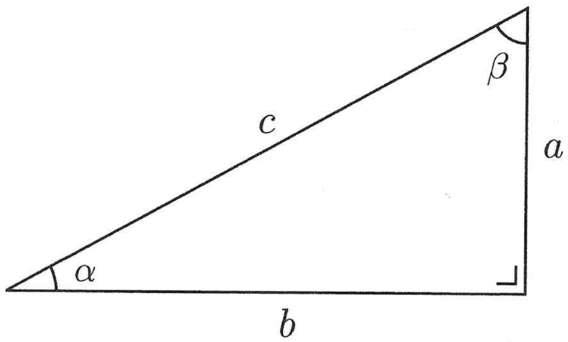
9. Trigonométrie

9.1 Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les rapports de deux côtés ne dépendent que de l'angle α.

Par conséquent, on définit les rapports suivants en fonction de l'angle α.



sinus défini par $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

cosinus défini par $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

tangente défini par $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Ces rapports sinus, cosinus et tangente définissent les **fonctions trigonométriques** pour les angles aigus.

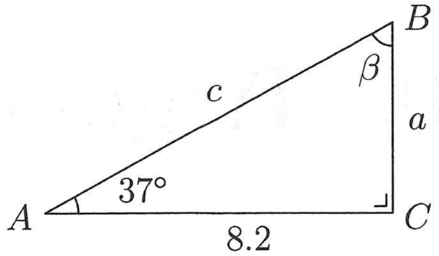
Résolution de triangles

Résoudre un triangle consiste à calculer les éléments non donnés (côtés et angles).

On s'aidera de la machine pour le calcul des fonctions trigonométriques.

Exemple 1

Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté $b = 8.2$ et l'angle $\alpha = 37°$.



On obtient d'abord $\beta = 90° - \alpha = 53°$.

Comme $\tan(37°) = \dfrac{a}{8.2}$ *, on obtient avec la machine*

$$a = 8.2 \cdot \tan(37°) \cong 6.2$$

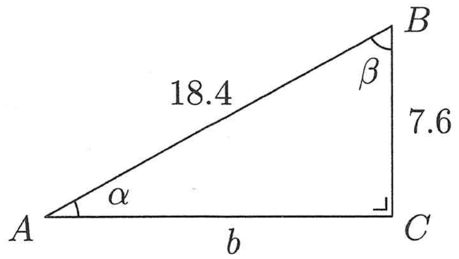
Comme $\cos(37°) = \dfrac{8.2}{c}$ *, on obtient avec la machine*

$$c = \frac{8.2}{\cos(37°)} \cong 10.3$$

Exemple 2

Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté $a = 7.6$ et l'hypoténuse $c = 18.4$.

On obtient d'abord



$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{18.4^2 - 7.6^2} \cong 16.8$$

Puis, comme $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{7.6}{18.4}$ *,*
on obtient avec la machine $\alpha \cong 24.4°$.
Enfin $\beta = 90° - \alpha \cong 65.6°$.
On aurait pu aussi calculer β *en utilisant* $\cos(\beta) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{7.6}{18.4}$.
Avec la machine, on obtient également $\beta \cong 65.6°$.

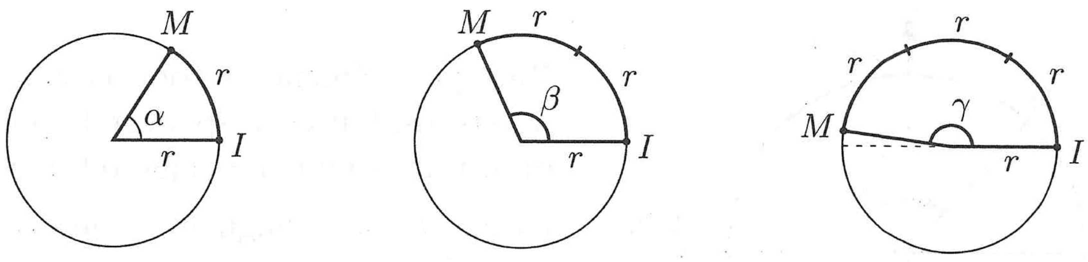
9.2 Mesure des angles

Dans l'Antiquité, pour simplifier les problèmes de partage d'angles, on a divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales, appelées **degrés**.

Ce choix se justifiait par le fait que 360 a un grand nombre de diviseurs. En effet, 360 est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 et 180.

Ce choix n'est pas toujours pratique. Une autre façon de mesurer un angle serait de prendre la longueur de l'arc correspondant. Toutefois cette longueur dépend du rayon du cercle.

La longueur d'un arc de cercle déterminé par un angle au centre étant proportionnelle au rayon du cercle, on dit que la mesure d'un angle est de 1 **radian** si la longueur de l'arc correspondant est égale au rayon du cercle.



