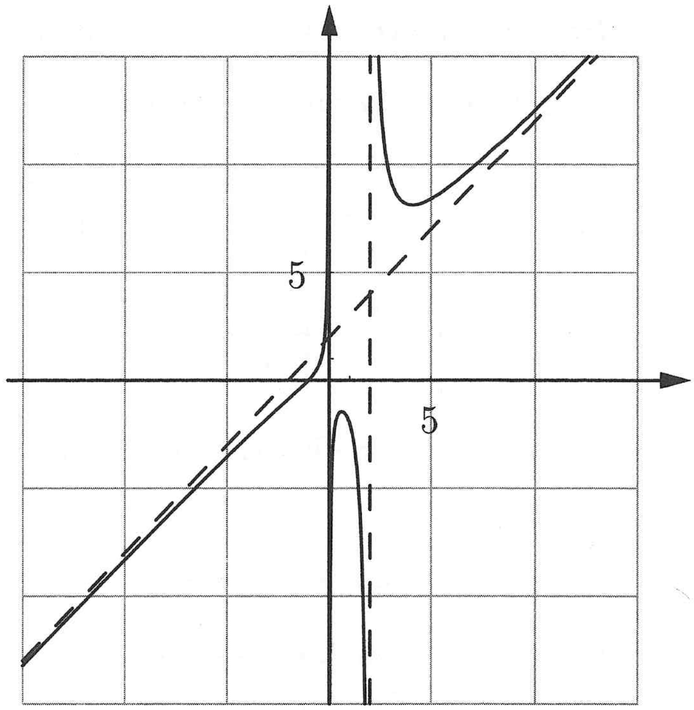
La fonction peut donc s'écrire $f(x) = x+2+\dfrac{2x+1}{x^2-2x}$

Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{2x+1}{x^2-2x} \xrightarrow{<} 0$, *donc* $f(x) \xrightarrow{<} x+2$
Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{2x+1}{x^2-2x} \xrightarrow{>} 0$, *donc* $f(x) \xrightarrow{>} x+2$

Le graphe de f admet la droite $y=x+2$ comme asymptote oblique.

L'expression $\dfrac{2x+1}{x^2-2x}$ *s'annule pour* $x = -\dfrac{1}{2}$, *donc le graphe de f coupe l'asymptote oblique au point* $I(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2})$

- *Graphe*



5.4 Exercices

1. a) Trouver une fonction homographique f dont le graphe passe par le point $A(-1\,;3)$, admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ et une asymptote verticale d'équation $x = -3$.

b) Trouver une fonction homographique f dont le graphe coupe l'axe Ox en $x = 3$, l'axe Oy en $y = -6$ et admet la droite $y = 2$ comme asymptote horizontale.

c) Trouver l'équation d'une hyperbole qui passe par les points $A(0\,;1)$, $B(2\,;0)$ et $C(-2\,;-\frac{1}{2})$.

d) Trouver une fonction homographique f dont le graphe passe par l'origine et admet le point $S(-2\,;3)$ comme centre de symétrie.

2. Etudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3\,x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^3 - 2\,x + 1}$

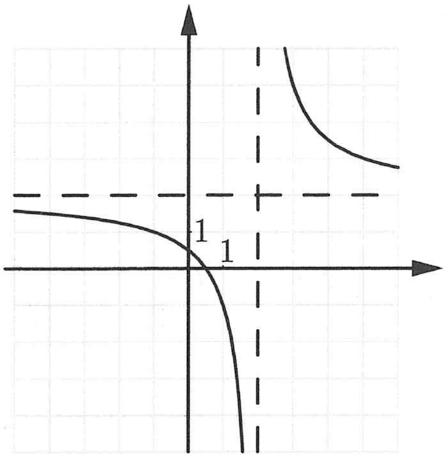
c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2\,x}{2\,x^3 - x}$

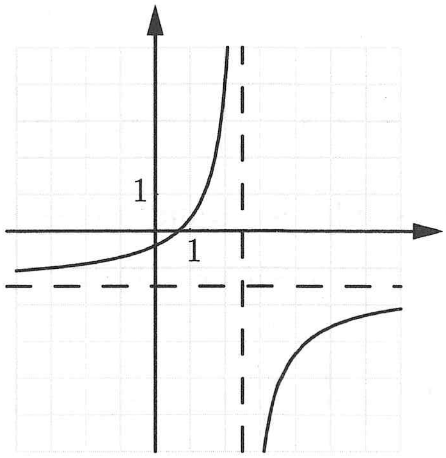
3. Donner l'ensemble de définition ainsi que les points d'intersection avec les axes, faire le tableau des signes, trouver les asymptotes et esquisser le graphe des fonctions homographiques suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2\,x - 3}{3\,x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - 5\,x}{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\,x}$

4. Donner l'expression d'une fonction homographique dont le graphe est donné ci-dessous.

a) 

b) 

5. Etudier le signe des fonctions données par

a) $f(x) = \dfrac{7x-8}{3x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(3x-1)}$

6. Etudier les fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+4}$ f) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^3-1}$ j) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-5x^2+4}$

k) $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x+2|}$

7. Calculer

a) $\dfrac{x-1}{x^2-x-2} + \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

b) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+2x^2-x-2} - \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2} - \dfrac{2x+3}{x^2-1} + \dfrac{2}{x+2}$

d) $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} + 3$

8. Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2} = 0$ b) $\dfrac{2-3x}{2x-1} - \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{x-1} = 0$

c) $\dfrac{4}{x^2-3x} = \dfrac{x-1}{x-3} - 1$

9. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$ b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$ d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$ f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$ h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$ j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7 - \dfrac{4}{3\,x+1}$ l) $\dfrac{12\,x^2-13\,x-14}{x-2} < 0$

m) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+3}$ n) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

o) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ p) $\dfrac{6}{4-x} - \dfrac{1}{1-x} \leq 1$

q) $1 > \dfrac{3}{2\,x-1} \leq 5$ r) $-2\,x \leq \dfrac{2\,x-1}{x} < 1$

10. Donner l'ensemble de définition des fonctions irrationnelles suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5\,x+7}}{3\,x^2-5\,x+2}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4\,x+3}{-x^3-2\,x^2+4\,x+8}}$

5.5 Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) $f(x) = \dfrac{2\,x+8}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{2\,x-6}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{-x+2}{5\,x+2}$ d) $f(x) = \dfrac{3\,x}{x+2}$

2. a) impaire b) ni paire ni impaire

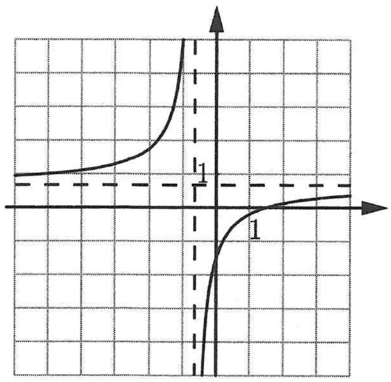
c) paire d) impaire

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{2}\,;0)$ et $(0\,;-\frac{3}{2})$
Tableau des signes

		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -\frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$

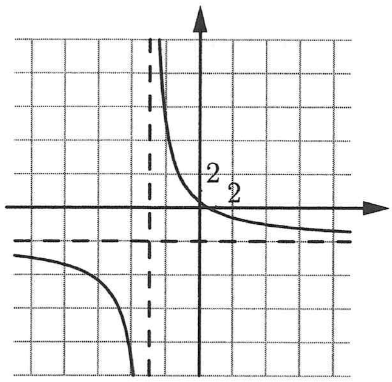


b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Points sur les axes : $(\frac{1}{2}\,;0)$ et $(0\,;\frac{1}{3})$
Tableau des signes

		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -3$ et $y = -2$

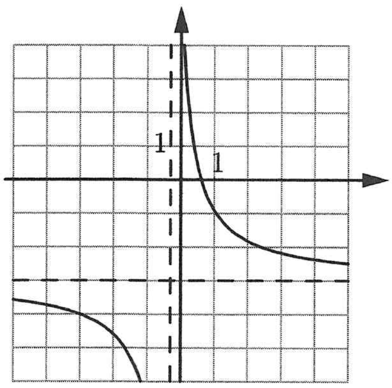


c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{10}\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{5}\,;0)$ et $(0\,;6)$
Tableau des signes

		$-\frac{3}{10}$		$\frac{3}{5}$	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -\frac{3}{10}$ et $y = -3$



4. a) $f(x) = \dfrac{2\,x - 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3\,x + 2}{2\,x - 5}$

5. a)

		$-\frac{1}{3}$		$\frac{8}{7}$	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

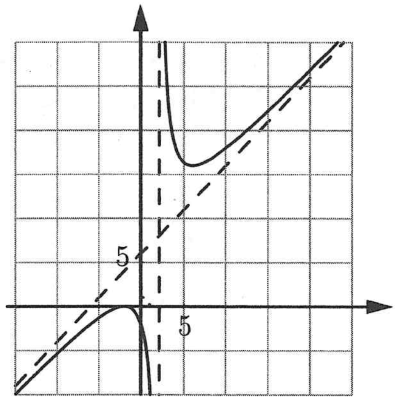
b)

		$-\frac{1}{3}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

c)

		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

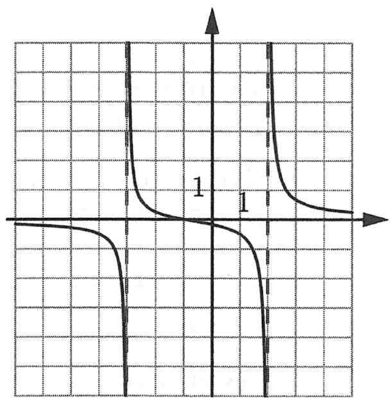


Points sur les axes : $(-2\,;0)$ et $(0\,;-2)$
Tableau des signes

		-2		2	
$f(x)$	$-$	0	$-$		$+$

Asymptotes : $x = 2$ et $y = x + 6$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;2\}$

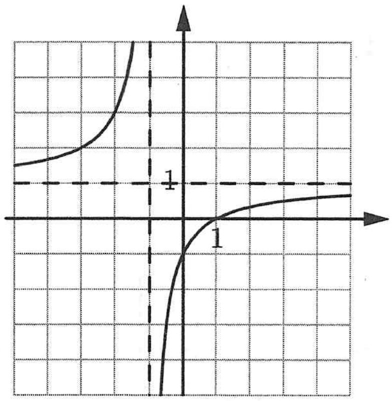


Points sur les axes : $(-1\,;0)$ et $(0\,;-\frac{1}{6})$
Tableau des signes

		-3		-1		2	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$

Asymptotes : $x = -3$, $x = 2$ et $y = 0$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

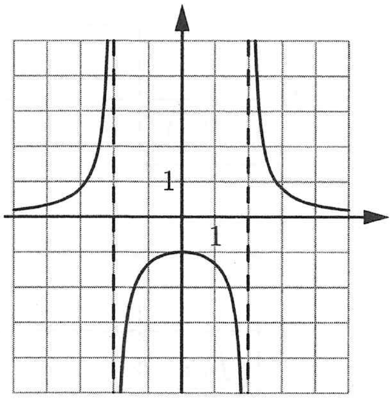


Points sur les axes : $(1\,;0)$ et $(0\,;-1)$
Tableau des signes

		-1		1	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -1$, $y = 1$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$

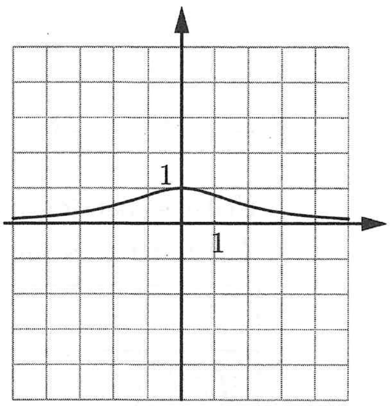


Point sur les axes : $(0\,;-1)$
Tableau des signes

		-2		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Asymptotes : $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

e) $D = \mathbb{R}$

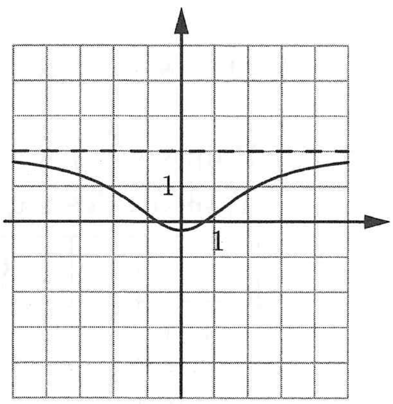


Point sur les axes : $(0\,;1)$
Tableau des signes

$f(x)$	$+$

Asymptote : $y = 0$

f) $D = \mathbb{R}$



Points sur les axes : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ et $(0\,;-\frac{1}{4})$
Tableau des signes

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptote : $y = 2$

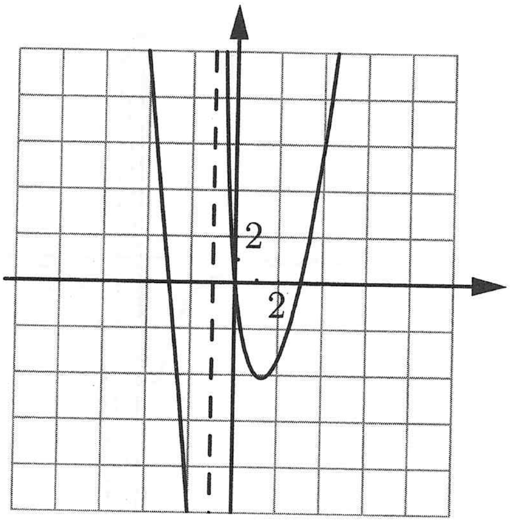
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		-1		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptote : $x = -1$



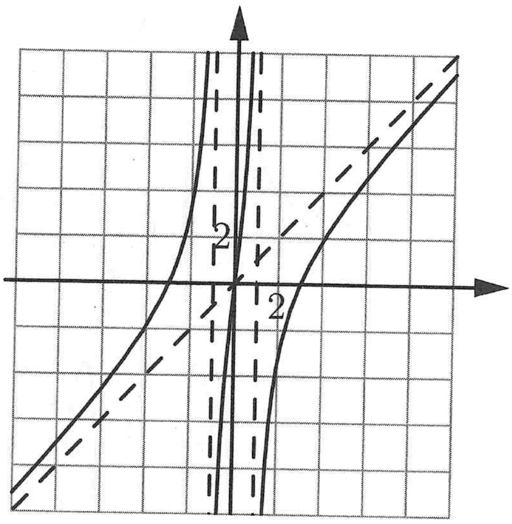
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		-1		0		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -1$, $x = 1$ et $y = x$



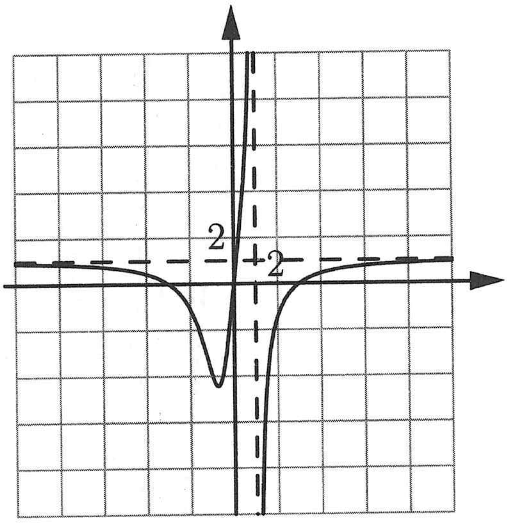
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		0		1		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = 1$, $y = 1$



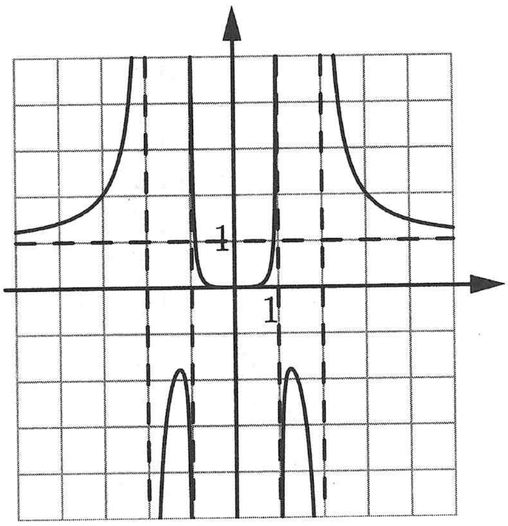
j) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

Point sur les axes : $(0\,;0)$

Tableau des signes

		-2		-1		0		1		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$	0	$+$		$-$		$+$

Asymptotes : $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ et $y = 1$

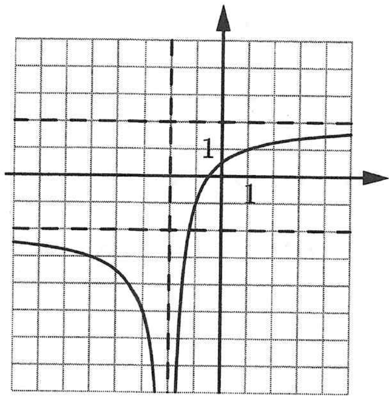


k) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Points sur les axes : $(-\frac{1}{2}\,;0)$ et $(0\,;\frac{1}{2})$
Tableau des signes

		-2		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -2$, $y = -2$ et $y = 2$



7. a) $\dfrac{2\,x^2+2}{x^3-2\,x^2-x+2}$ b) $\dfrac{4\,x-2}{x^3+2\,x^2-x-2}$

c) $\dfrac{x^2-8\,x-10}{x^3+2\,x^2-x-2}$ d) $\dfrac{3\,x^2}{x^2-1}$

8. a) $x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{4}$ b) $x = 0.54$ ou $x = 1.28$

c) $x = 2$

9. a) $S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]0\,;1\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$

b) $S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]0\,;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$

c) $S = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;-1\right[\cup \left]1\,;\infty\right[$

d) $S = \left[-1\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$

e) $S = \left]1\,;2\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$

f) $S = \left]-6\,;-\frac{5}{3}\right] \cup \left]2\,;4\right]$

g) $S = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left[0\,;1\right[$

h) $S = \left]-\frac{1}{2}\,;4\right[$

i) $S = \left]-\infty\,;3\right[$

j) $S = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$

k) $S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]2;+\infty\right[$

l) $S = \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{4};2\right[$

m) $S = \left]-\infty\,;-3-\sqrt{2};\right[\cup \left]-3\,;-2\right[\cup \left]-3+\sqrt{2}\,;-1\right[$

n) $S = \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

o) $S = \left]-3\,;-1\right[\cup \left[2\,;+\infty\right[$

p) $S = \left]-\infty\,;1\right[\cup \left]4\,;+\infty\right[$

q) $S = \left[\frac{4}{5}\,;2\right[$

r) $S = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,;1\right[$

10. a) $D = \left[-\frac{7}{5}\,;+\infty\right[\setminus \left\{\frac{2}{3}\,;1\right\}$

b) $D = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-2\,;1\right] \cup \left]2\,;3\right]$

6. Fonctions puissances, exponentielles et logarithmes

6.1 Fonctions puissances

Exposants entiers positifs

On définit a^n comme le produit $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$ et on lit « a puissance n ».