$\alpha = 1$ radian $\qquad \beta = 2$ radians $\qquad \gamma = 3$ radians

Relation entre degrés et radians

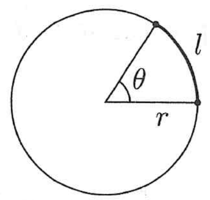
La circonférence du cercle de rayon r étant égale à $2\pi r$, on a :

$$\begin{array}{rccl} 360^\circ & \leftrightarrow & 2\pi \text{ radians} & \cong 6.28 \text{ radians} \\ 180^\circ & \leftrightarrow & \pi \text{ radians} & \cong 3.14 \text{ radians} \\ 1^\circ & \leftrightarrow & \dfrac{\pi}{180} \text{ radian} & \cong 0.0175 \text{ radian} \end{array}$$

Un angle de 1 radian correspond à un angle de $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \cong 57.2958^\circ$.

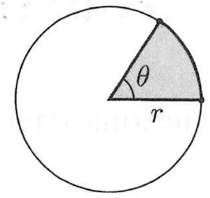
Longueur d'arc de cercle et aire de secteur circulaire

Considérons un cercle de rayon r et un angle au centre de θ radians.



D'après la définition du radian, la longueur l de l'arc correspondant à l'angle θ est donnée par

$$l = r\theta$$



De même, l'aire S du secteur circulaire correspondant à l'angle θ est donnée par

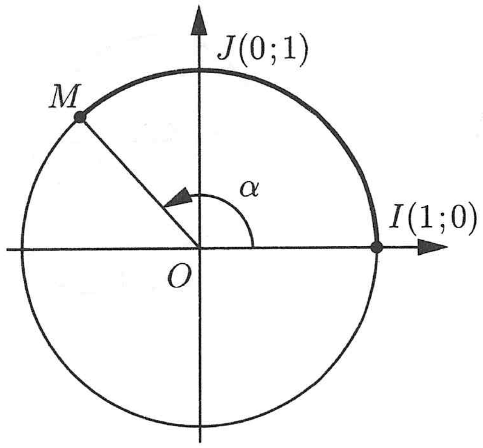
$$S = \tfrac{1}{2} r^2 \theta$$

Cercle trigonométrique

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Dans ce cas, un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur 1 et un angle de θ radians correspond à un arc de longueur θ.

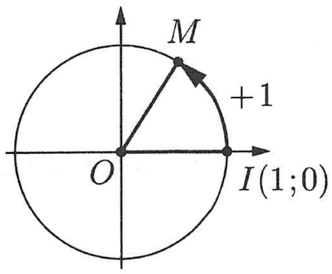
Nous allons ¡¡enrouler la droite réelle autour du cercle trigonométrique¿¿ de manière à visualiser tout nombre réel comme la mesure en radians d'un angle.



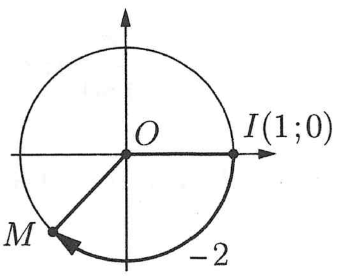
Plus précisément, à tout nombre réel $\alpha > 0$, on fait correspondre le point M du cercle trigonométrique tel que l'arc $\overset{\frown}{IM}$ a une longueur égale à α et est orienté positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre).

Si $\alpha < 0$, l'arc est orienté négativement.

Le nombre α est donc une **mesure en radians** de l'angle $\widehat{IOM}$. Cette mesure en radian d'un angle est la longueur de l'arc correspondant sur le cercle trigonométrique et s'écrit sans unité.



$\widehat{IOM} = 1$



$\widehat{IOM} = -2$ ou $2\pi - 2$

Un angle possède plusieurs mesures en radians qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π (circonférence du cercle trigonométrique).

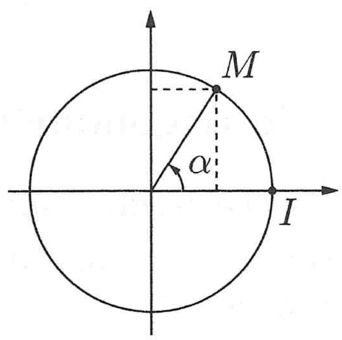
9.3 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont définies à l'aide des figures suivantes.

Considérons le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle α.

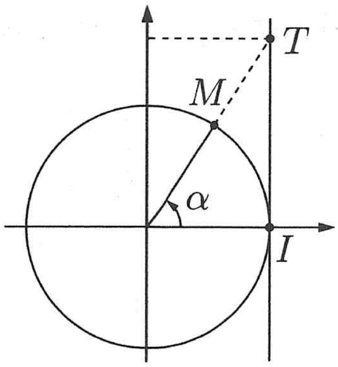
Le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$, est la première coordonnée ou abscisse de M.