On appelle a la **base** et n l'**exposant**.

Exemple

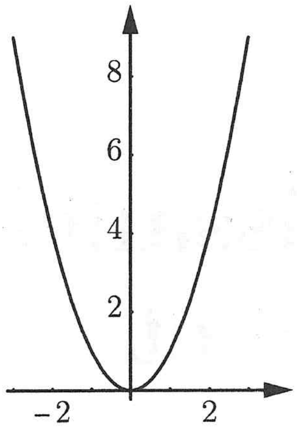
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Les puissances à exposants entiers strictement positifs vérifient les propriétés suivantes.

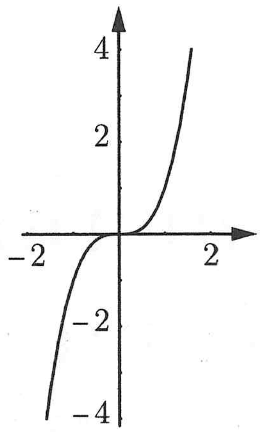
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(a^n)^m = a^{nm}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

La fonction donnée par $f(x) = x^n$ est une fonction puissance à exposant entier positif. Elle est définie pour tout nombre réel x.

Exemples



$y = x^2$



$y = x^3$

Exposants entiers

Pour conserver la propriété $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ pour les exposants entiers, on définit $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pour $a \neq 0$.

Les puissances à exposants entiers vérifient ainsi les propriétés suivantes.

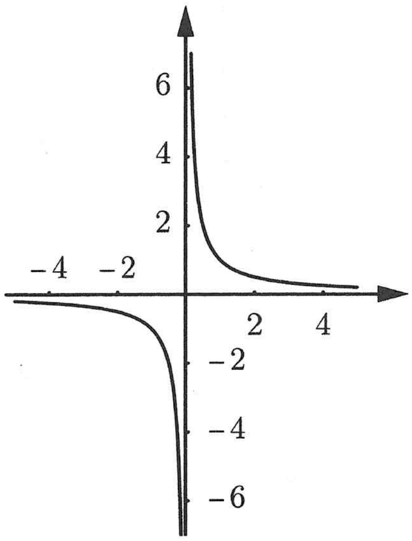
$a^0 = 1$	$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{nm}$

Exemples

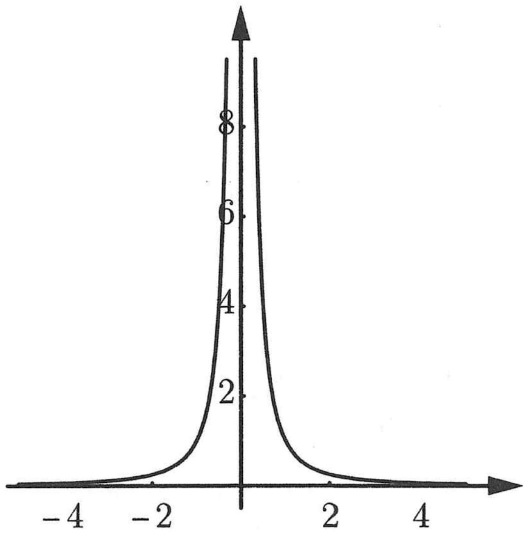
$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad a^5 \cdot a^{-3} = a^2$ $\qquad \dfrac{a^9}{a^{-2}} = a^{11}$

La fonction donnée par $f(x) = x^{-n}$ est une fonction puissance à exposant entier négatif ($n \in \mathbb{N}^*$). Elle est définie pour tout nombre réel x différent de 0.

Exemples



$y = x^{-1}$



$y = x^{-2}$

Exposants rationnels

Si $a > 0$, la racine n-ième ($n \in \mathbb{N}^*$) de a est l'unique nombre $c \geq 0$ tel que $c^n = a$. On note $c = \sqrt[n]{a}$.

On appelle n l'**indice** de la racine.

Les racines vérifient les propriétés suivantes pour $a > 0$, $b > 0$.

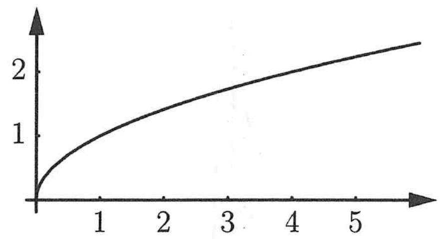
<table>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$</td><td>$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$</td><td>$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$</td></tr>
</table>

Si $n = 2$, on écrit simplement $\sqrt{a}$ et on lit **racine carrée** de a.

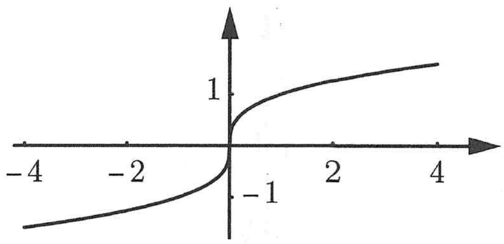
Par exemple, $\sqrt{4} = 2$ est l'unique nombre positif dont le carré est égal à 4.

La fonction donnée par $f(x) = \sqrt[n]{x}$ est une fonction racine. Elle est définie pour tout nombre positif.

Exemples



$y = \sqrt{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$

Si $x < 0$, $\sqrt[n]{x}$ n'est pas défini pour n pair, car un nombre réel élevé à une puissance paire est positif ou nul.

Si l'indice n est impair, on pose $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$. Dans ce cas, on peut donc définir $f(x) = \sqrt[n]{x}$ aussi pour $x < 0$.

Pour conserver la propriété $(a^n)^m = a^{nm}$, on définit $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ pour $a > 0$,

Exemple

$4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64}$

La propriété $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ permet de définir les puissances à exposants rationnels :

$$a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

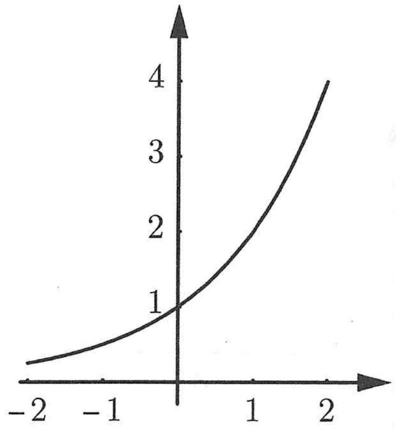
Les puissances à exposants rationnels vérifient ainsi toutes les propriétés des puissances à exposants entiers.

6.2 Fonctions exponentielles

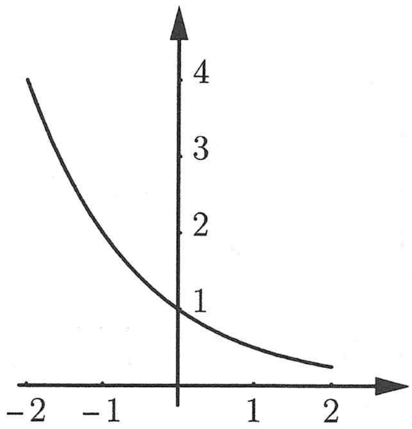
La fonction définie par $f(x) = a^x$ est appelée **exponentielle de base** a ($a > 0$ et $a \neq 1$). On note aussi $f(x) = \exp_a(x)$.

Cette fonction est clairement définie pour $x \in \mathbb{Q}$. Tout nombre réel pouvant être approché aussi près que l'on veut par un nombre rationnel, on peut donc estimer a^x pour $x \in \mathbb{R}$; on obtient ainsi une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exemples



$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

La fonction donnée par $f(x) = a^x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $a < 1$. Elle prend des valeurs strictement positives.

6.3 Fonctions logarithmes

La fonction réciproque de l'exponentielle de base a est appelée **logarithme de base** a ($a > 0$ et $a \neq 1$), elle est notée $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et définie par

$$\boxed{\log_a(x) = y \iff x = a^y}$$

Le logarithme de x en base a est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x.

La fonction $\log_a$ n'est définie que pour les nombres réels strictement positifs.

Exemples

$\log_2(16) = 4$, *car* $16 = 2^4$

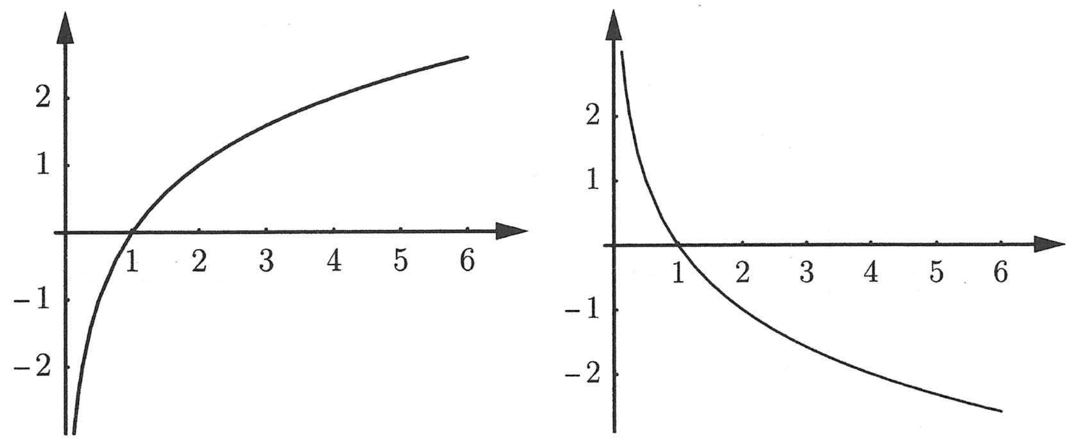
$\log_9(3) = \frac{1}{2}$, *car* $3 = 9^{\frac{1}{2}}$

Les logarithmes vérifient les propriétés suivantes.

$a^{\log_a(x)} = x$ pour tout $x > 0$	
$\log_a(a^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$	
$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$

La fonction $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.

Exemples



$y = \log_2(x)$ $\qquad$ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

Propriétés

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \text{ pour tout } x, y > 0}$$

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes.

En effet, en posant $\log_a(x) = \alpha$ et $\log_a(y) = \beta$, on a

$$\log_a(xy) = \log_a(a^\alpha \cdot a^\beta) = \log_a(a^{\alpha+\beta}) = \alpha + \beta = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\boxed{\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y) \qquad \text{et} \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

Le logarithme d'un inverse est l'opposé du logarithme.

$$\boxed{\log_a(x^r) = r\log_a(x) \text{ pour tout } x > 0}$$

Le logarithme d'une puissance est le produit de l'exposant par le logarithme.

Si l'on choisit comme base le nombre 10, on utilise la notation

$$\log_{10}(x) = \log(x)$$

Si l'on choisit comme base le nombre $e \approx 2.71828$, on utilise la notation[1]

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

[1] ln est appelé logarithme népérien par référence au mathématicien écossais John Neper (1550–1617)

Pour passer de la fonction $\log_a$ à la fonction $\log_b$, on utilise la relation

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}}$$

Cette relation nous permet d'utiliser la machine à calculer pour estimer $\log_b(x)$ pour toute base b.

Exemple

$$\log_3(8) = \frac{\log(8)}{\log(3)} = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1.89279$$

6.4 Exercices

1. Calculer sans machine.

a) $\left(2^2\right)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $\left(2^3\right)^2$

d) $2^3 - 3^2$ e) $3^2 + 3^4$ f) $10^3 + 10^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ i) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$

j) $(\sqrt{2})^4$ k) $(\sqrt{5})^6$ l) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

m) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$ n) $3^4 \cdot 3^{-4}$ o) $4^0 \cdot 4^{-2} \cdot 4^{-3}$

p) $a^{-3} \cdot a^4$ q) $\dfrac{2^{-3}}{3^2}$ r) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2. Simplifier les expressions suivantes.

a) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$ b) $(a^3)^4$ c) $\dfrac{a^4}{a^5}$

d) $3^n \cdot 3^2$ e) $5^{n+1} \cdot 5^{n-1}$ f) $\dfrac{4^{n+3}}{4^4}$

g) $\dfrac{a^{n+1}}{a}$ h) $(a^3 \cdot b^4)^2$ i) $\dfrac{(a^2 \cdot b)^3 \cdot a^4}{(a \cdot b^3)^3}$

j) $a^{-n} \cdot a^{n+1}$ k) $a^{-4} \cdot a^{n+3}$ l) $\dfrac{a^5}{a^{-2}}$

m) $\dfrac{a^n}{a^{n-1}}$ n) $\left(\dfrac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2$ o) $\left(\dfrac{a^3}{a^4}\right)^{-2}$

3. Calculer sans machine.

a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{0.04}$

d) $\sqrt{0.0009}$ e) $\sqrt{0.0016}$ f) $\sqrt{0.000\,004}$

g) $\sqrt[3]{1000}$ h) $\sqrt[4]{625}$ i) $\sqrt[3]{343}$

j) $\sqrt[5]{32}$ k) $\sqrt[3]{216}$ l) $\sqrt[4]{2401}$

m) $\sqrt[3]{64}$ n) $\sqrt[3]{0.027}$ o) $\sqrt[3]{729}$

p) $\sqrt[3]{0.001}$ q) $\sqrt[3]{0.512}$ r) $\sqrt[3]{0.125}$

4. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{5^{12}}$ c) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}}$ e) $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{12}\sqrt{3}$ h) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ i) $\sqrt[8]{2187}\sqrt[8]{3}$

j) $\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{5}$ k) $\sqrt{2^2}$ l) $\sqrt{2^6}$

m) $\sqrt[10]{2^5}$ n) $\sqrt[24]{3^8}$ o) $\sqrt[28]{4^7}$

p) $\sqrt{\sqrt{16}}$ q) $\sqrt[7]{\sqrt{7^7}}$ r) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

5. Montrer les égalités suivantes $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$

6. Sachant que $\sqrt{27} \approx 5.19$ et $\sqrt{270} \approx 16.43$, calculer

a) $\sqrt{2\,700}$ b) $\sqrt{27\,000}$ c) $\sqrt{270\,000}$

d) $\sqrt{0.27}$ e) $\sqrt{0.027}$ f) $\sqrt{0.00\,027}$

7. Sachant que $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{270} \approx 6.46$ et $\sqrt[3]{2700} \approx 13.92$, calculer

a) $\sqrt[3]{27\,000}$ b) $\sqrt[3]{270\,000}$ c) $\sqrt[3]{2\,700\,000}$

d) $\sqrt[3]{0.27}$ e) $\sqrt[3]{0.027}$ f) $\sqrt[3]{0.00\,027}$

8. Calculer

a) $\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ b) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 125^{\frac{3}{4}}$ c) $800^{0.2} \cdot 125^{0.2}$

9. Ecrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{4}{5}}$ c) $7^{\frac{31}{40}}$

d) $1024^{\frac{1}{10}}$ e) $0^{\frac{1}{5}}$ f) $36^{\frac{3}{2}}$

g) $25^{0.5}$ h) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ i) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

j) $2^{-\frac{1}{2}}$ k) $7^{-\frac{1}{3}}$ l) $4^{-\frac{5}{3}}$

10. Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels.

a) $\sqrt[5]{32}$	b) $\sqrt[11]{5^6}$	c) $\sqrt[3]{3^9}$
d) $\sqrt{9^4}$	e) $\sqrt[7]{5^2}$	f) $\sqrt[4]{a^8}$
g) $\sqrt[5]{a^{15}}$	h) $\sqrt{a^6}$	i) $\sqrt[n]{a^{2n}}$
j) $\left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15}$	k) $\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^3$	l) $\left(\sqrt{a^4}\right)^{2n}$

11. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$	b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$	c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$
d) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$	e) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$	f) $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$
g) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$	h) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\sqrt[6]{a}}{a^3}$	i) $\dfrac{(\sqrt{a})^3}{a\sqrt[3]{a^2}}$

12. Simplifier les expressions suivantes.

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1000^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}} + 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

13. Résoudre les équations suivantes.

a) $8^x = 2$	b) $16^{0.75} = x$	c) $x^{1.5} = 1000$
d) $2^6 = 2^{4x-2}$	e) $3^{4x} = 9^{x+5}$	f) $0.1^x = 1000$
g) $5^{2x} - 0.0016 = 0$	h) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$	i) $x^{0.2} = 2$

14. Sachant que le point $P(4\,;9)$ se trouve sur la courbe d'équation $y = a^x$, calculer a.

15. Calculer les expressions suivantes.

a) $\log_5(1)$ b) $\log_2(8)$ c) $\log_3(\sqrt{3})$

d) $\log_4(\sqrt[5]{64})$ e) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ f) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

g) $\log_{\frac{1}{8}}(64)$ h) $\log_4(\sqrt{2})$ i) $\log_{49}(\sqrt[3]{7})$

j) $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{8})$ k) $\log_{0.1}(0.0001)$ l) $\log_{100}(0.01)$

16. Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_3(x) = 5$ b) $\log_8(x) = \frac{2}{3}$

c) $\log_{0.01}(x) = \frac{1}{2}$ d) $\log_x(125) = 3$

e) $\log_x(32) = \frac{5}{3}$ f) $\log_x(0.0025) = 2$

g) $3\log_a(x) = 2\log_a(8)$ h) $\log(9x+5) - \log(x) = 1$

17. Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_a(x) = \log_a(16) + 2\log_a(3) - 2\log_a(2) - \frac{1}{2}\log_a(9)$

b) $\log_a(x) = 4\log_a(5) + \log_a\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log_a(3) + \frac{1}{3}\log_a(27)$

18. Calculer à l'aide d'une machine.

a) $\log(3)$ b) $\log_3(10)$ c) $\log_{0.7}(17)$

d) $\log_7(12)$ e) $\log_{12}(7)$ f) $\log_3(8)$

19. Résoudre les équations suivantes.

a) $2^x = 100$ b) $0.8^x = 0.0005$

c) $e^x = \pi$ d) $3^{-\frac{1}{x}} = 20$

e) $7^{\sqrt{x}} = 3$ f) $e^{-\ln(x)} = 3$

20. Résoudre les équations suivantes.

a) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

b) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

c) $e^{\frac{6}{x}} = e^{x-1}$

d) $7^{2x-3} = 16\,807$

e) $3^{5x+4} = 9\sqrt{3}$

f) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

g) $3^x + 9^x = 90$

h) $5 \cdot 5^{2x} + 14 \cdot 5^x - 3 = 0$

i) $e^x - 6\,e^{-x} = -1$

j) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

21. Résoudre les équations suivantes.

a) $\log(x+2) - \log(3) = \log(2x-1) + \log(7)$

b) $\log(x+2) + \log(x-1) = \log(18)$

c) $\log(2x-3) + \log(3x+10) = 4\log(2)$

d) $\log_2(x^2-4) = 2\log_2(x+3)$

e) $\log_3(35-x^3) = 3\log_3(5-x)$

f) $\log_2(x) = \dfrac{1}{2} + \log_4(4x+15)$

g) $\log_9(x) = \dfrac{1}{8}\log_3(x^2+2)$

h) $\log(x^2-7) = 2\log(x+3)$

i) $\log(20) + \log(x^2-9) - \log(x+3) = 1 + \log(2x+6)$

j) $\log_x(7^3) - \log_7(x) = 2$

22. Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} \log(x) + \log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x) - \log(y) = 1 \\ x\,y = 2 \end{cases}$

23. Estimer graphiquement les solutions des équations suivantes.

a) $3^x = \dfrac{3}{2}(x+1)$

b) $x + \log_3(x) = 0$

24. Esquisser le graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x \cdot 2^x$

b) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

c) $f(x) = 2^{\frac{2}{x}}$

d) $f(x) = 2^{-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$

f) $f(x) = x + 1.1^x$

g) $f(x) = x \log_2(x)$

h) $f(x) = \log_2(-x)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

j) $f(x) = \log_2(x^2)$

25. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2}{10^x - 9}$

b) $f(x) = \log_7 \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 3}\right)$

c) $f(x) = \log(x^3 + 2x^2 - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2 - 1)}$

26. Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \log(-x^2 + 4x + 22)$

b) $f(x) = 2 - 10^{3-x}$

c) $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{2x}{x - 1}\right)$

27. On considère une colonie de bactéries dont la population $p(t)$ double toutes les 10 secondes.

a) Sachant qu'il y a 100 bactéries au temps $t = 0$, exprimer $p(t)$ où t est donné en secondes.

b) Calculer la population après 10 secondes, 60 secondes et 120 secondes

c) Au bout de combien de temps la population sera-t-elle égale à 1 000 000 ?

28. Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujoud'hui 72 342 m^3. Il y a 12 ans, elle occupait 48 228 m^3.

a) Quel volume occupait-elle il y a 5 ans ?

b) Quel volume occupera-t-elle dans 7 ans ?

29. On considère un carré dont le côté augmente continûment et double toutes les 12 minutes. Sachant qu'au temps $t = 0$, l'aire du carré est égale à 25 mm^2, exprimer le côté du carré $c(t)$ et son aire $a(t)$ en fonction du temps en minutes.

Dans combien de temps, à une seconde près, l'aire de ce carré sera-t-elle égale à 5 m^2 ?

30. Un capital C est placé à la banque. Chaque année, il augmente, grâce aux intérêts, de 5% de sa valeur.

a) Quelle sera sa valeur après t années ?

b) Après combien d'années aura-t-il doublé ?

31. Un capital de CHF 2 500.– est placé à la banque le 1er janvier 2005. Sachant que le taux d'intérêt est de 2.25%, quelle sera sa valeur après t années (en laissant les intérêts sur le compte et en supposant le taux d'intérêts constant) ?

Au 1er janvier de quelle année le capital dépassera-t-il pour la première fois CHF 7 500.– ?

32. Datation au carbone 14 (^{14}C).

On admet que la concentration du ^{14}C (radioactif) dans l'atmosphère a toujours été constante au cours du temps. Les organismes vivants ingèrent durant toute leur existence du carbone et en particulier du ^{14}C. Ainsi, durant la vie, l'absorption de ^{14}C compense exactement la partie de ^{14}C qui s'est désintégrée. Dès la mort, la quantité de ^{14}C commence à décroître, diminuant de moitié toutes les 5 568 années (demi-vie du ^{14}C).

Estimer l'âge d'un morceau de charbon retrouvé dans les grottes de Lascaux (et ainsi l'âge probable des peintures) sachant qu'en 1950, on comptait 0.97 désintégrations par minute et par gramme alors que, pour du bois vivant, on compte 6.68 désintégrations par minute et par gramme.

33. L'isotope d'hydrogène ^{3}H (demi-vie 12.3 années) est produit dans l'atmosphère par les rayons cosmiques et amené sur la terre par les pluies. Les matériaux non organiques ont ainsi un taux constant de tritium. Dès qu'ils sont soustraits à l'action des pluies, leur taux diminue par désintégration. On mesure la quantité de cet isotope dans les parois d'une maison et on trouve qu'elle atteint 10% de celle contenue dans une maison récemment construite.

Quel est l'âge de cette maison ?

34. La demi-vie de l'isotope radioactif $^{210}\mathrm{Po}$ est d'environ 140 jours.

a) D'un échantillon initial de 20 g, combien en reste-t-il après 15 jours ?

b) Dans combien de temps n'en restera-t-il que 2 g ?

35. Echelle de Richter.

L'échelle de Richter donne la magnitude M d'un séisme en fonction de l'énergie dissipée par le séisme. Cette échelle est définie par la relation $\log(E) = 1.5M + 4.4$ où E est mesurée en joules.

a) Si l'énergie dissipée par un premier séisme de magnitude M_1 sur l'échelle de Richter est 10 fois supérieure à l'énergie dissipée par un second séisme de magnitude M_2, quel est le rapport de leur magnitude ?

b) Comparer l'énergie dissipée lors du séisme qui détruisit San Francisco en 1906 ($M_{\mathrm{SF}} = 8.3$) à l'énergie de celui de Los Angeles de janvier 1994 ($M_{\mathrm{LA}} = 6.6$).

c) Quelle est la magnitude sur l'échelle de Richter de l'onde sismique provoquée par l'explosion d'une bombe H de 10 mégatonnes, c'est-à-dire d'une bombe libérant une énergie équivalente à celle produite par l'explosion de 10 millions de tonnes de TNT ?
On sait qu'un kg de TNT libère en explosant une énergie de $4.2 \cdot 10^6$ joules.

36. La grippe se propage à partir d'un individu malade à une population de 1 000 personnes. On admet que le nombre n de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est donné par

$$n(t) = \frac{1\,000}{1 + 999 \cdot 10^{-0.17t}}$$

a) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

b) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

6.5 Réponses aux exercices du chapitre 6

1. a) 64 b) 256 c) 64
d) -1 e) 90 f) 1'100
g) $\frac{1}{81}$ h) $-\frac{8}{125}$ i) $\frac{625}{16}$
j) 4 k) 125 l) $\frac{1}{81}$
m) $2^{-8} = \frac{1}{256}$ n) 1 o) $4^{-5} = \frac{1}{1024}$
p) a q) $\frac{1}{72}$ r) 4

2. a) a^{12} b) a^{12} c) $\frac{1}{a} = a^{-1}$
d) 3^{n+2} e) 5^{2n} f) 4^{n-1}
g) a^n h) $a^6 \cdot b^8$ i) $a^7 \cdot b^{-6} = \frac{a^7}{b^6}$
j) a k) a^{n-1} l) a^7
m) a n) a^2 o) a^2

3. a) 0 b) 25 c) 0.2
d) 0.03 e) 0.04 f) 0.002
g) 10 h) 5 i) 7
j) 2 k) 6 l) 7
m) 4 n) 0.3 o) 9
p) 0.1 q) 0.8 r) 0.5

4. a) $\sqrt[4]{3}$ b) $5^4 = 625$ c) 3
d) $\sqrt[3]{a^2}$ e) 2 f) $\frac{1}{3}$
g) 6 h) 2 i) 3
j) 5 k) 2 l) $2^3 = 8$
m) $\sqrt{2}$ n) $\sqrt[3]{3}$ o) $\sqrt{2}$
p) 2 q) $\sqrt{7}$ r) 3

6. a) 51.9 b) 164.3 c) 519
d) 0.519 e) 0.1643 f) 0.01643

7. a) 30 b) 64.6 c) 139.2
d) 0.646 e) 0.3 f) 0.0646

8. a) $\frac{25}{4}$ b) 125 c) 10

9. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[5]{2^4}$ c) $\sqrt[40]{7^{31}}$
d) 2 e) 0 f) 216
g) 5 h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{9}{4}$
j) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ l) $\frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$

10. a) 2 b) $5^{\frac{6}{11}}$ c) 3^3
d) 9^2 e) $5^{\frac{2}{7}}$ f) a^2
g) a^3 h) a^3 i) a^2
j) a^{18} k) a^n l) a^{4n}

11. a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[6]{a^5}$ c) $\sqrt[12]{a}$
d) $\sqrt[10]{a^9}$ e) 1 f) $\sqrt[12]{a^7}$
g) $\sqrt[12]{a}$ h) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7}}$ i) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

12. a) -85 b) $\frac{16}{3}$ c) $\sqrt[8]{2^7}$

13. a) $\frac{1}{3}$ b) 8 c) 100
d) 2 e) 5 f) -3
g) -2 h) -2 i) 32

14. $\sqrt{3}$

15. a) 0 b) 3 c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{5}$ e) $-\frac{2}{3}$ f) -4
g) -2 h) $\frac{1}{4}$ i) $\frac{1}{6}$
j) $-\frac{3}{4}$ k) 4 l) -1

16. a) 243 b) 4 c) 0.1
d) 5 e) 8 f) 0.05
g) 4 h) 5

17. a) 12 b) $\frac{125}{9}$

18. a) 0.477 b) 2.096 c) -7.943
d) 1.277 e) 0.783 f) 1.893

19. a) 6.644 b) 34.063 c) 1.145
d) -0.367 e) 0.319 f) $\frac{1}{3}$

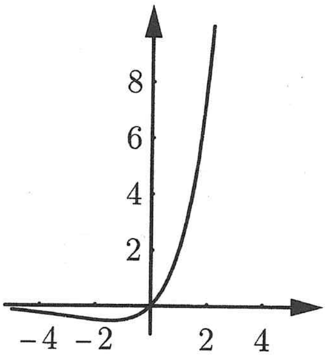
20. a) $\frac{3}{2}$ b) -1 c) $3\,;\,-2$
d) 4 e) $-\frac{3}{10}$ f) $0\,;\,1$
g) 2 h) -1 i) $\ln(2)$
j) Pas de solution

21. a) $\frac{23}{41}$ b) 4 c) 2
d) $-\frac{13}{6}$ e) $2\,;\,3$ f) $4+\sqrt{46}$
g) $\sqrt{2}$ h) $-\frac{8}{3}$ i) Pas de solution
j) $7^{-3}\,;\,7$

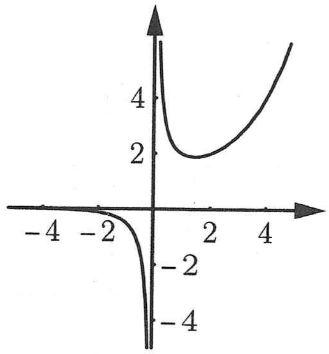
22. a) $(x\,;y)=(20\,;5)\,;\,(x\,;y)=(5\,;20)$
b) $(x\,;y)=(2\sqrt{5}\,;\frac{1}{\sqrt{5}})$

23. a) 1 ; -0.7 environ b) 0.5 environ

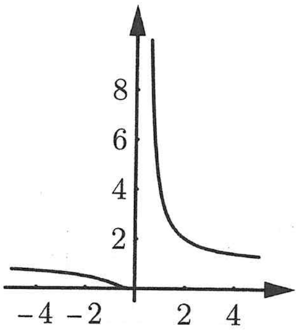
24. a)



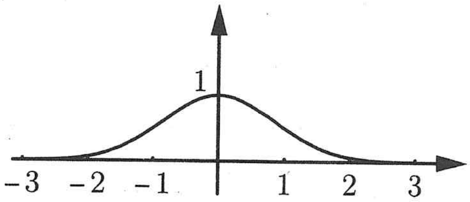
b)



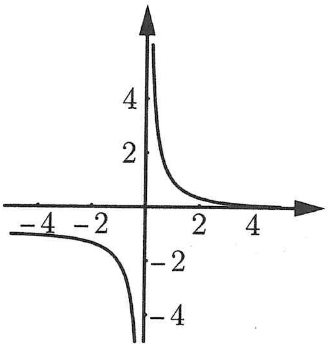
c)



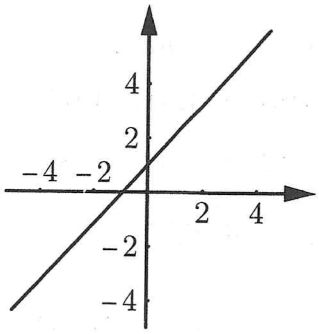
d)



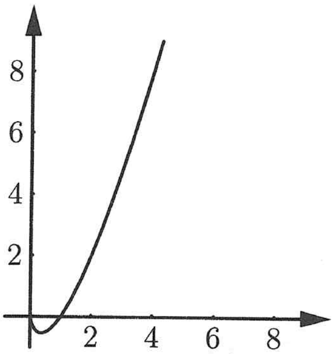
e)



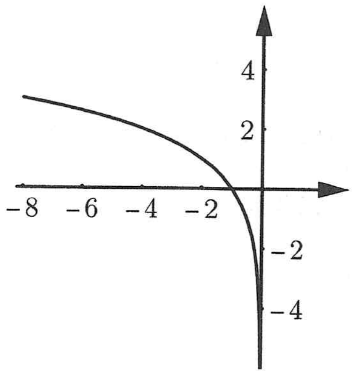
f)



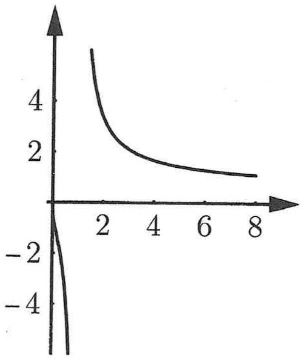
g)



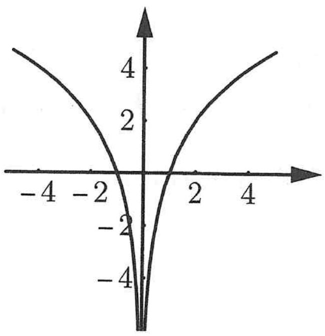
h)



i)



j)



25. a) $\mathbb{R} - \{\log(9)\}$

b) $]-3\,;-1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$

c) $]\,1\,;+\infty\,[$

d) $]-\infty\,;-\sqrt{2}\,[\,\cup\,]-\sqrt{2}\,;-1\,[\,\cup\,]\,1\,;\sqrt{2}\,[\,\cup\,]\,\sqrt{2}\,;+\infty\,[$

26. a)

		$2-\sqrt{26}$		-3		7		$2+\sqrt{26}$	
$f(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		

b)

		$3-\log(2)$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

c)

		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$				$+$

27. a) $p(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$

b) $200\,,\ 6\,400\,,\ 409\,600$

c) 132.88 secondes

28. a) $61\,096.897$ b) $91\,645.345$

29. $c(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$, $a(t) = 25 \cdot 2^{\frac{t}{6}}$, $6\,339$ secondes

30. a) $1.05^t \cdot C$ b) 15 ans

31. $2\,500 \cdot 1.0225^t$, au 1[er] janvier 2055

32. $15\,500$ ans

33. 41 ans

34. a) 18.57 g b) 465 jours

35. a) $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{\log(E_1) - 4.4}{\log(E_1) - 5.4}$ b) $\dfrac{E_{\mathrm{SF}}}{E_{\mathrm{LA}}} = 354.8$ c) 8.15

36. a) 716 personnes b) 19 jours

7. Systèmes d'équations

Cherchons la fonction du 2ᵉ degré $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ dont le graphe est la parabole γ passant par les points $A(2\,;35)$, $B(4\,;23)$ et $C(5\,;11)$.

$$\begin{aligned}
A \in \gamma &\Rightarrow 35 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\
B \in \gamma &\Rightarrow 23 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\
C \in \gamma &\Rightarrow 11 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c
\end{aligned}$$

On obtient donc le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 4\,a + 2\,b + c = 35 \\ 16\,a + 4\,b + c = 23 \\ 25\,a + 5\,b + c = 11 \end{cases}$$

Pour le résoudre, on le transforme à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\left\{\begin{array}{rcr|r|r} 4\,a + 2\,b + c &=& 35 & -1 & -1 \\ 16\,a + 4\,b + c &=& 23 & 1 & \\ 25\,a + 5\,b + c &=& 11 & & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr|r} 4\,a + 2\,b + c &=& 35 & \\ 12\,a + 2\,b &=& -12 & -3 \\ 21\,a + 3\,b &=& -24 & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 4\,a + 2\,b + c = 35 \\ 12\,a + 2\,b = -12 \\ 6\,a = -12 \end{cases}$$

On obtient $a = -2$ à partir de la 3ᵉ équation de ce dernier système. En substituant cette valeur dans la 2ᵉ équation, on trouve $b = 6$ et enfin $c = 31$ après substitution dans la 1ʳᵉ équation.

La fonction cherchée est donc donnée par $f(x) = -2\,x^2 + 6\,x + 31$.

Pour trouver l'expression $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ d'une fonction du 2ᵉ degré en connaissant trois points A, B et C de son graphe, on peut donc résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues a, b et c.

7.1 Systèmes équivalents

Deux systèmes d'équations sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. Pour résoudre un système, c'est-à-dire en trouver les solutions, on va transformer le système original en un système équivalent dont les solutions peuvent être déterminées de manière simple.

Théorème sur les systèmes équivalents

A partir d'un système donné, on obtient un système équivalent si

a) on permute deux équations ;

b) on multiplie une équation par un nombre réel non nul ;

c) on additionne un multiple d'une équation à une autre équation.

7.2 Méthode d'élimination de Gauss[1]

Les règles ci-dessus permettent de transformer progressivement un système en un système équivalent plus simple à résoudre. Cette méthode convient particulièrement bien aux systèmes linéaires.

Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|c|c} x & - & 2y & - & 3z & = & -1 & -2 & -1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 7 & 1 & \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 13 & & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|c} x & - & 2y & - & 3z & = & -1 & \\ & & 5y & + & 7z & = & 9 & -1 \\ & & 5y & + & z & = & 14 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & & 5y & + & 7z & = & 9 \\ & & & - & 6z & = & 5 \end{array}\right.$$

A ce stade, on pourrait calculer z à partir de la 3e équation et substituer. Nous suggérons de continuer de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|c|c} x & - & 2y & - & 3z & = & -1 & & 2 \\ & & 5y & + & 7z & = & 9 & 6 & \\ & & & - & 6z & = & 5 & 7 & -1 \end{array}\right.$$

[1]Carl Friedrich GAUSS, mathématicien allemand (1777–1855)

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & - & 4y & & = -7 \\ & & 30y & & = 83 \\ & & & -6z & = 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 15 \\ 2 \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 30x & & & = 61 \\ & 30y & & = 83 \\ & & -6z & = 5 \end{array}\right.$$

Donc $(x\,;y\,;z) = \left(\frac{61}{30}\,;\frac{83}{30}\,;-\frac{5}{6}\right)$

L'avantage de cette méthode est de travailler avec des coefficients entiers. Pour s'en convaincre, substituer comme dans l'exemple de la page 127.

Exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} -3 \\ 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{r} 1 \\ 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x & & - 2z & = & 4 \\ & - y & - 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

On peut exprimer x *et* y *en fonction de* z. *De plus,* z *peut prendre n'importe quelle valeur. En posant* $z = t$, *on obtient :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 2t + 4 \\ -y & = & 2t + 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t + 2 \\ y & = & -2t - 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

Donc $(x\,;y\,;z) = (t+2\,;-2t-1\,;t)$

7.3 Méthode par substitution

Cette méthode s'avère efficace pour la résolution de systèmes non linéaires dont une des équations se ramène à une équation du 1$^{\text{er}}$ degré.

a) Résoudre une des équations par rapport à l'une des inconnues.

b) Remplacer cette inconnue par l'expression trouvée en a) dans toutes les autres équations.

c) Résoudre le nouveau système comprenant une équation et une inconnue de moins.

d) Déterminer la valeur de l'inconnue isolée au point a).

e) Vérifier les solutions obtenues dans le système original.