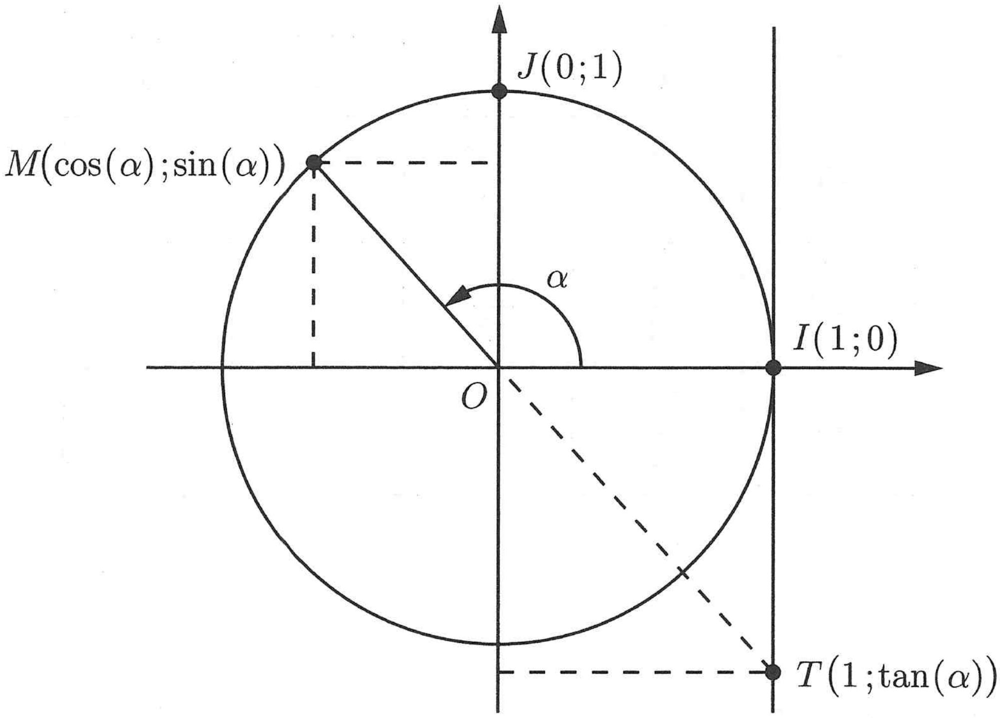
Le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, est la deuxième coordonnée ou ordonnée de M.



Considérons le point d'intersection T de la droite OM avec la tangente au cercle en I.

La **tangente** de α, notée $\tan(\alpha)$, est l'ordonnée de T.





Lorsque l'angle α est aigu, on retrouve les fonctions trigonométriques définies dans le triangle rectangle.

Relations fondamentales

A l'aide du théorème de Pythagore, on obtient

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

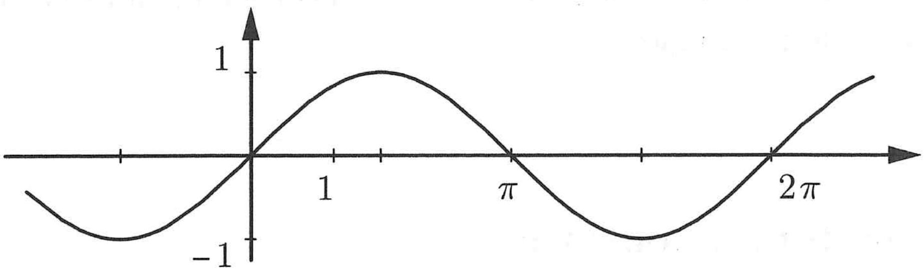
A l'aide du théorème de Thalès, on obtient