Exemple 1

Résoudre le système $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y + 1 = 2x \end{cases}$

On isole $y = 2x - 1$ *dans la* 2^e *équation, puis on remplace* y *par* $2x - 1$ *dans la* 1^{re} *équation. On obtient :*

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 - 4 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement $x = 3$ *ou* $x = -1$ *.*
En remplaçant x *par* 3 *dans l'équation* $y = 2x - 1$*, on obtient* $y = 5$ *et en remplaçant* x *par* -1*, on obtient* $y = -3$ *.*
Les solutions possibles $(x\,;y)$ *du système sont les couples* $(3\,;5)$ *et* $(-1\,;-3)$ *.*
Après vérification, ces deux solutions conviennent.

Exemple 2

Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{x}{y-2} = 3 \\ xy + y - 2x = 2 \end{cases}$

De la 1^{re} *équation on tire* $x = 3y - 6$*, puis on remplace* x *par* $3y - 6$ *dans la* 2^e *équation. On obtient :*

$$\begin{aligned} &(3y-6)\,y + y - 2\,(3y-6) = 2 \\ &3y^2 - 11y + 10 = 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement $y = 2$ *ou* $y = \dfrac{5}{3}$
En remplaçant y *par* 2 *dans l'équation* $x = 3y - 6$*, on obtient* $x = 0$ *et en remplaçant* y *par* $\frac{5}{3}$*, on obtient* $x = -1$ *.*
Les solutions possibles $(x\,;y)$ *du système sont les couples* $(0\,;2)$ *et* $(-1\,;\frac{5}{3})$ *.*
Après vérification, la solution $(0\,;2)$ *doit être éliminée et il ne reste plus que la solution* $(-1\,;\frac{5}{3})$ *.*

7.4 Exercices

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants

a) $\begin{cases} 12x - 5y = 29 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 19 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ 3y - 2x = 24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 72x + 14y = 330 \\ 63x + 7y = 273 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3y + 10x = 40 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 21x + 8y + 66 = 0 \\ 28x - 23y - 13 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 41 \\ 8x + 5y = 31 \\ 7y = 21 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 41 \\ 5x + 3y = 10 - z \\ 9x = 27 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 7x - 4y - 5z = 56 \\ 3y - 2z = 13 \\ 5x - 3y = 22 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x - y + z = 5 \\ x + 2z = 2y - 10 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$ l) $\begin{cases} 3z - 2y - x = 17 \\ 2y + 3z - 2x = 36 \\ 5x + 2y - z = 10 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$ n) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 47 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$ p) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4y - z = -5 \\ x + 5y - 4z = -9 \end{cases}$ r) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 10 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ x - y + 4z = 15 \\ -x + 7y - 6z = -27 \end{cases}$ t) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 22 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x + 4y - z = -3 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 4x + y - z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x+y+2z = 4 \\ 3x-y+z = 3 \end{cases}$ x) $\begin{cases} x-3y+z-t = 0 \\ 2x+y-z+2t = 0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} x+5y+4z-13t = 3 \\ 3x-y+2z+5t = 2 \\ 2x+2y+3z-4t = 1 \end{cases}$ z) $\begin{cases} x+y+z+t+u = 1 \\ x+2y+z+t+u = 0 \\ x+y+3z+t+u = 3 \\ x+y+z+4t+u = -2 \\ x+y+z+t+5u = 5 \end{cases}$

2. Déterminer l'expression $f(x) = ax^2+bx+c$ de la fonction du 2^e^ degré dont le graphe passe par les points A, B et C.

a) $A(-2;29)$, $B(3;19)$ et $C(1;5)$

b) $A(2;-17)$, $B(-3;-72)$ et $C(-2;-37)$

3. Déterminer l'expression $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ de la fonction du 3^e^ degré dont le graphe passe par les points A, B, C et D.

a) $A(-2;-17)$, $B(-1;-9)$, $C(2;33)$ et $D(-3;-27)$

b) $A(2;18)$, $B(3;12)$, $C(4;-16)$ et $D(-1;24)$

4. Il y a 4 ans, l'âge du père était le quadruple de celui de son fils; dans 10 ans, il n'en sera plus que le double. Quels sont leurs âges respectifs ?

5. Jean dit à Pierre : ¡¡ Donne-moi cinq de tes billes et nous en aurons autant l'un que l'autre ¿¿. Celui-ci répond : ¡¡ Donne m'en dix des tiennes et j'en aurai le double de ce qu'il te restera ¿¿. Combien chacun avait-il de billes ?

6. Une boîte contient des boules rouges et des boules noires. Si l'on ajoute une boule rouge, les boules rouges représentent alors 25 % du contenu de la boîte. Si l'on retire une boule rouge, les boules rouges ne représentent alors plus que 20 % du contenu de la boîte. Combien la boîte contient-elle de boules rouges et de boules noires ?

7. Un tonneau contient 120 litres de vin et 180 litres d'eau ; un second tonneau contient 90 litres de vin et 30 litres d'eau. Combien de litres faut-il prendre de chacun des deux tonneaux pour composer un mélange qui contienne 70 litres de vin et 70 litres d'eau ?

8. La somme des chiffres d'un nombre entier de trois chiffres est 18. Si l'on permute le premier chiffre (depuis la gauche) et le deuxième, le nombre augmente de 180. Si l'on permute le deuxième et le troisième chiffre, le nombre augmente de 18. Quel est ce nombre ?

9. Un téléphérique pratique les tarifs suivants : montée CHF 22.50, descente CHF 15.–, aller-retour CHF 30.–. Pendant une journée, on a encaissé CHF 19 650.– pour 680 montées et 520 descentes. Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

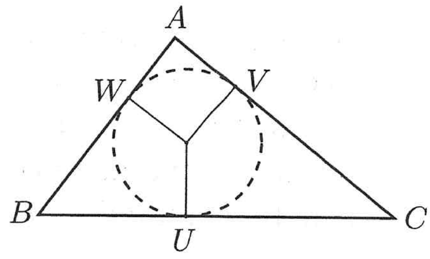
10. Un capital de CHF 330 740.– est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%. Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme. Quelles étaient les parts initiales ?

11. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés en les points U, V et W.

Déterminer les longueurs AV, AW, BW, BU, CU et CV sachant que

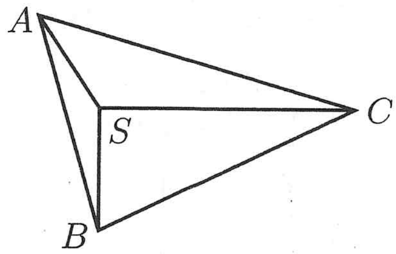
a) $AB = 5.5$, $BC = 8$ et $AC = 7$

b) $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$



12. La découpe d'un cube près d'un sommet S de ce cube est représentée ci-contre.

Déterminer les longueurs SA, SB et SC connaissant $AB = 12.5$ cm, $BC = 24.4$ cm et $AC = 26.7$ cm.



13. Calculer les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle sachant que les diagonales des faces mesurent 39 cm, 40 cm et 41 cm.

14. Trois personnes jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Elles jouent trois parties, en perdent une chacune, et se retirent chacune avec 16 francs. De quelle somme chaque personne disposait-elle au début du jeu ?

15. Une population stable de 35 000 oiseaux vit sur trois îles. Chaque année, 10 % de la population de l'île A migre vers l'île B, 20 % de la population de l'île B migre vers l'île C, et 5 % de la population de l'île C migre vers l'île A.

Déterminer le nombre d'oiseaux sur chaque île sachant que la population sur chaque île ne varie pas d'une année à l'autre.

16. Un fermier possède 750 têtes de bétail réparties en 400 adultes (âgés de 2 ans ou plus), 150 bovins âgés d'un an et 200 veaux. Les informations suivantes sont connues à propos de cette race particulière. Chaque printemps, une femelle adulte donne naissance à un seul veau, et 75 % de ces veaux survivront la première année. Le pourcentage annuel de survivants pour le bétail âgé d'un an et pour les adultes est respectivement de 80 % et 90 %. Il y a autant de mâles que de femelles dans toutes les classes d'âges. Estimer la population de chaque classe d'âge

a) le printemps prochain;

b) le printemps passé.

17. Chez le poissonnier, j'ai observé trois clientes qui achetaient les mêmes espèces de poisson vendues à la pièce: la première a acheté 2 limandes, 5 maquereaux et 4 carrelets et a payé 62 francs. La deuxième a acheté 3 limandes, 5 maquereaux et un carrelet et a payé 53 francs. La dernière a acheté 2 limandes, 7 maquereaux et 8 carrelets.

Combien cette dernière a-t-elle payé?

18. Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} 2xy - 3y = 3 \\ y^2 - 4xy = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x + y = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{10} \\ x + y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy - (x+y) = -13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y^2 - xy = 30 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 15 \\ x + y + 3xy = -7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + z^2 = 7 \\ xy + 2(x+y) = 11 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4x^2 + yz = 2 \\ -4x + y + 3z = 1 \\ y + 4z = 7 \end{cases}$

19. Une somme d'argent a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu six personnes de plus, chacun aurait reçu deux francs de moins. Au contraire, s'il y avait eu trois personnes de moins, chacune aurait reçu deux francs de plus. Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune.

20. Factoriser les polynômes suivants en un produit de deux polynômes du 2^{e} degré de la forme $(x^2 - a\,x + b) \cdot (x^2 + a\,x + b)$

a) $x^4 + 6\,x^2 + 25$

b) $x^4 - 6\,x^2 + 25$

c) $x^4 - 4\,x^2 + 36$

d) $x^4 + 3\,x^2 + 25$

7.5 Réponses aux exercices du chapitre 7

1. a) $(x\,;y) = (2\,;-1)$

b) $(x\,;y) = (7\,;12)$

c) $(x\,;y) = (-\frac{123}{29}\,;\frac{150}{29})$

d) $(x\,;y) = (4\,;3)$

e) $(x\,;y) = (\frac{9}{2}\,;-\frac{5}{3})$

f) $(x\,;y) = (-2\,;-3)$

g) $(x\,;y\,;z) = (2\,;3\,;14)$

h) $(x\,;y\,;z) = (3\,;-5\,;10)$

i) $(x\,;y\,;z) = (5\,;1\,;-5)$

j) $(x\,;y\,;z) = (20\,;10\,;-5)$

k) $(x\,;y\,;z) = (3\,;-2\,;-1)$

l) $(x\,;y\,;z) = (\frac{28}{15}\,;\frac{313}{60}\,;\frac{293}{30})$

m) $(x\,;y\,;z) = (6\,;-10\,;1)$

n) $(x\,;y\,;z) = (-\frac{39}{5}\,;11\,;\frac{37}{5})$

o) $(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$

p) $(x\,;y\,;z) = (7\,t\,;16\,t\,;13\,t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

q) $(x\,;y\,;z) = (1-t\,;t-2\,;t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

r) $(x\,;y\,;z) = (-1\,;4\,;5)$

s) $(x\,;y\,;z) = (13-11\,t\,;t-2\,;3\,t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

t) $(x\,;y\,;z) = (t+4\,;5-2\,t\,;t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

u) $(x\,;y\,;z) = (1\,;-1\,;2)$

v) Pas de solution

w) $(x\,;y\,;z) = (\frac{7}{4}-3\,t\,;\frac{9}{4}-5\,t\,;4\,t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

x) $(x\,;y\,;z\,;t) = (2\,u-5\,v\,;3\,u-4\,v\,;7\,u\,;7\,v)\,,u \in \mathbb{R}\,,v \in \mathbb{R}$

y) Pas de solution

z) $(x\,;y\,;z\,;t\,;u) = (1\,;-1\,;1\,;-1\,;1)$

2. a) $3\,x^2-5\,x+7$

b) $-6\,x^2+5\,x-3$

3. a) $\frac{1}{2}\,x^3+2\,x^2+\frac{21}{2}\,x$

b) $-2\,x^3+7\,x^2-3\,x+12$

4. Le père a 32 ans et le fils 11 ans.

5. Jean avait 40 billes et Pierre avait 50 billes.

6. 7 boules rouges et 24 boules noires

7. 100 litres du 1er tonneau et 40 litres du 2e tonneau

8. 468

9. 220 montées ; 60 descentes ; 460 aller-retour

10. CHF 111 300.– ; CHF 110 240.– ; CHF 109 200.–

11. a) $AV = AW = 2.25$; $BW = BU = 3.25$ et $CU = CV = 4.75$

b) $AV = AW = \dfrac{-a+b+c}{2}$; $BW = BU = \dfrac{a-b+c}{2}$

$CU = CV = \dfrac{a+b-c}{2}$

12. $SA = 11.7$ cm, $SB = 4.4$ cm et $SC = 24$ cm

13. $12\sqrt{5} \cong 26.8$ cm ; $3\sqrt{89} \cong 28.3$ cm ; $4\sqrt{55} \cong 29.7$ cm

14. Celle qui a perdu la 1re partie avait 26 francs, celle qui a perdu la 2e partie avait 14 francs et la 3e avait 8 francs.

15. 10 000 oiseaux sur l'île A, 5 000 sur l'île B et 20 000 sur l'île C

16. a) 480 adultes, 150 âgés d'un an et 200 veaux

b) 400 adultes, 50 âgés d'un an et 200 veaux

17. 94 francs

18. a) $(x\,;y) = (2\,;3)$

b) $(x\,;y) = (-60\,;90)$ ou $(18\,;12)$

c) $(x\,;y) = (1\,;10)$ ou $(10\,;1)$

d) $(x\,;y) = (-5\,;3)$ ou $(3\,;-5)$ ou $(2+\sqrt{13}\,;2-\sqrt{13})$ ou $(2-\sqrt{13}\,;2+\sqrt{13})$

e) $(x\,;y) = (-1\,;1)$ ou $(1\,;-1)$

f) $(x\,;y) = (3\,;2)$ ou $\left(\sqrt{\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)}\,;-\sqrt{\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)}\right)$ ou

$(-3\,;-2)$ ou $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)}\,;\sqrt{\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)}\right)$

g) $(x\,;y) = (1\,;-2)$ ou $\left(\dfrac{\sqrt{21}-2}{3}\,;\dfrac{-\sqrt{21}-2}{3}\right)$ ou

$(-2\,;1)$ ou $\left(\dfrac{-\sqrt{21}-2}{3}\,;\dfrac{\sqrt{21}-2}{3}\right)$

h) $(x\,;y\,;z) = (1\,;3\,;-2)$ ou $(3\,;1\,;-2)$

i) $(x\,;y) = (5\,;4)$

j) $(x\,;y\,;z) = (1\,;-1\,;2)$ ou $(\frac{26}{15}\,;\frac{161}{15}\,;-\frac{14}{15})$

19. 12 personnes recevant 6 francs chacune.

20. a) $(x^2-2x+5)\cdot(x^2+2x+5)$

b) $(x^2-4x+5)\cdot(x^2+4x+5)$

c) $(x^2-4x+6)\cdot(x^2+4x+6)$

d) $(x^2-\sqrt{7}x+5)\cdot(x^2+\sqrt{7}x+5)$

8. Optimisation linéaire

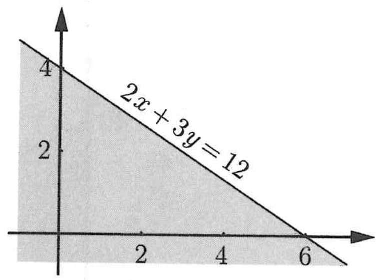
8.1 Systèmes d'inéquations

Introduction

L'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues est représenté par une droite du plan. De même, l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré à deux inconnues est représenté par un demi-plan.

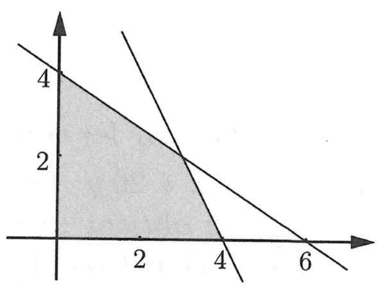
Exemple

L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\,x + 3\,y \leq 12$ *est le demi-plan contenant l'origine et limité par la droite d'équation* $2\,x + 3\,y = 12$ *.*



Plus généralement, l'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y \leq 12 \\ 2\,x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



est le domaine convexe du plan représenté ci-dessus.

Par suite, l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations à deux inconnues est représenté par un domaine convexe du plan obtenu comme intersection de demi-plans. On le détermine graphiquement en dessinant les différentes droites de sa frontière.

Cette démarche se généralise à trois inconnues en remplaçant les droites par des plans et les demi-plans par des demi-espaces.

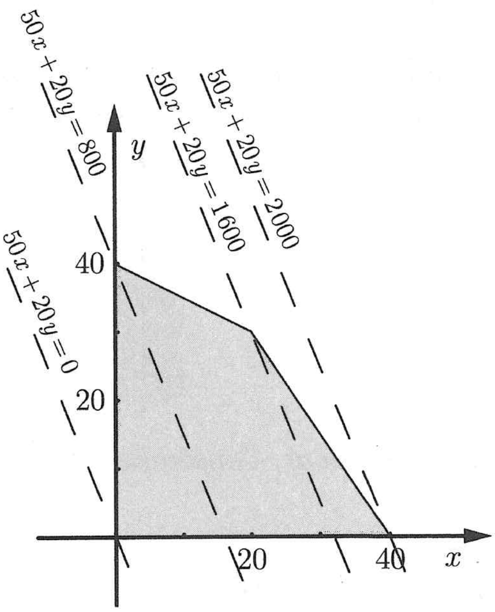
8.2 Optimisation

Exemple 1

Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal alors que le type B demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal. Sachant que, pour une boîte, le profit est de 50 francs pour le type A et de 20 francs pour le type B , comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

Si x *désigne le nombre de boîtes du type* A *et* y *le nombre de boîtes du type* B, *le problème ci-dessus revient à trouver la valeur maximum de l'expression* $P = 50\,x + 20\,y$ *avec les contraintes suivantes :*

$$\begin{cases} x + 2\,y \leq 80 \\ 3\,x + 2\,y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Le domaine défini par les contraintes est le quadrilatère grisé ci-dessus. Comme $P = 50\,x + 20\,y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}\,x + \frac{P}{20}$ *est l'équation d'une droite de pente* $-\frac{5}{2}$, *on obtient une famille de droites parallèles correspondant chacune à une valeur fixée de* P . *Plus ces droites sont éloignées de l'origine du repère* $(0\,;0)$, *plus* P *augmente. En effet,* $\frac{P}{20}$ *est l'ordonnée de l'intersection d'une telle droite avec l'axe* Oy . *On va chercher la droite la plus éloignée de* $(0\,;0)$ *qui contient un point du quadrilatère. Cette droite réalisera le maximum de* P *sur le quadrilatère et on observe alors que ce maximum est forcément atteint sur un sommet du quadrilatère. Pour* *trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du quadrilatère.*

On obtient les valeurs suivantes:

Sommet $(x\,;y)$	Valeur de $P = 50\,x + 20\,y$
$(0;\ 0)$	$50\cdot 0 + 20\cdot 0 = 0$
$(0;40)$	$50\cdot 0 + 20\cdot 40 = 800$
$(40;\ 0)$	$50\cdot 40 + 20\cdot 0 = 2\,000$
$(20;30)$	$50\cdot 20 + 20\cdot 30 = 1\,600$

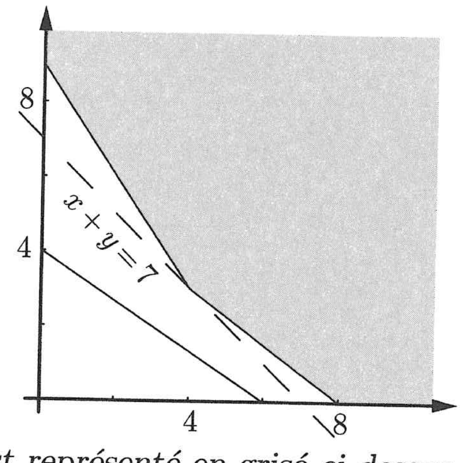
Ainsi, la valeur maximale $P = 2\,000$ est atteinte pour $x = 40$ et $y = 0$. Le profit maximal de 2 000 francs est donc réalisé avec 40 boîtes de type A et 0 boîte de type B.