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

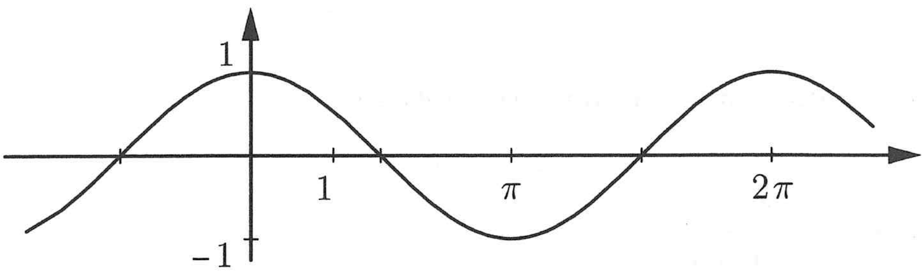
Valeurs particulières

degrés	radians	sin	cos	tan
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

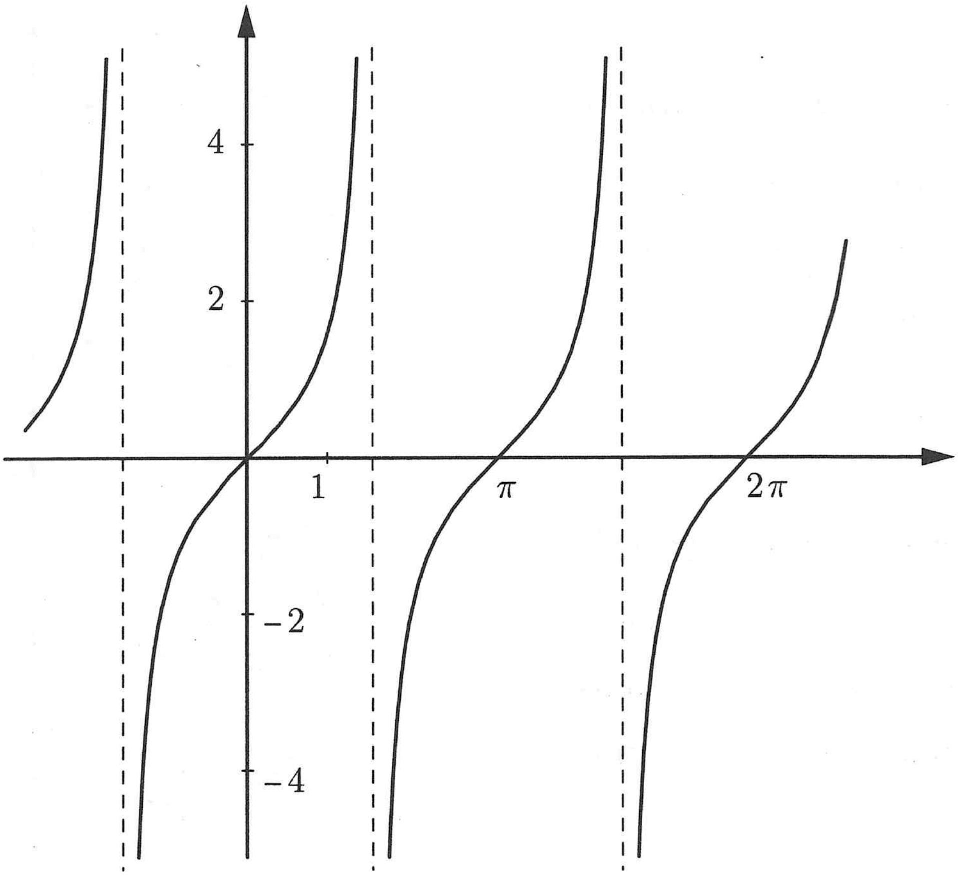
Graphe de la fonction sinus



Graphe de la fonction cosinus



Graphe de la fonction tangente



9.4 Propriétés des fonctions trigonométriques

Périodicité

En considérant la figure de la page 153, on constate que l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de 2π ne change pas le point M sur le cercle trigonométrique. De même, l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de π ne change pas le point T. Ainsi, par définition des fonctions trigonométriques, on a

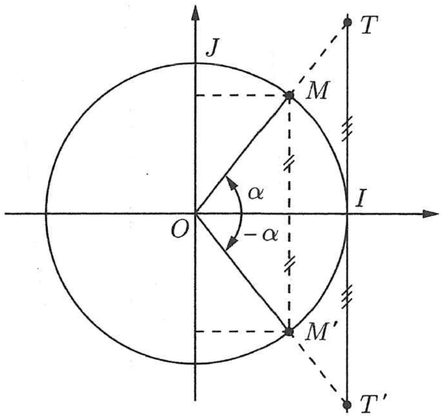
$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + k \cdot 2\,\pi) &= \cos(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\
\sin(\alpha + k \cdot 2\,\pi) &= \sin(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\
\tan(\alpha + k \cdot \pi) &= \tan(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période $2\,\pi$ et que la fonction tangente est **périodique** de période π .

Symétries

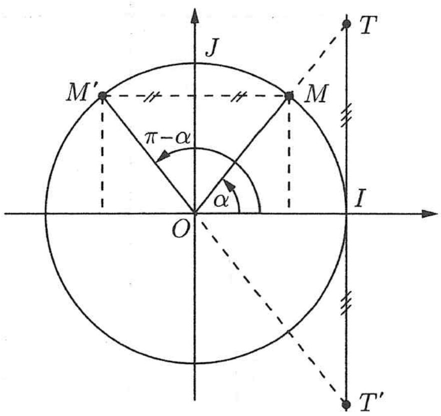
Symétrie d'axe horizontal

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha)\end{aligned}$$



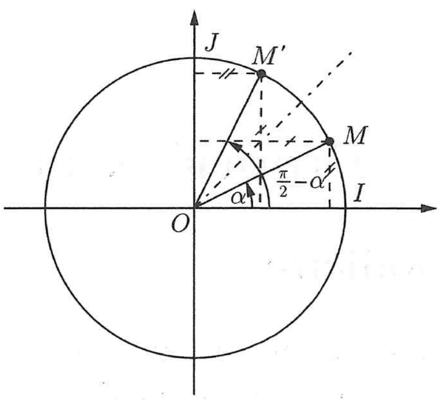
Symétrie d'axe vertical

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\alpha) &= -\cos(\alpha)\\ \sin(\pi-\alpha) &= \sin(\alpha)\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan(\alpha)\end{aligned}$$



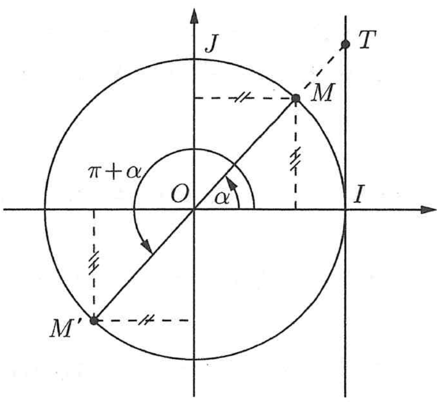
Symétrie dont l'axe est la 1re bissectrice[1]

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \sin(\alpha)\\ \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \tan(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)}\end{aligned}$$



Symétrie de centre O

$$\begin{aligned}\cos(\pi+\alpha) &= -\cos(\alpha)\\ \sin(\pi+\alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \tan(\pi+\alpha) &= \tan(\alpha)\end{aligned}$$



[1]Ces formules justifient le nom de la fonction cosinus comme le sinus de l'angle complémentaire

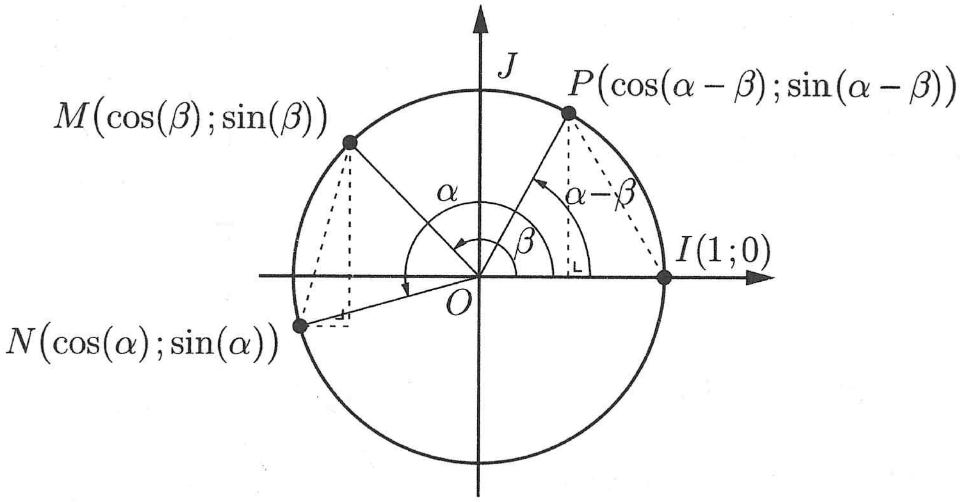
Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

On démontre[2] en premier lieu que :

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

en utilisant l'égalité des distances MN et IP.



En effet,

$$\begin{aligned}MN^2 &= \big(\cos(\alpha)-\cos(\beta)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)-\sin(\beta)\big)^2\\ &= \cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin^2(\alpha)\\ &\qquad +\sin^2(\beta)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha)\cos(\beta)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IP^2 &= \big(\cos(\alpha-\beta)-1\big)^2 + \big(\sin(\alpha-\beta)\big)^2\\ &= \cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

En remplaçant β par $-\beta$, on obtient la première formule d'addition.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \cos\left((\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)\\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

[2] Cette preuve est due à Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777–1855)

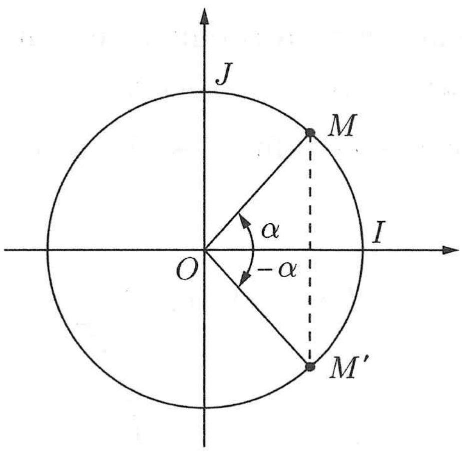
9.5 Equations trigonométriques

Equations simples

$$\cos(x) = \cos(\alpha)$$

On a deux familles de solutions :