Exemple 2

On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrates de carbone et 2 400 calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte 1 franc et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrates de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte 1 franc et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrates de carbone et 400 calories. Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique?

Si x désigne le nombre de doses du produit A et y le nombre de doses du produit B, le problème ci-dessus revient à trouver la valeur minimum de l'expression $P = x + y$ avec les contraintes suivantes:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 15\,x + 10\,y & \geq & 90 \\ 20\,x + 30\,y & \geq & 120 \\ 300\,x + 400\,y & \geq & 2\,400 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$



Le domaine défini par les contraintes est représenté en grisé ci-dessus.

On remarque que la contrainte $20\,x+30\,y \geq 120$ est satisfaite si les autres le sont.

Comme $P = x+y \Leftrightarrow y = -x+P$ est une droite de pente -1, on obtient une famille de droites parallèles correspondant chacune à une valeur fixée de P. Plus ces droites sont proches de l'origine du repère $(0\,;0)$, plus P diminue. En effet, P est l'ordonnée de l'intersection d'une telle droite avec l'axe Oy. On va chercher la droite la plus proche de $(0\,;0)$ qui contient un point du domaine. Cette droite réalisera le minimum de P sur le domaine et on observe alors que ce minimum est forcément atteint sur un sommet du domaine. Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du domaine.

On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x\,;y)$	Valeur de $P = x + y$
$(0\,;9)$	$0 + 9 = 9$
$(8\,;0)$	$8 + 0 = 8$
$(4\,;3)$	$4 + 3 = 7$

Ainsi, le coût minimal $P = 7$ est atteint pour $x = 4$ et $y = 3$. Cette ration contient $4 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 90$ g de protéines, $4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 170$ g d'hydrates de carbone et $4 \cdot 300 + 3 \cdot 400 = 2\,400$ calories.

8.3 Exercices

1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a) $x + 3y \geq 15$ b) $2x + 5y \leq 20$

c) $3x + 7y \geq 63$ d) $6x + 5y \leq 120$

2. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes.

a) $\begin{cases} 12x + 5y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 7y \geq 35 \\ 2x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 9y \leq 90 \\ 4x + y \leq 48 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 5y \geq 30 \\ x + y \geq 10 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3. Une fabrique d'automobiles construit deux modèles A et B. Chaque jour, elle peut produire au maximum 600 voitures A et 300 voitures B, mais en raison d'un manque de personnel, elle ne peut produire plus de 750 voitures en tout. Le bénéfice est de CHF 1 200.– pour une voiture du modèle A et de CHF 1 800.– pour une voiture du modèle B.

a) Combien de voitures de chaque modèle doit-elle produire pour que le bénéfice soit maximum ?

b) Comment se modifie cette situation si la production du modèle B ne peut dépasser la moitié de celle du modèle A ?

4. Un grossiste distribue chaque jour à diverses boucheries 17 800 kg de viande fraîche et 11 000 kg de viande congelée. Pour cette distribution, il dispose de deux types de camions A et B. Un camion de type A peut transporter 600 kg de viande fraîche et 300 kg de viande congelée ; un camion de type B peut transporter 500 kg de viande fraîche et 400 kg de viande congelée. Avec un camion de type B, le transport coûte 120 % de ce qu'il est avec un camion de type A. Combien de camions de chaque type doit-il utiliser pour minimiser les frais de transport ?

5. Trois dépôts de bois brut D_1, D_2 et D_3 contiennent respectivement 500 t , 400 t et 360 t de bois. L'ensemble de ce bois doit être distribué en parts égales à deux scieries S_1 et S_2 de telle sorte que les frais de transport soient minimum. Ces frais sont donnés en francs par tonne dans le tableau suivant.

	D_1	D_2	D_3
S_1	50	60	80
S_2	70	50	40

Comment faut-il organiser cette distribution ?

6. Une entreprise chimique livre deux types de mélanges P et T obtenus à partir des trois éléments A, B et C selon les pourcentages et prix de production donnés par le tableau ci-dessous. Calculer les quantités de mélanges P et T à produire pour satisfaire les besoins en produits A, B et C donnés dans le tableau suivant à un prix minimum.

	P	T	Besoins (kg)
A	20 %	40 %	≥ 7
B	30 %	50 %	≥ 2
C	50 %	10 %	≥ 5
Prix par kg	10	5	

7. Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois: chêne, pin et noyer. Dans le tableau suivant, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaires à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponibles.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210
Pin	5	2.5	180
Noyer	6	5	240

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si

a) il gagne CHF 1 000.– par armoire et CHF 900.– par table ;

b) il gagne CHF 1 200.– par armoire et CHF 1 000.– par table.

8. Une compagnie produit deux types de fertilisants A et B livrés en sacs de 100 kg. Les pourcentages en nitrate, phosphate et potasse ainsi que les profits pour chaque type sont donnés dans le tableau ci-dessous avec les quantités disponibles de nitrate, phosphate et potasse. Calculer les quantités de fertilisants de chaque type à produire pour maximiser le profit en tenant compte de la disponibilité des matières premières.

	A	B	Disponible (kg)
Nitrate	20 %	10 %	≤ 700
Phosphate	5 %	15 %	≤ 400
Potasse	5 %	10 %	≤ 400
Profit par sac	18	12	

9. Pierre projette un voyage de 8 000 km qu'il parcourra en train, en autobus et en bateau. Les prix et les vitesses de déplacement sont donnés par le tableau suivant.

	Bateau	Autobus	Train
Prix au km en CHF	0.15	0.20	0.25
Vitesse en km/h	30	40	80

Il veut parcourir au moins 3 000 km en bateau, et ne désire pas voyager plus en train qu'en autobus. Quelles distances doit-il parcourir avec chaque moyen de transport s'il veut que le prix total de son voyage ne dépasse pas CHF 1 500.– et que sa durée soit minimum ?

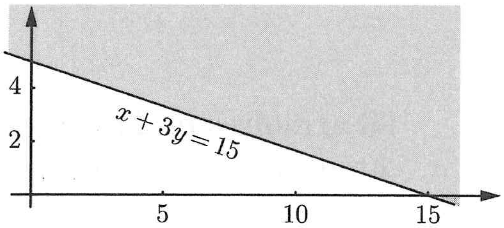
10. Une entreprise vend trois types de boîtes de fruits séchés : la boîte de luxe, la boîte spéciale et la boîte suprême. Les quantités (en kg) de fruits par boîte et les profits respectifs (en CHF) sont donnés dans le tableau ci-dessous avec les disponibilités des différents fruits.

	Abricots	Pommes	Raisins	Profit
de luxe	1	2	1	2.50
spéciale	2	1	1	2.–
suprême	1.5	1.5	1	2.25
disponible	≤ 300	≤ 350	≤ 400	

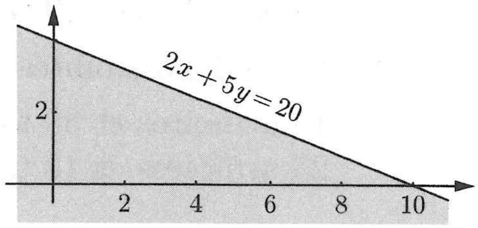
Calculer le nombre de boîtes de chaque type que l'entreprise doit produire pour maximiser le profit.

8.4 Réponses aux exercices du chapitre 8

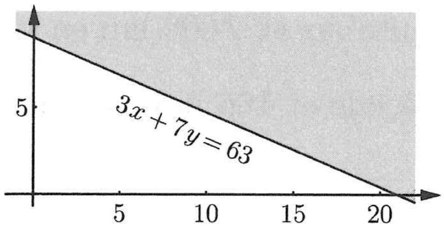
1. a)



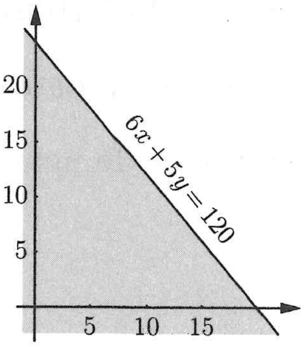
b)



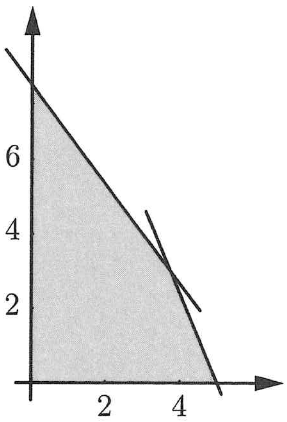
c)



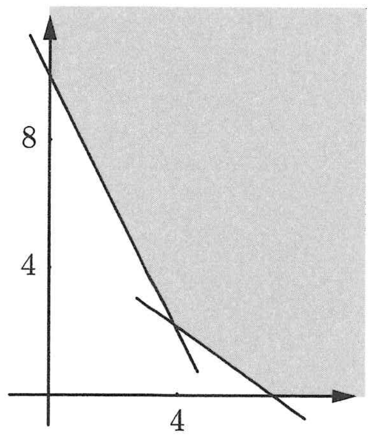
d)



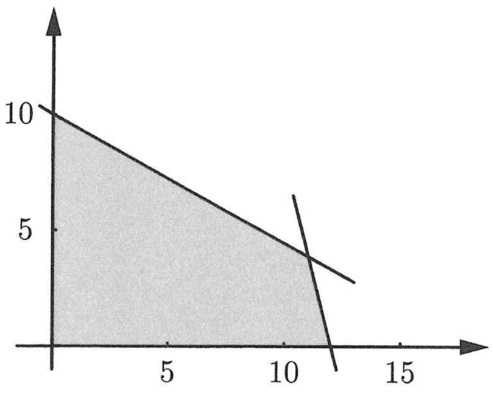
2. a)



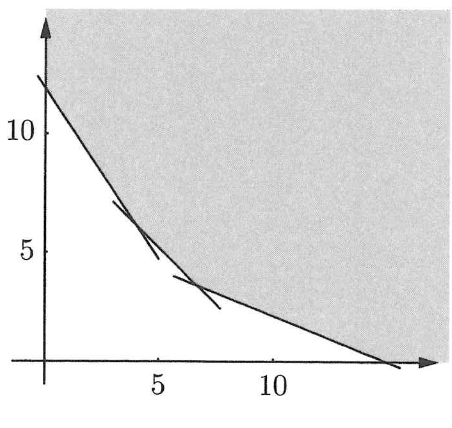
b)



c)



d)



3. a) 450 voitures du modèle A et 300 voitures du modèle B

b) 500 voitures du modèle A et 250 voitures du modèle B

4. 18 camions de type A et 14 camions de type B

5. 500 t du dépôt D_1 et 130 t du dépôt D_2 à la scierie S_1

6. $\frac{65}{9} \cong 7.2$ kg du mélange P et $\frac{125}{9} \cong 13.9$ kg du mélange T

7. a) 15 armoires et 30 tables

b) Il y a 4 possibilités :

15 armoires et 30 tables	20 armoires et 24 tables
25 armoires et 18 tables	30 armoires et 12 tables

8. 26 sacs du fertilisant A et 18 sacs du fertilisant B

9. 4 000 km en bateau, 2 000 km en autobus et 2 000 km en train

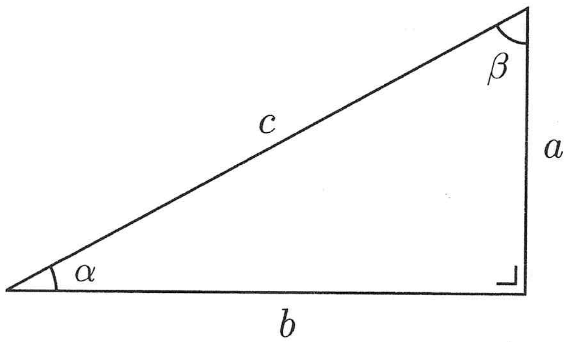
10. 50 boîtes de luxe, aucune boîte spéciale et 166 boîtes suprême

9. Trigonométrie

9.1 Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les rapports de deux côtés ne dépendent que de l'angle α.

Par conséquent, on définit les rapports suivants en fonction de l'angle α.



sinus défini par $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

cosinus défini par $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

tangente défini par $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Ces rapports sinus, cosinus et tangente définissent les **fonctions trigonométriques** pour les angles aigus.

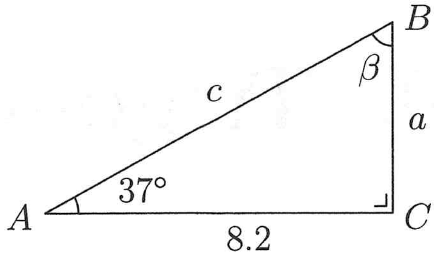
Résolution de triangles

Résoudre un triangle consiste à calculer les éléments non donnés (côtés et angles).

On s'aidera de la machine pour le calcul des fonctions trigonométriques.

Exemple 1

Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté $b = 8.2$ *et l'angle* $\alpha = 37°$.



On obtient d'abord $\beta = 90° - \alpha = 53°$.

Comme $\tan(37°) = \dfrac{a}{8.2}$, *on obtient avec la machine*

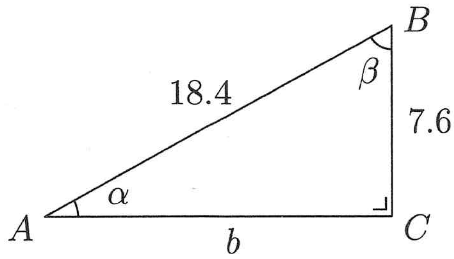
$$a = 8.2 \cdot \tan(37°) \cong 6.2$$

Comme $\cos(37°) = \dfrac{8.2}{c}$, *on obtient avec la machine*

$$c = \frac{8.2}{\cos(37°)} \cong 10.3$$

Exemple 2

Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté $a = 7.6$ *et l'hypoténuse* $c = 18.4$.



On obtient d'abord

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{18.4^2 - 7.6^2} \cong 16.8$$

Puis, comme $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{7.6}{18.4}$,
on obtient avec la machine $\alpha \cong 24.4°$.
Enfin $\beta = 90° - \alpha \cong 65.6°$.
On aurait pu aussi calculer β *en utilisant* $\cos(\beta) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{7.6}{18.4}$.

Avec la machine, on obtient également $\beta \cong 65.6°$.

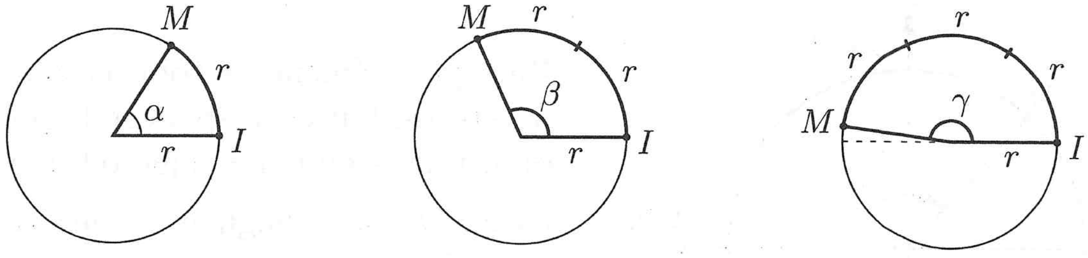
9.2 Mesure des angles

Dans l'Antiquité, pour simplifier les problèmes de partage d'angles, on a divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales, appelées **degrés**.

Ce choix se justifiait par le fait que 360 a un grand nombre de diviseurs. En effet, 360 est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 et 180.

Ce choix n'est pas toujours pratique. Une autre façon de mesurer un angle serait de prendre la longueur de l'arc correspondant. Toutefois cette longueur dépend du rayon du cercle.

La longueur d'un arc de cercle déterminé par un angle au centre étant proportionnelle au rayon du cercle, on dit que la mesure d'un angle est de 1 **radian** si la longueur de l'arc correspondant est égale au rayon du cercle.



$\alpha = 1$ radian $\qquad \beta = 2$ radians $\qquad \gamma = 3$ radians

Relation entre degrés et radians

La circonférence du cercle de rayon r étant égale à $2\pi r$, on a :

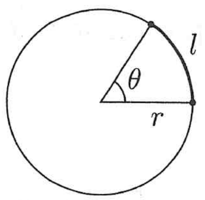
$$\begin{array}{rclcl} 360^\circ & \leftrightarrow & 2\pi \text{ radians} & \cong & 6.28 \text{ radians} \\ 180^\circ & \leftrightarrow & \pi \text{ radians} & \cong & 3.14 \text{ radians} \\ 1^\circ & \leftrightarrow & \dfrac{\pi}{180} \text{ radian} & \cong & 0.0175 \text{ radian} \end{array}$$

Un angle de 1 radian correspond à un angle de $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \cong 57.2958^\circ$.

Longueur d'arc de cercle et aire de secteur circulaire

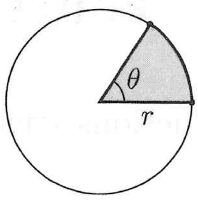
Considérons un cercle de rayon r et un angle au centre de θ radians.

D'après la définition du radian, la longueur l de l'arc correspondant à l'angle θ est donnée par



$$l = r\theta$$

De même, l'aire S du secteur circulaire correspondant à l'angle θ est donnée par



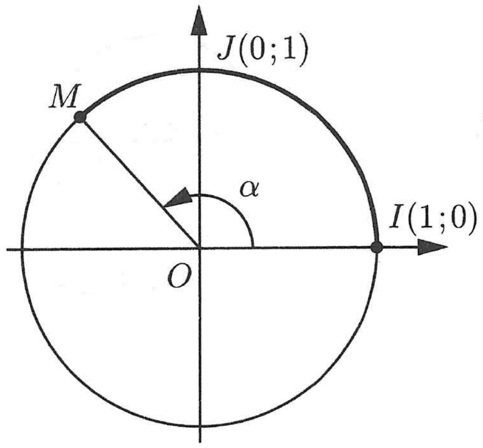
$$S = \tfrac{1}{2}\,r^2\theta$$

Cercle trigonométrique

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Dans ce cas, un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur 1 et un angle de θ radians correspond à un arc de longueur θ .