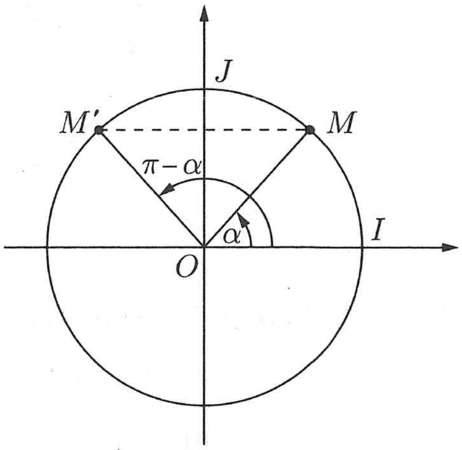
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\alpha + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\sin(x) = \sin(\alpha)$$

On a deux familles de solutions :

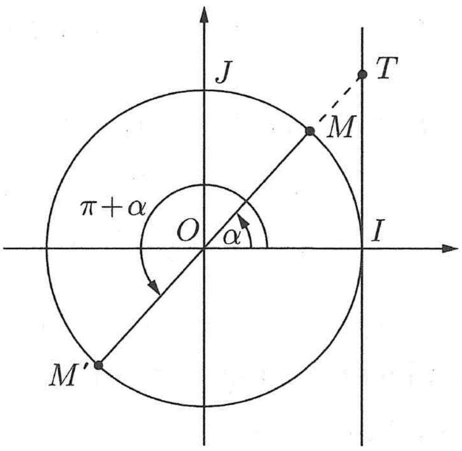
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\tan(x) = \tan(\alpha)$$

On a une famille de solutions :

$$x = \alpha + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Exemple 1

Résoudre l'équation $2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$
On a $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ *et comme* $-\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$, *on obtient*

$$\sin(3x + \tfrac{\pi}{6}) = \sin(-\tfrac{\pi}{6})$$

On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 3\,x_1 + \frac{\pi}{6} = \quad -\frac{\pi}{6} \quad + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ 3\,x_2 + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\,x_1 = -\frac{2\pi}{6} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ 3\,x_2 = \quad \pi \quad + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{9} + k\cdot \frac{2\pi}{3}\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + k\cdot \frac{2\pi}{3}\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple 2

Résoudre l'équation $\cos(\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}) = 1$
Comme $1 = \cos(0)$ *, on a* $\cos(\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}) = \cos(0)$

On a une famille de solutions :

$$\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4} = \pm 0 + k\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}\,x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 4\pi\,, \; k\in\mathbb{Z}$$

Exemple 3

Résoudre l'équation $\cos(2\,x) = \sin(3\,x)$
On utilise les formules de symétrie dont l'axe est la 1^{re} *bissectrice pour se ramener à une équation simple.*

$$\cos(2\,x) = \sin(3\,x)$$

$$\cos(2\,x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3\,x)$$

On a deux familles de solutions :

$$\begin{cases} 2\,x_1 = \quad \frac{\pi}{2} - 3\,x_1 \quad + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ 2\,x_2 = -(\frac{\pi}{2} - 3\,x_2) + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\,x_1 = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{10} + k\cdot \frac{2\pi}{5}\,, \; k\in\mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\,, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Equations en $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$

On présentera pour chaque exemple une méthode de résolution. D'autres méthodes sont possibles.

Exemple

Résoudre l'équation $2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
A l'aide de la relation fondamentale $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, *on se ramène tout d'abord à une équation du deuxième degré en* $\sin(x)$.

$$2\cos^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$
$$2\left(1 - \sin^2(x)\right) + \sin(x) - 1 = 0$$
$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 1 \;\; \textit{ou} \;\; \sin(x) = -\tfrac{1}{2}$$

On résout ensuite chacune des deux équations simples :

a) $\sin(x) = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_2 = \quad -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Equations du 1$^{\text{er}}$ degré en $\sin(x)$ et $\cos(x)$

Exemple

Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$
On va résoudre le système formé de cette équation et de la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *de manière à se ramener à un problème plus simple.*

$$\begin{cases} \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \end{cases}$$

On tire $\cos(x) = 1 - \sqrt{3}\sin(x)$ *de la* 1$^{\text{re}}$ *équation et on remplace dans la* 2$^{\text{e}}$ *équation.*

$$\left(1 - \sqrt{3}\sin(x)\right)^2 + \sin^2(x) = 1$$
$$3\sin^2(x) - 2\sqrt{3}\sin(x) + 1 + \sin^2(x) = 1$$
$$4\sin^2(x) - 2\sqrt{3}\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \;\; \textit{ou} \;\; \sin(x) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