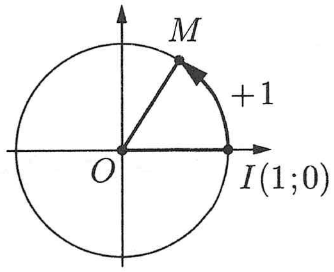
Nous allons ¡¡enrouler la droite réelle autour du cercle trigonométrique ¿¿ de manière à visualiser tout nombre réel comme la mesure en radians d'un angle.



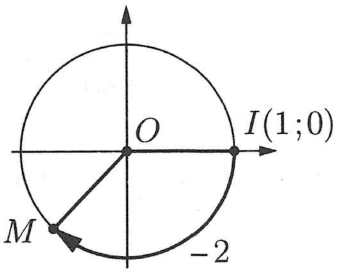
Plus précisément, à tout nombre réel $\alpha > 0$, on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique tel que l'arc $\overset{\frown}{IM}$ a une longueur égale à α et est orienté positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Si $\alpha < 0$, l'arc est orienté négativement.

Le nombre α est donc une **mesure en radians** de l'angle $\widehat{IOM}$. Cette mesure en radian d'un angle est la longueur de l'arc correspondant sur le cercle trigonométrique et s'écrit sans unité.



$\widehat{IOM} = 1$



$\widehat{IOM} = -2$ ou $2\pi - 2$

Un angle possède plusieurs mesures en radians qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π (circonférence du cercle trigonométrique).

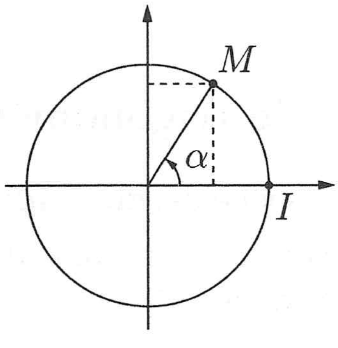
9.3 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont définies à l'aide des figures suivantes.

Considérons le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle α.

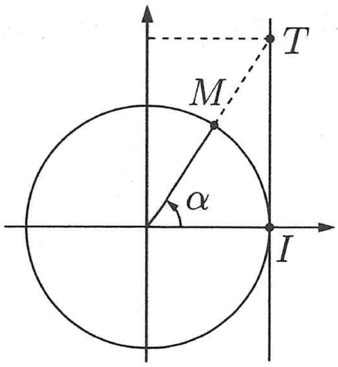
Le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$, est la première coordonnée ou abscisse de M.

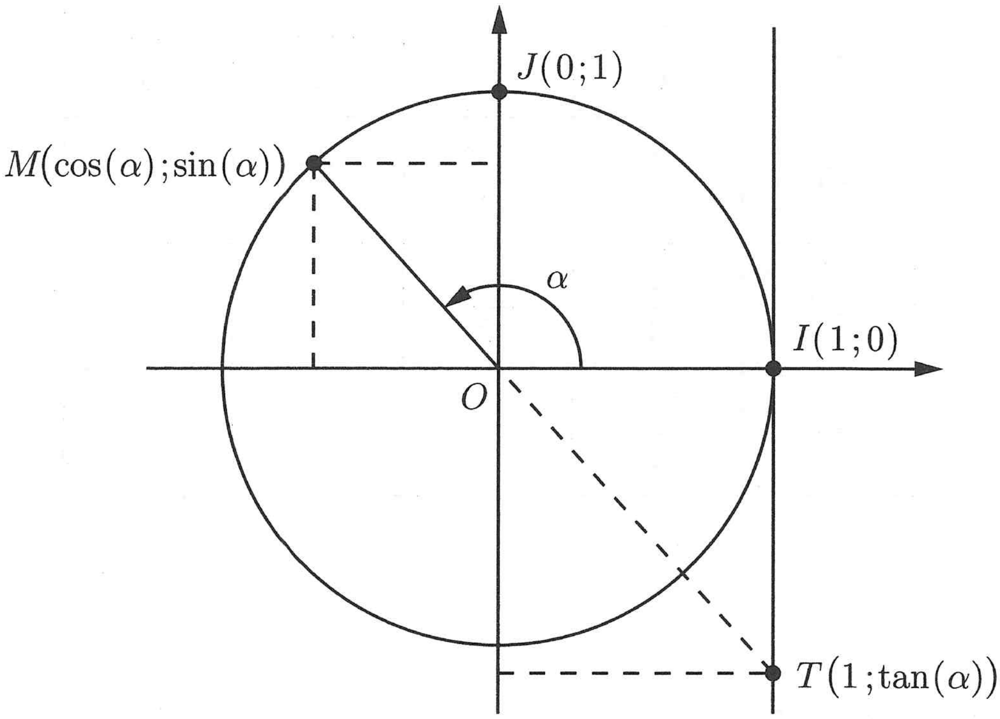
Le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, est la deuxième coordonnée ou ordonnée de M.



Considérons le point d'intersection T de la droite OM avec la tangente au cercle en I.

La **tangente** de α, notée $\tan(\alpha)$, est l'ordonnée de T.





Lorsque l'angle α est aigu, on retrouve les fonctions trigonométriques définies dans le triangle rectangle.

Relations fondamentales

A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

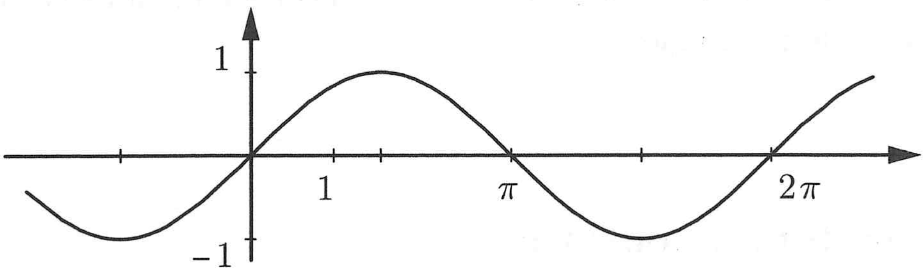
A l'aide du théorème de Thalès, on obtient

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

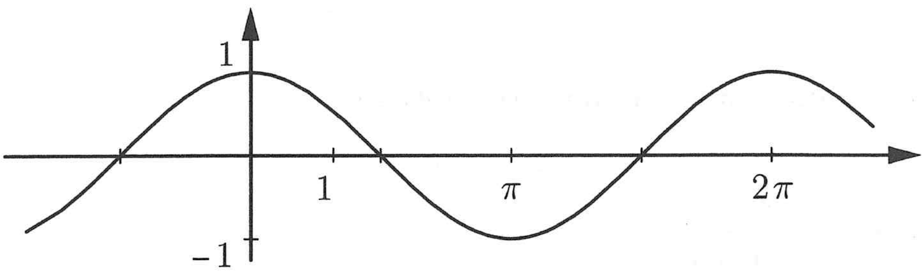
Valeurs particulières

degrés	radians	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

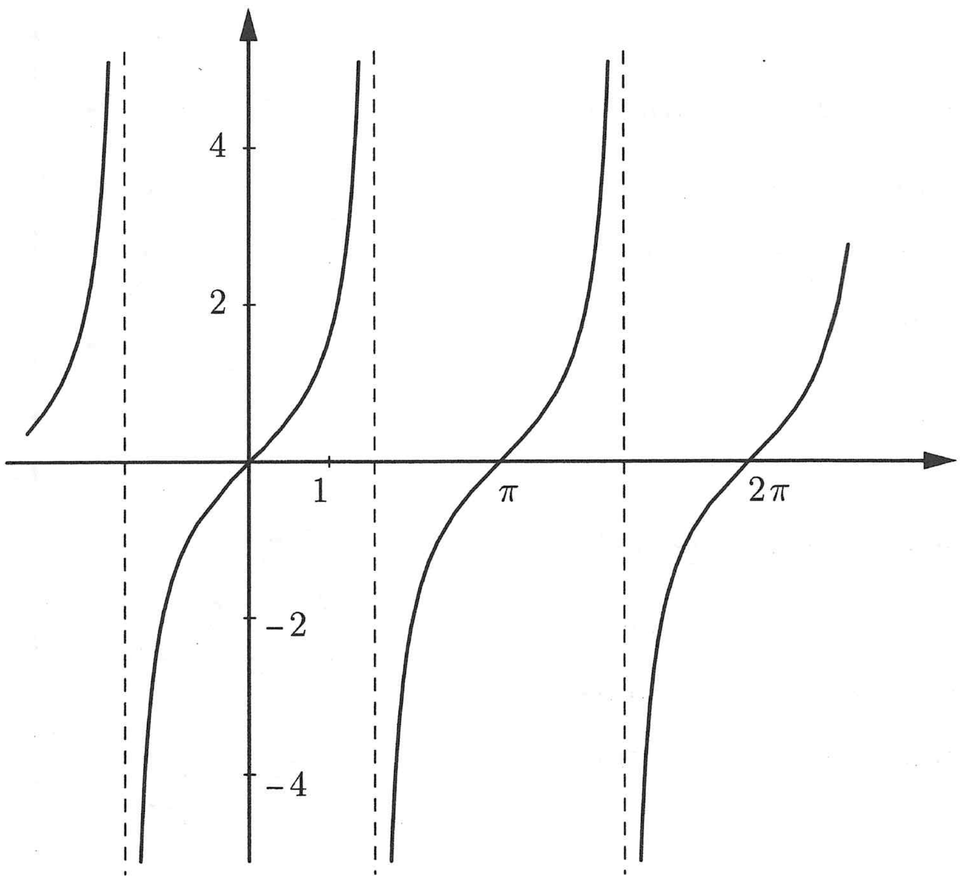
Graphe de la fonction sinus



Graphe de la fonction cosinus



Graphe de la fonction tangente



9.4 Propriétés des fonctions trigonométriques

Périodicité

En considérant la figure de la page 153, on constate que l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de 2π ne change pas le point M sur le cercle trigonométrique. De même, l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de π ne change pas le point T. Ainsi, par définition des fonctions trigonométriques, on a

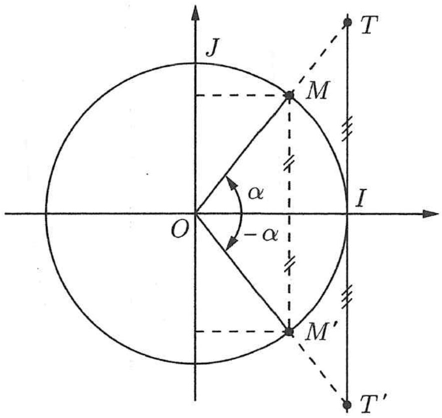
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + k \cdot 2\,\pi) &= \cos(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\\ \sin(\alpha + k \cdot 2\,\pi) &= \sin(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\\ \tan(\alpha + k \cdot \pi) &= \tan(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période $2\,\pi$ et que la fonction tangente est **périodique** de période π .

Symétries

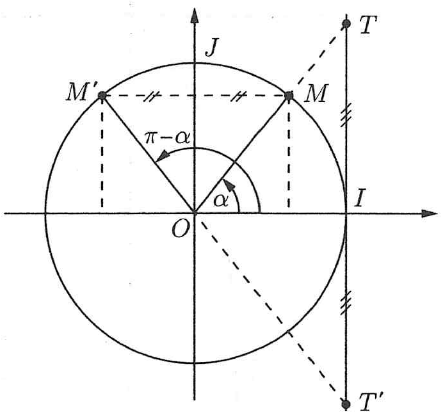
Symétrie d'axe horizontal

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



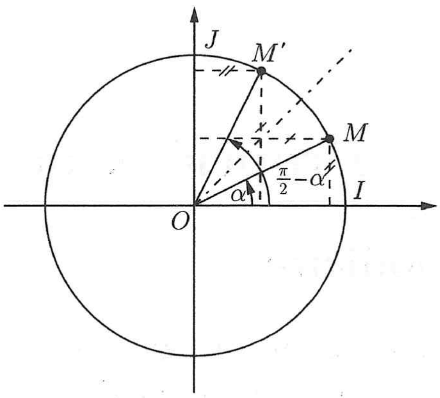
Symétrie d'axe vertical

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



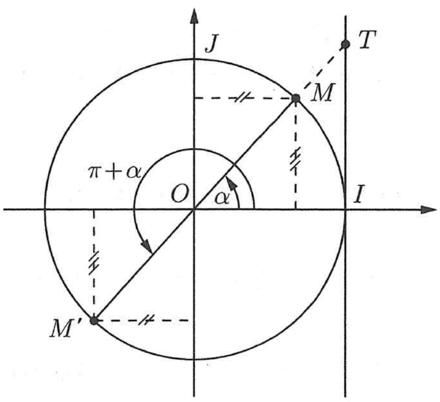
Symétrie dont l'axe est la 1re bissectrice[1]

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$



Symétrie de centre O

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$$



---

[1] Ces formules justifient le nom de la fonction cosinus comme le sinus de l'angle complémentaire

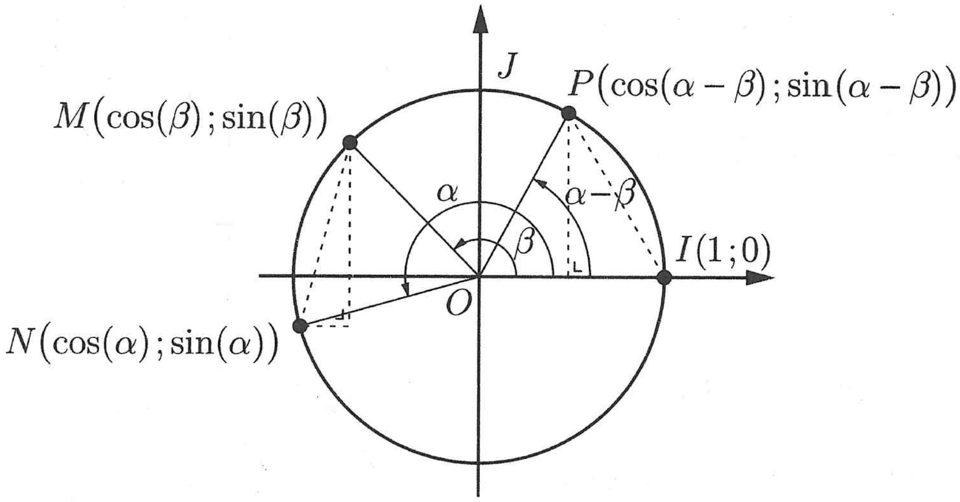
Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

On démontre[2] en premier lieu que :

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

en utilisant l'égalité des distances MN et IP.



En effet,

$$\begin{aligned}MN^2 &= \big(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)-\sin(\beta)\big)^2\\ &= \cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin^2(\alpha)\\ &\qquad +\sin^2(\beta)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IP^2 &= \big(\cos(\alpha-\beta)-1\big)^2 + \big(\sin(\alpha-\beta)\big)^2\\ &= \cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

En remplaçant β par $-\beta$, on obtient la première formule d'addition.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \cos\left((\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)\\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

[2]Cette preuve est due à Carl Friedrich GAUSS, mathématicien allemand (1777–1855)

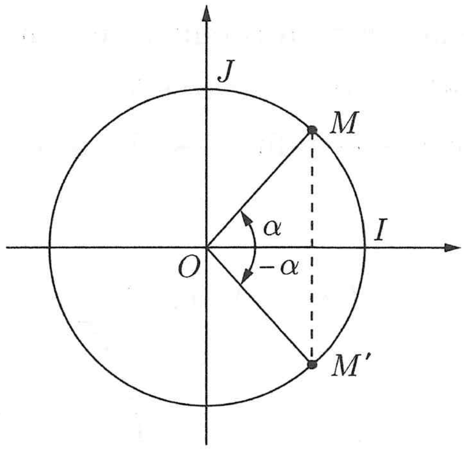
9.5 Equations trigonométriques

Equations simples

$$\cos(x) = \cos(\alpha)$$

On a deux familles de solutions :

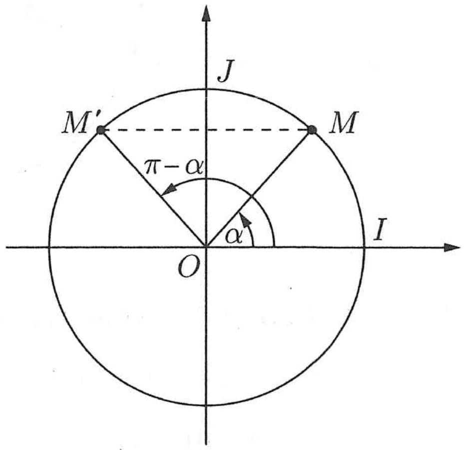
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\alpha + k \cdot 2\pi \,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\sin(x) = \sin(\alpha)$$

On a deux familles de solutions :

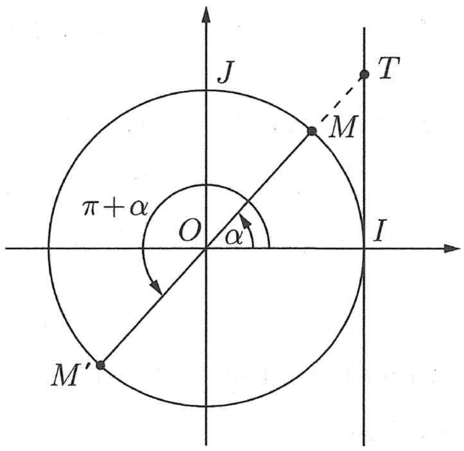
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\tan(x) = \tan(\alpha)$$

On a une famille de solutions :

$$x = \alpha + k \cdot \pi \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Exemple 1

Résoudre l'équation $2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$
On a $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ *et comme* $-\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$, *on obtient*

$$\sin(3x + \tfrac{\pi}{6}) = \sin(-\tfrac{\pi}{6})$$

On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 3\,x_1 + \frac{\pi}{6} = \quad -\frac{\pi}{6} \quad + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ 3\,x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\,x_1 = -\frac{2\,\pi}{6} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ 3\,x_2 = \quad \pi \quad + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\,\pi}{3}\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \quad \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\,\pi}{3}\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple 2

Résoudre l'équation $\cos(\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}) = 1$
Comme $1 = \cos(0)$ *, on a* $\cos(\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}) = \cos(0)$

On a une famille de solutions :

$$\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4} = \pm 0 + k \cdot 2\,\pi = k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}\,x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 4\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 3

Résoudre l'équation $\cos(2\,x) = \sin(3\,x)$
On utilise les formules de symétrie dont l'axe est la 1re bissectrice pour se ramener à une équation simple.

$$\cos(2\,x) = \sin(3\,x)$$

$$\cos(2\,x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3\,x)$$

On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 2\,x_1 = \quad \frac{\pi}{2} - 3\,x_1 \quad + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ 2\,x_2 = -(\frac{\pi}{2} - 3\,x_2) + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\,x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\,\pi}{5}\,, \; k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\,\pi\,, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Equations en $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$

On présentera pour chaque exemple une méthode de résolution. D'autres méthodes sont possibles.

Exemple

Résoudre l'équation $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
A l'aide de la relation fondamentale $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, *on se ramène tout d'abord à une équation du deuxième degré en* $\sin(x)$.

$$2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$2\left(1 - \sin^2(x)\right) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 1 \quad ou \quad \sin(x) = -\tfrac{1}{2}$$

On résout ensuite chacune des deux équations simples :

a) $\sin(x) = 1$

$$x_1 = \tfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_2 = \quad -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Equations du 1^{er} degré en $\sin(x)$ et $\cos(x)$

Exemple

Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$
On va résoudre le système formé de cette équation et de la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *de manière à se ramener à un problème plus simple.*

$$\begin{cases} \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \end{cases}$$

On tire $\cos(x) = 1 - \sqrt{3}\sin(x)$ *de la* 1^{re} *équation et on remplace dans la* 2^{e} *équation.*

$$\left(1 - \sqrt{3}\sin(x)\right)^2 + \sin^2(x) = 1$$

$$3\sin^2(x) - 2\sqrt{3}\sin(x) + 1 + \sin^2(x) = 1$$

$$4\sin^2(x) - 2\sqrt{3}\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \quad ou \quad \sin(x) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

On traite ensuite chacun des deux cas :

a) $\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 1 - \sqrt{3}\,\sin(x) = 1$

On obtient le système $\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$

donc $x_1 = 0 + k \cdot 2\pi\,, \ k \in \mathbb{Z}$

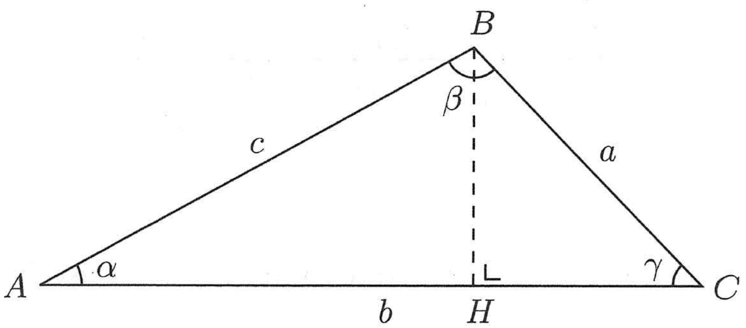
b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 1 - \sqrt{3}\,\sin(x) = -\frac{1}{2}$

On obtient le système $\begin{cases} \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\,, \ k \in \mathbb{Z}$

9.6 Triangle quelconque

Dans ce paragraphe, on considère un triangle quelconque ABC et on désigne ses angles par α, β et γ et ses côtés par a, b et c.



Les théorèmes ci-dessous permettent de résoudre un triangle quelconque.

Théorème de l'aire

$$S = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\gamma) \;=\; \tfrac{1}{2}\,b\,c\,\sin(\alpha) \;=\; \tfrac{1}{2}\,a\,c\,\sin(\beta)$$

Le théorème de l'aire se démontre en observant que la hauteur issue de B est égale à $a \cdot \sin(\gamma)$, et par suite que

$$S = \tfrac{1}{2}\ \text{base} \cdot \text{hauteur} = \tfrac{1}{2}\ b \cdot a \cdot \sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}\ a\,b\,\sin(\gamma)$$

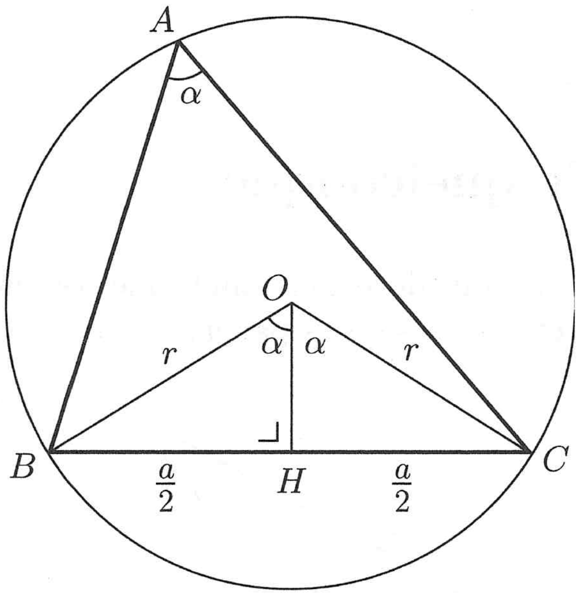
Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,r$$

où r est le rayon du cercle circonscrit.

Les deux premières égalités résultent immédiatement du théorème de l'aire en comparant les trois manières de calculer cette aire.

L'égalité $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = 2\,r$ peut s'observer dans le triangle OBH de la figure suivante où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



On peut en conséquence aussi exprimer l'aire S sous les formes suivantes.

$$S = 2\,r^2\,\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) = \frac{a\,b\,c}{4\,r}$$

Théorème du cosinus

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)\\
b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,a\,c\cos(\beta)\\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)
\end{aligned}$$

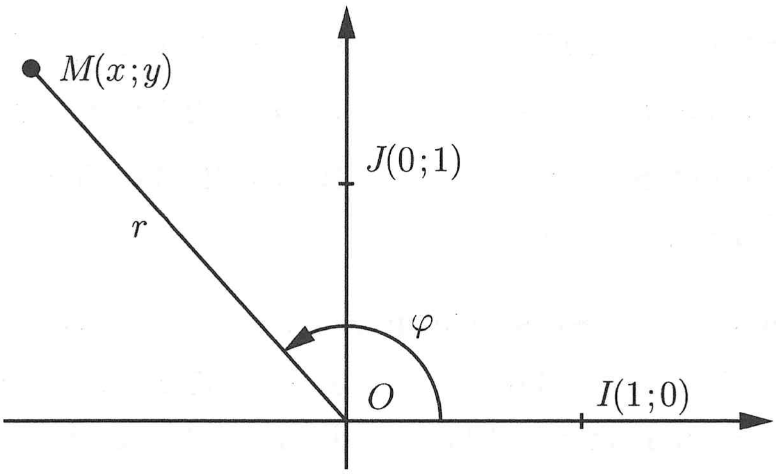
On applique le théorème de Pythagore au triangle ABH de la figure de la page 161.

Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.

9.7 Coordonnées polaires

Pour décrire un point M de coordonnées cartésiennes $M(x\,;y)$, on peut donner la distance r de M à l'origine O et une mesure φ de l'angle $\widehat{IOM}$.

Le point M est alors donné par ses **coordonnées polaires** $M\,[\,r\,;\varphi\,]$.



On obtient les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires par les relations suivantes.

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

Réciproquement, on obtient les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x}{r} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

La formule $\tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$ permet de déterminer l'angle φ à 180° près.

Le signe de x et de y permet de lever l'indétermination.

9.8 Exercices

1. Un triangle ABC est rectangle en C. Résoudre ce triangle connaissant

a) $c = 4.25$ et $\beta = 67.2°$ b) $c = 11.81$ et $\alpha = 42.35°$

c) $c = 22.77$ et $a = 13.29$ d) $c = 17.93$ et $b = 5.05$

e) $a = 4.85$ et $\alpha = 52.37°$ f) $a = 91.7$ et $\beta = 25.8°$

g) $b = 8.2$ et $\beta = 20.7°$ h) $b = 32.5$ et $\alpha = 31.2°$

i) $a = 21.5$ et $b = 45.8$ j) $a = 12.7$ et $b = 2.8$

k) $b = 39.5$ et $S = 987.2$ l) $a = 2.73$ et $S = 8.54$

m) $\alpha = 39.5°$ et $S = 10.2$

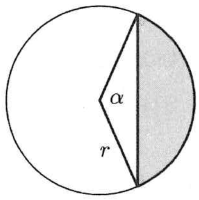
2. Un triangle ABC est isocèle en A. Résoudre ce triangle connaissant

a) $\alpha = 42.5°$ et $a = 23.6$ b) $\alpha = 95.2°$ et $b = c = 6.3$

c) $\beta = \gamma = 56.3°$ et $a = 10.3$ d) $\alpha = 52.8°$ et $S = 617.6$

3. Un triangle ABC est isocèle en A. Déterminer la base a et l'aire S de ce triangle en fonction de l'angle α et du côté $b = c$.

4. Exprimer l'aire de la surface grisée en fonction de r et de α (où α est exprimé en radians).



5. L'ombre d'une tour mesure 42 m lorsque le soleil est élevé de 35.5° au-dessus de l'horizon. Calculer la hauteur de la tour.

6. Une route s'élève régulièrement en formant un angle de 4.8° avec l'horizontale.

a) Quelle distance horizontale parcourt-on lorsqu'on a suivi la route sur 6.4 km ?

b) De combien de mètres s'est-on élevé ?

7. Une tour circulaire de 25 m de diamètre est vue sous un angle horizontal de 20°.

A quelle distance du point le plus proche de la tour se trouve-t-on ?

8. Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de 41.2°. Il recule de 25 m et voit l'arbre sous un angle de 22.1° (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a) Quelle est la hauteur de l'arbre ?

b) A quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?

9. Déterminer la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62 mètres quand l'élévation du soleil au-dessus de l'horizon passe de $52°$ à $23.5°$.

10. Un observateur aperçoit un arbre de l'autre côté d'une rivière, juste en face et sous un angle d'élévation de $33°$. Il se déplace de 40 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de $20°$. Calculer la largeur de la rivière et la hauteur de l'arbre.

11. Un observateur, placé à une altitude de 252 m au-dessus de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon faisait un angle de $89.49°$ avec la verticale. On demande de calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

12. La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle $230°$.

a) Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 13 m.

b) Calculer la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

13. Deux observateurs situés à la même altitude et distants de 1 580 m mesurent au même moment la hauteur d'un point remarquable d'un nuage situé entre eux. Ce point est dans le plan vertical contenant les deux observateurs et les angles d'élévation sont de $65.6°$ et $77.1°$.

Quelle est la hauteur du point remarquable du nuage ?

14. Un cercle de rayon 4 est inscrit dans un losange $ABCD$ dont on donne la diagonale $AC = 15$.

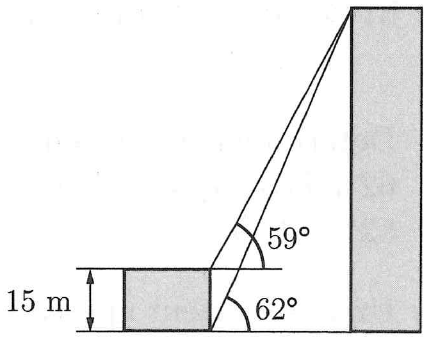
Calculer ses angles α et β, son côté c et sa diagonale BD.

15. On considère un triangle isocèle dont la base vaut 10 et l'angle au sommet $36°$. Calculer le rayon r de son cercle circonscrit et le rayon ρ de son cercle inscrit.

16. Un parc a la forme d'un hexagone régulier de 2 km de côté. Alice marche le long du périmètre du parc et parcourt 5 km. A quelle distance (en ligne droite) de son point de départ se trouve-t-elle ?

17. Déterminer l'angle aigu formé par deux diagonales d'un cube.

18. En observant un gratte-ciel du sommet d'une maison haute de 15 m, l'angle d'élévation est de 59°.
Si on l'observe depuis la route à côté de la maison, l'angle d'élévation est de 62°.



a) Calculer la distance d entre les deux constructions.

b) Calculer la hauteur h du gratte-ciel.

19. On considère deux losanges semblables $ABCD$ et $AECF$ ayant une diagonale commune AC.

a) Connaissant leur diagonale $AC = 6$ et l'angle $\widehat{ABC} = 60°$, calculer leurs côtés ainsi que les diagonales BD et EF.

b) Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$ pour que les côtés du losange $ABCD$ soient le double de ceux du losange $AECF$.

c) Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$ pour que l'aire du losange $ABCD$ soit le double de celle du losange $AECF$.

20. Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\frac{\pi}{6}$	b) $\frac{2\pi}{3}$	c) $\frac{\pi}{10}$	d) 4π	e) $-\frac{5\pi}{6}$
f) $\frac{15\pi}{4}$	g) 1	h) 0.7	i) -2	j) 3

21. Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) 45°	b) 60°	c) 75°	d) $-30°$	e) 120°
f) 315°	g) 22.7°	h) $-107.9°$	i) 292.3°	j) 152.5°

22. Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de 1° mesure 3 mm.

b) un arc de 0.03° mesure 0.05 mm.

23. Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de 32° sur un cercle de rayon 15 cm.

b) de 2 radians sur un cercle de rayon 7 cm.

24. Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance[3] sachant que le rayon de la terre est de 6 370 km ?
Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

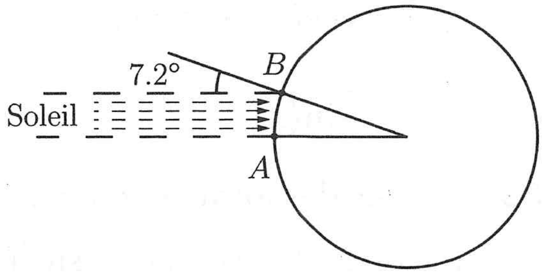
[3]Cette distance définit le mille nautique.

25. Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 46°37 'N et 47°25' N. Calculer la distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ entre ces deux villes.

26. Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est 46°14' N, calculer la latitude de Delémont.

27. Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 49°45' N et 40°15' N. Calculer la distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ entre ces deux villes[4].

28. Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale un angle de 7.2°.



En déduire la circonférence et le rayon terrestre[5].

29. Activité grapheur

Tracer les graphes des fonctions suivantes et en déduire la période.

Pour vérifier qu'une fonction f est de période T (ou d'un multiple de T), il est possible de tracer le graphe de $f(x+T)-f(x)$.

$f(x) = \sin(3\,x)$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2\,x)$

$h(x) = f(x) - g(x)$ $\qquad$ $j(x) = \dfrac{1}{3}\sin\left(5\,x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$k(x) = h(x) + j(x)$ $\qquad$ $l(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\,x}{5}\right)$

$m(x) = f(x) + l(x)$ $\qquad$ $n(x) = \sin\left(\dfrac{2\,x}{5}\right) + \sin\left(\dfrac{5\,x}{2}\right)$

[4]La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre (1799).

[5]Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284 –195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

30. Donner la période, puis esquisser le graphe pour $x \in [-2\,\pi\,;2\,\pi]$ de chacune des fonctions suivantes.

$a(x) = \sin(2\,x)$ $\qquad$ $b(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$c(x) = 5\,\cos(3\,x)$ $\qquad$ $d(x) = 5\,\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$e(x) = 3\,\sin\left(2\,x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{2}\,\sin\left(\frac{1}{3}\,x - \frac{3\,\pi}{2}\right)$

31. A partir des graphes des fonctions sinus et cosinus, esquisser le graphe pour $x \in [-2\,\pi\,;2\,\pi]$ de chacune des fonctions suivantes.

$a(x) = x \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $b(x) = x + \sin(x)$

$c(x) = \cos(x) + \sin(x)$ $\qquad$ $d(x) = \sin^2(x)$

$e(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ $\qquad$ $f(x) = x^2 \cdot \sin(2\,x)$

32. A l'aide des formules d'addition, démontrer les formules de duplication.

a) $\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) $\sin(2\,x) = 2\,\sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $\tan(2\,x) = \dfrac{2\,\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

33. A l'aide des formules de duplication, établir les formules de bissection.

a) $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2\,x)}{2}$ $\qquad$ b) $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2\,x)}{2}$

34. A partir des valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 30° et 45°,

a) déterminer les valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 75° et 15° en utilisant les formules d'addition ;

b) déterminer les valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 22.5° et 15° en utilisant les formules de bissection.

35. A l'aide des formules d'addition,

a) exprimer $\sin(3\,t)$, $\cos(3\,t)$ et $\tan(3\,t)$ en fonction de $\sin(t)$, $\cos(t)$ et $\tan(t)$;

b) exprimer $\sin(4\,t)$, $\cos(4\,t)$ et $\tan(4\,t)$ en fonction de $\sin(t)$, $\cos(t)$ et $\tan(t)$.

36. Connaissant l'angle au sommet $2\,\alpha$ et la base $2\,a$ d'un triangle isocèle, calculer le rayon r de son cercle circonscrit et le rayon ρ de son cercle inscrit.

37. Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\tan(t) = -0.754$ d) $\cos(t) = -1.43$

e) $\tan(t) = 5.33$ f) $\sin(3\,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\tan(5\,t) = 3.273$ h) $\cos(\frac{t}{2}) = -\frac{1}{2}$

38. Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin(\frac{2\,t}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

c) $\sin(3\,t) = \sin(2\,t)$ d) $\cos(2\,t) = \cos(4\,t)$

e) $\sin(2\,x) = \cos(3\,x + \frac{\pi}{4})$ f) $\sin(\frac{4\,x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$

g) $\tan(3\,x) = \cot(x)$ h) $\cos(2\,t) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4\,t)$

39. Résoudre les équations suivantes.

a) $4\cos^2(t) - 4\cos(t) - 3 = 0$

b) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

c) $3\sin^2(x) + 8\cos(x) + 1 = 0$

d) $3\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

e) $5\sin(x) = 6\cos^2(x)$

f) $\cos(x) = \tan(x)$

g) $8\cos^2(t) + 5\sin(t) - 1 = 0$

h) $\tan^4(t) - 4\tan^2(t) + 3 = 0$

40. Résoudre les équations suivantes.

a) $3\cos(x) + 2\sin(x) = -3$ b) $\sin(t) + 3\cos(t) = 3$

c) $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) = 1$

e) $3\sin(t) + 5\cos(t) = 2$ f) $\sin(2\,x) + 3\cos(2\,x) = 2$

41. Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(t) = 3\,\cos(t)$

b) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - 2\,\sin^2(\alpha) = 0$

c) $\sin^2(t) - 4\,\sin(t)\cdot\cos(t) + 3\,\cos^2(t) = 0$

d) $1 - 2\,\sin(x)\cdot\cos(x) - 2\,\cos^2(x) = 0$

e) $\cos^2(\varphi) + 4\,\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - 5\,\sin^2(\varphi) = 0$

f) $5\,\sin^2(2\,t) + 3\,\sin(t)\cdot\cos(t) - 4 = 0$

42. Résoudre les équations suivantes.

a) $\sin(2\,t) = \tan(t)$

b) $\cos(2\,x) + 2\,\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$

c) $\sin(x)\cdot\cos(2\,x + \frac{\pi}{3}) = \sin^2(x)$

d) $1 + \sin(x) = \cos(2\,x)$

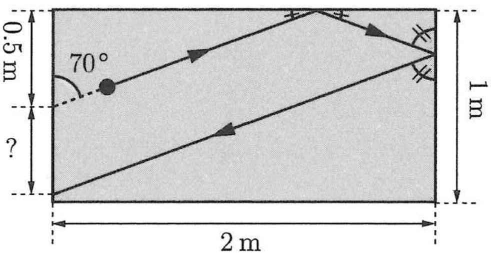
43. Activité grapheur

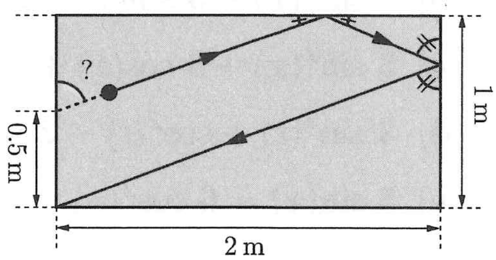
Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a) $\cos(x) - x = 0$ b) $3\,\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) + 2\,x^2 = 0$

44. On lance une boule de billard selon le schéma ci-dessous

a) Où revient la boule ? b) Quel est l'angle de départ ?





45. Résoudre les triangles suivants.

a)	$a = 70.24$	$b = 82.12$	$\gamma = 30,69°$
b)	$a = 85.80$	$c = 57.29$	$\beta = 117.81°$
c)	$a = 85.67$	$\beta = 123.18°$	$\gamma = 24.54°$
d)	$c = 95.05$	$\beta = 37.91°$	$\gamma = 34.61°$
e)	$a = 41.94$	$b = 96.92$	$c = 107.26$
f)	$a = 68.87$	$b = 35.57$	$c = 81.46$

g) $\beta = 30.65°$	$a = 98.06$	$b = 364.04$
h) $\beta = 39.37°$	$a = 460.14$	$b = 335.59$
i) $\gamma = 45.33°$	$b = 371.37$	$c = 323.05$

46. Montrer que l'aire S d'un triangle peut s'exprimer sous les formes

$$S = 2\,r^2 \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) = \frac{a\,b\,c}{4\,r}$$

où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

47. Résoudre un triangle connaissant son aire $S = 12.52$ ainsi que les angles $\alpha = 54.08°$ et $\beta = 88.94°$.

48. D'un parallélogramme $ABCD$, on donne les côtés $AB = 30$, $BC = 20$ et l'angle $\beta = 60°$ en B . Calculer la longueur des diagonales AC et BD , ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

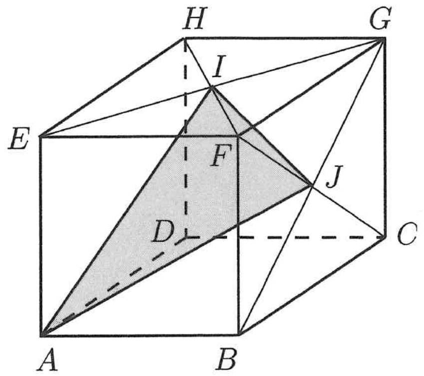
49. D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne les angles $\alpha = 100°$ et $\beta = 70°$, ainsi que les longueurs des côtés $AB = 4.3$, $BC = 6.8$ et $AD = 9.1$. Calculer la longueur du côté CD du quadrilatère.

50. Un point B est inaccessible et invisible d'un point A. Pour déterminer la distance AB, on a choisi deux points C et D alignés avec A et d'où l'on voit les points A et B. On a mesuré les distances $AD = 432.3$ m et $AC = 521.8$ m ainsi que les angles $\widehat{ADB} = 55.3°$ et $\widehat{ACB} = 41.6°$.
Calculer la distance AB

a) lorsque le point A est situé entre C et D ;

b) lorsque le point A n'est pas situé entre C et D .

51. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.
On désigne par I le centre de la face $EFGH$ et par J le centre de la face $BCGF$.
Calculer les angles du triangle AIJ.



52. Calculer les coordonnées cartésiennes des points suivants donnés par leurs coordonnées polaires.

a) $A[6\,;\frac{7\pi}{4}]$ b) $B[4\,;\frac{5\pi}{6}]$ c) $C[2\,;\frac{2\pi}{3}]$

d) $D[5\,;253°]$ e) $E[0.5\,;60°]$ f) $F[3\,;-45°]$

g) $G[7\,;\frac{2\pi}{5}]$ h) $H[1\,;22°]$

53. Calculer les coordonnées polaires des points suivants donnés par leurs coordonnées cartésiennes.

a) $A(-9\,;12)$ b) $B(2\,;-1)$ c) $C(-6\,;-7)$

d) $D(-4\sqrt{3}\,;-12)$ e) $E(-5\,;5)$ f) $F(-2\,;0)$

54. Déterminer les coordonnées des sommets du carré $A'B'C'D'$ obtenu par rotation de 30° autour de l'origine du carré $ABCD$ dont on donne les sommets $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$ et $C(5\,;5)$.

9.9 Réponses aux exercices du chapitre 9

1.

a)	$\alpha = 22.8°$	$a = 1.65$	$b = 3.92$	$S = 3.23$
b)	$\beta = 47.65°$	$a = 7.96$	$b = 8.73$	$S = 34.72$
c)	$b = 18.49$	$\alpha = 35.71°$	$\beta = 54.29°$	$S = 122.86$
d)	$a = 17.20$	$\alpha = 73.64°$	$\beta = 16.36°$	$S = 43.44$
e)	$\beta = 37.63°$	$b = 3.74$	$c = 6.12$	$S = 9.07$
f)	$\alpha = 64.2°$	$b = 44.33$	$c = 101.85$	$S = 2'032.51$
g)	$\alpha = 69.3°$	$a = 21.70$	$c = 23.20$	$S = 88.97$
h)	$\beta = 58.8°$	$a = 19.68$	$c = 38.00$	$S = 319.84$
i)	$c = 50.60$	$\alpha = 25.15°$	$\beta = 64.85°$	$S = 492.35$
j)	$c = 13.01$	$\alpha = 77.57°$	$\beta = 12.43°$	$S = 17.78$
k)	$a = 49.98$	$c = 63.71$	$\alpha = 51.68°$	$\beta = 38.32°$
l)	$b = 6.26$	$c = 6.83$	$\alpha = 23.57°$	$\beta = 66.43°$
m)	$\beta = 50.5°$	$a = 4.10$	$b = 4.97$	$c = 6.45$

2.

a)	$\beta = \gamma = 68.75°$	$b = c = 32.56$	$S = 358.05$
b)	$\beta = \gamma = 42.4°$	$a = 9.30$	$S = 19.76$
c)	$\alpha = 67.4°$	$b = c = 9.28$	$S = 39.77$
d)	$\beta = \gamma = 63.6°$	$b = c = 39.38$	$a = 35.02$

3. $a = 2\,b\,\sin(\frac{\alpha}{2})$ $\quad S = b^2\,\sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})$

4. $r^2\big(\frac{\alpha}{2} - \sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2})\big)$

5. 30 m

6. a) 6 378 m $\quad$ b) 536 m

7. 59.5 m

8. a) 18.9 m $\quad$ b) 21.6 m

9. 40.8 m

10. Largeur de la rivière : 27.1 m $\quad$ Hauteur de l'arbre : 17.6 m

11. 6 361 km

12. a) 7.2 m   b) 10.2 m

13. 2 315 m

14. $\alpha \cong 64.46°$ $\beta \cong 115.54°$ $c \cong 8.87$ $BD \cong 9.46$

15. $r \cong 8.51$ $\rho \cong 3.63$

16. $\sqrt{13} \cong 3.61$ km

17. 70.53°

18. $d \cong 69$ m $h \cong 130$ m

19. a) $AB = 6$ $AE = 2\sqrt{3}$ $BD = 6\sqrt{3}$ $EF = 2\sqrt{3}$
b) 53.13°   c) 70.53°

20. a) 30°   b) 120°   c) 18°   d) 720°   e) −150°
f) 675°   g) 57.3°   h) 40.1°   i) −114.6°   j) 171.9°

21. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $-\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{2\pi}{3}$
f) $\frac{7\pi}{4}$ g) 0.40   h) −1.88   i) 5.10   j) 2.66

22. a) 172 mm   b) 95 mm

23. a) 84 mm   b) 140 mm

24. 1 853 m   Non

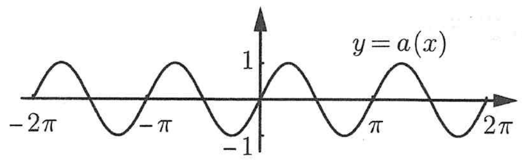
25. 90 km

26. 47°20' N

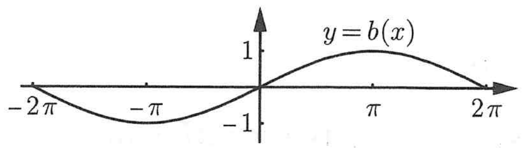
27. 1 056 km

28. Circonférence : 40 000 km   Rayon : 6 370 km

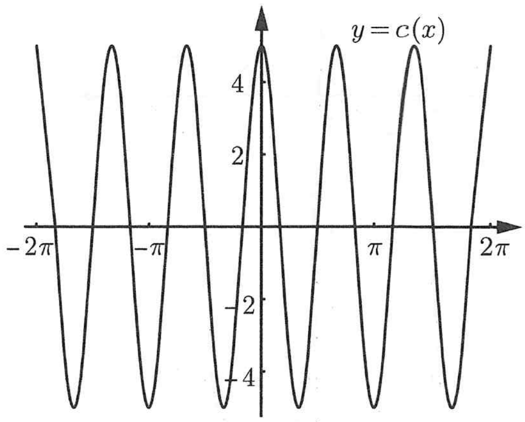
30. Période de $a(x)$: π



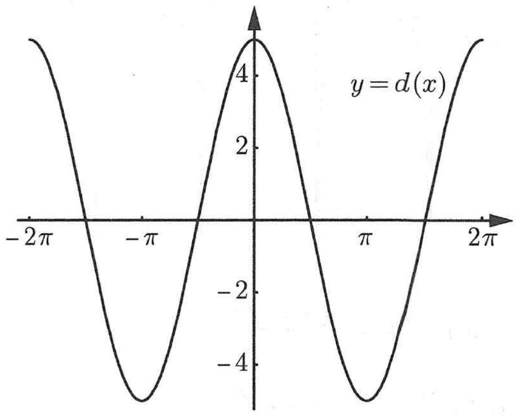
Période de $b(x)$: 4π



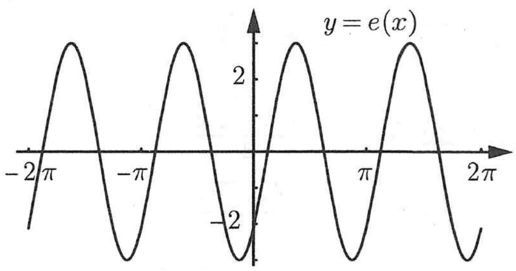
Période de $c(x)$: $\frac{2\pi}{3}$



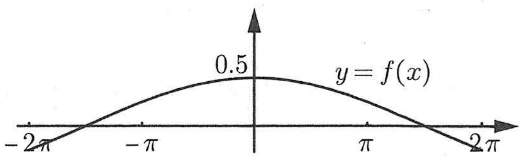
Période de $d(x)$: 2π



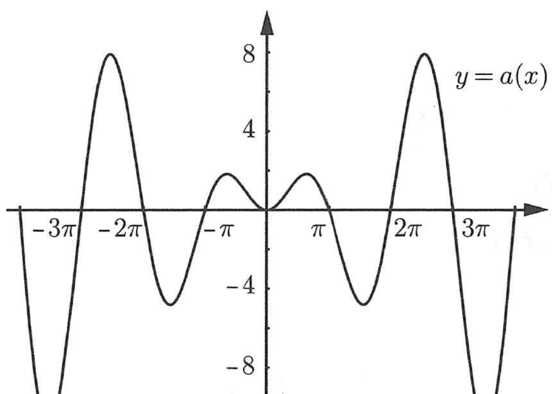
Période de $e(x)$: π

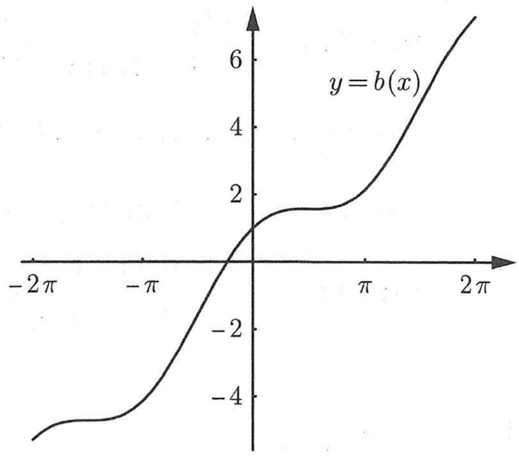


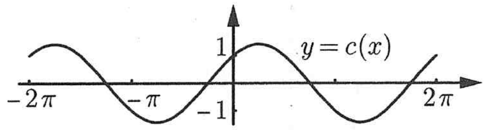
Période de $f(x)$: 6π

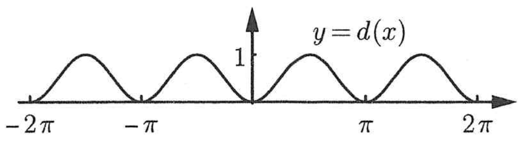


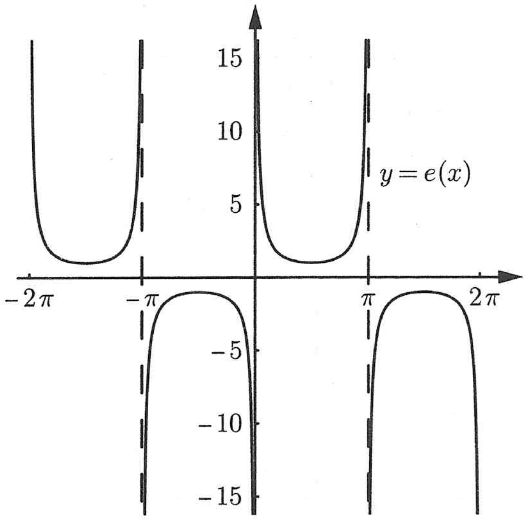
31.

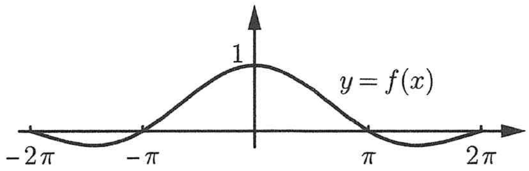












34. a) $\cos(75°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin(75°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\sin(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan(75°) = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$

b) $\cos(22.5°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\cos(15°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sin(22.5°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\sin(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\tan(22.5°) = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\tan(15°) = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

35. a) $\sin(3\,t) = -\sin^3(t) + 3\,\sin(t)\cdot\cos^2(t)$

$\cos(3\,t) = \cos^3(t) - 3\,\sin^2(t)\cdot\cos(t)$

$$\tan(3\,t) = \frac{3\,\tan(t) - \tan^3(t)}{1 - 3\,\tan^2(t)}$$

b) $\sin(4\,t) = 4\,\sin(t)\cdot\cos(t)\,\big(1 - 2\,\sin^2(t)\big)$

$\cos(4\,t) = 1 - 4\,\sin^2(t)\cdot\cos^2(t)$

$$\tan(4\,t) = \frac{4\,\tan(t)\,\big(1 - \tan^2(t)\big)}{1 - 4\,\tan^2(t)}$$

36. $r = \dfrac{a}{\sin(2\,\alpha)}$ $\qquad$ $\rho = a\,\dfrac{1 - \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

37. a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 \cong 56° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 \cong 124° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t \cong -37° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Pas de solution

e) $t \cong 79.4° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -20° + k \cdot 120°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 80° + k \cdot 120°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t \cong 14.6° + k \cdot 36°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 240° + k \cdot 720°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -240° + k \cdot 720°,\ k \in \mathbb{Z}$

38. a) $t_1 = k \cdot 3\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = -\frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -\frac{3\pi}{11} + k \cdot \frac{12\pi}{11}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

39. a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 240° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$x_3 = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = 45° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_3 = 225° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_4 = 315° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = 41.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 138.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 38.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 141.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t_1 = -42.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 222.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_3 = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_4 = -60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

40. a) $x_1 = 180° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 247.4° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 36.87° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 135° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = -90° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 30° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = -39.0° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 100.9° \ + \ k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 34.6° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -16.17° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

41. a) $t = 71.57° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha_1 = k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad \alpha_2 = 26.57° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = 45° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 71.57° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = 67.5° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -22.5° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

e) $\varphi_1 = 45° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad \varphi_2 = -11.31° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = 24.6° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 65.4° \ + \ k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$

42. a) $t_1 = k \cdot 180°, \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 45° \ + \ k \cdot 90°, \ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 67.5° \ + \ k \cdot 90°, \ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = k \cdot \pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}$
$x_3 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = k \cdot \pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$
$x_3 = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

44. a) A 46 cm du milieu du bord gauche

b) 69.44°

45.

a)	$\alpha = 58.79°$	$\beta = 90.52°$	$c = 41.92$	$S = 1\,472$
b)	$\alpha = 37.95°$	$\gamma = 24.24°$	$b = 123.41$	$S = 2\,174$
c)	$\alpha = 32.28°$	$c = 66.62$	$b = 134.26$	$S = 2\,389$
d)	$\alpha = 107.48°$	$a = 159.62$	$b = 102.83$	$S = 4\,661$
e)	$\alpha = 22.99°$	$\beta = 64.52°$	$\gamma = 92.48°$	$S = 2\,031$
f)	$\alpha = 56.98°$	$\beta = 25.66°$	$\gamma = 97.36°$	$S = 1\,215$
g)	$\alpha = 7.89°$	$\gamma = 141.46°$	$c = 444.95$	$S = 11\,122$

h)	$\alpha_1 = 60.43°$	$\gamma_1 = 80.20°$	$c_1 = 521.33$	$S_1 = 76\,083$
	$\alpha_2 = 119.57°$	$\gamma_2 = 21.06°$	$c_2 = 190.11$	$S_2 = 27\,744$
i)	$\beta_1 = 54.84°$	$\alpha_1 = 79.83°$	$a_1 = 447.12$	$S_1 = 59\,043$
	$\beta_2 = 125.16°$	$\alpha_2 = 9.51°$	$a_2 = 75.05$	$S_2 = 9\,910$

47. $\gamma = 36.98°$ $\quad c = 4.3$ $\quad a = 5.8$ $\quad b = 7.2$

48. $AC = 10\sqrt{7} \cong 26.46$ $\quad BC = 10\sqrt{19} \cong 43.59$
$\theta \cong 64.31°$

49. $CD \cong 4.39$

50. a) $AB \cong 529.1$ $\quad$ b) $AB \cong 355.4$

51. Angle en $A \cong 33.56°$ $\quad$ Angle en I et $J \cong 73.22°$

52. a) $A(3\sqrt{2}\,; -3\sqrt{2})$ $\quad$ b) $B(-2\sqrt{3}\,; 2)$ $\quad$ c) $C(-1\,; \sqrt{3})$
d) $D(-1.46\,; -4.78)$ $\quad$ e) $E(\frac{\sqrt{3}}{4}\,; \frac{1}{4})$ $\quad$ f) $F(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
g) $G(2.16\,; 6.66)$ $\quad$ h) $H(0.93\,; 0.37)$

53. a) $A\,[15\,; 126.87°]$ $\quad$ b) $B\,[\sqrt{5}\,; -26.57°]$ $\quad$ c) $C\,[\sqrt{85}\,; 229.40°]$
d) $D\,[8\sqrt{3}\,; 240°]$ $\quad$ e) $E\,[5\sqrt{2}\,; 135°]$ $\quad$ f) $F\,[2\,; 180°]$

54. $A'\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\,; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}\,; \dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$
$C'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-5}{2}\,; \dfrac{5+5\sqrt{3}}{2}\right)$, $D'\left(\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}\,; \dfrac{5\sqrt{3}+1}{2}\right)$

Index