On traite ensuite chacun des deux cas :

a) $\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 1 - \sqrt{3}\,\sin(x) = 1$

On obtient le système $\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = 1 \end{cases}$

donc $x_1 = 0 + k \cdot 2\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

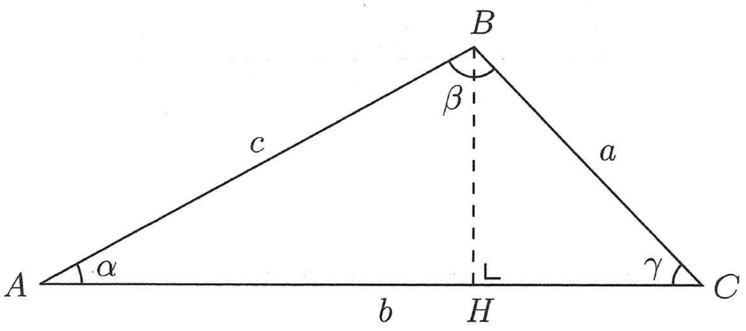
b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 1 - \sqrt{3}\,\sin(x) = -\frac{1}{2}$

On obtient le système $\begin{cases} \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

9.6 Triangle quelconque

Dans ce paragraphe, on considère un triangle quelconque ABC et on désigne ses angles par α, β et γ et ses côtés par a, b et c.



Les théorèmes ci-dessous permettent de résoudre un triangle quelconque.

Théorème de l'aire

$$S = \tfrac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\gamma) \;=\; \tfrac{1}{2}\,b\,c\,\sin(\alpha) \;=\; \tfrac{1}{2}\,a\,c\,\sin(\beta)$$

Le théorème de l'aire se démontre en observant que la hauteur issue de B est égale à $a \cdot \sin(\gamma)$, et par suite que

$$S = \tfrac{1}{2}\ \text{base} \cdot \text{hauteur} = \tfrac{1}{2}\ b \cdot a \cdot \sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}\ a\,b\,\sin(\gamma)$$

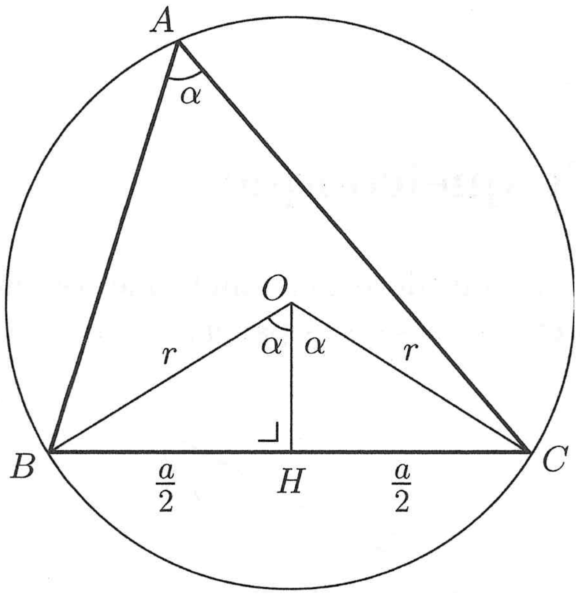
Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,r$$

où r est le rayon du cercle circonscrit.

Les deux premières égalités résultent immédiatement du théorème de l'aire en comparant les trois manières de calculer cette aire.

L'égalité $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = 2\,r$ peut s'observer dans le triangle OBH de la figure suivante où O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



On peut en conséquence aussi exprimer l'aire S sous les formes suivantes.

$$S = 2\,r^2\,\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) = \frac{a\,b\,c}{4\,r}$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,a\,c\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)$$

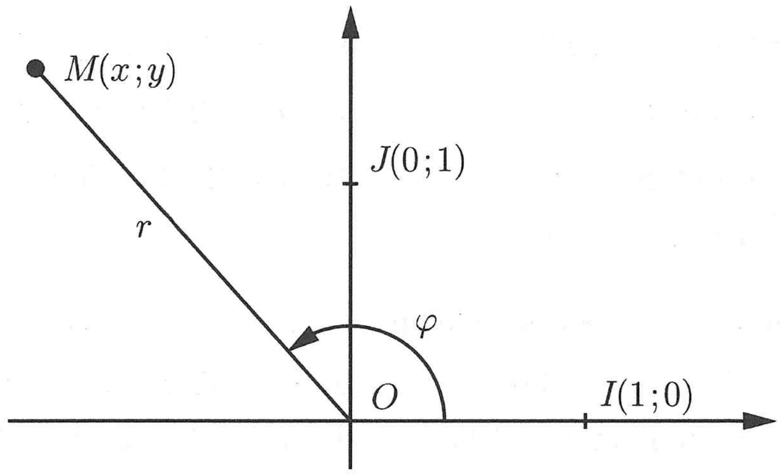
On applique le théorème de Pythagore au triangle ABH de la figure de la page 161.

Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.

9.7 Coordonnées polaires

Pour décrire un point M de coordonnées cartésiennes $M(x\,;y)$, on peut donner la distance r de M à l'origine O et une mesure φ de l'angle $\widehat{IOM}$.

Le point M est alors donné par ses **coordonnées polaires** $M\,[\,r\,;\varphi\,]$.



On obtient les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires par les relations suivantes.

$$\begin{cases} x = r\,\cos(\varphi) \\ y = r\,\sin(\varphi) \end{cases}$$

Réciproquement, on obtient les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x}{r} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

La formule $\tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$ permet de déterminer l'angle φ à 180° près.

Le signe de x et de y permet de lever l'indétermination.

9.8 Exercices

1. Un triangle ABC est rectangle en C. Résoudre ce triangle connaissant

a) $c = 4.25$ et $\beta = 67.2°$ b) $c = 11.81$ et $\alpha = 42.35°$

c) $c = 22.77$ et $a = 13.29$ d) $c = 17.93$ et $b = 5.05$

e) $a = 4.85$ et $\alpha = 52.37°$ f) $a = 91.7$ et $\beta = 25.8°$

g) $b = 8.2$ et $\beta = 20.7°$ h) $b = 32.5$ et $\alpha = 31.2°$

i) $a = 21.5$ et $b = 45.8$ j) $a = 12.7$ et $b = 2.8$

k) $b = 39.5$ et $S = 987.2$ l) $a = 2.73$ et $S = 8.54$

m) $\alpha = 39.5°$ et $S = 10.2$

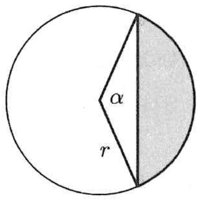
2. Un triangle ABC est isocèle en A. Résoudre ce triangle connaissant

a) $\alpha = 42.5°$ et $a = 23.6$ b) $\alpha = 95.2°$ et $b = c = 6.3$

c) $\beta = \gamma = 56.3°$ et $a = 10.3$ d) $\alpha = 52.8°$ et $S = 617.6$

3. Un triangle ABC est isocèle en A. Déterminer la base a et l'aire S de ce triangle en fonction de l'angle α et du côté $b = c$.

4. Exprimer l'aire de la surface grisée en fonction de r et de α (où α est exprimé en radians).



5. L'ombre d'une tour mesure 42 m lorsque le soleil est élevé de 35.5° au-dessus de l'horizon. Calculer la hauteur de la tour.

6. Une route s'élève régulièrement en formant un angle de 4.8° avec l'horizontale.

a) Quelle distance horizontale parcourt-on lorsqu'on a suivi la route sur 6.4 km ?

b) De combien de mètres s'est-on élevé ?

7. Une tour circulaire de 25 m de diamètre est vue sous un angle horizontal de 20°.

A quelle distance du point le plus proche de la tour se trouve-t-on ?

8. Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de 41.2°. Il recule de 25 m et voit l'arbre sous un angle de 22.1° (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a) Quelle est la hauteur de l'arbre?

b) A quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début?

9. Déterminer la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62 mètres quand l'élévation du soleil au-dessus de l'horizon passe de $52°$ à $23.5°$.

10. Un observateur aperçoit un arbre de l'autre côté d'une rivière, juste en face et sous un angle d'élévation de $33°$. Il se déplace de 40 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de $20°$. Calculer la largeur de la rivière et la hauteur de l'arbre.

11. Un observateur, placé à une altitude de 252 m au-dessus de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon faisait un angle de $89.49°$ avec la verticale. On demande de calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

12. La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle $230°$.

a) Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 13 m.

b) Calculer la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

13. Deux observateurs situés à la même altitude et distants de 1 580 m mesurent au même moment la hauteur d'un point remarquable d'un nuage situé entre eux. Ce point est dans le plan vertical contenant les deux observateurs et les angles d'élévation sont de $65.6°$ et $77.1°$.

Quelle est la hauteur du point remarquable du nuage?

14. Un cercle de rayon 4 est inscrit dans un losange $ABCD$ dont on donne la diagonale $AC = 15$.

Calculer ses angles α et β, son côté c et sa diagonale BD.

15. On considère un triangle isocèle dont la base vaut 10 et l'angle au sommet $36°$. Calculer le rayon r de son cercle circonscrit et le rayon ρ de son cercle inscrit.

16. Un parc a la forme d'un hexagone régulier de 2 km de côté. Alice marche le long du périmètre du parc et parcourt 5 km. A quelle distance (en ligne droite) de son point de départ se trouve-t-elle?

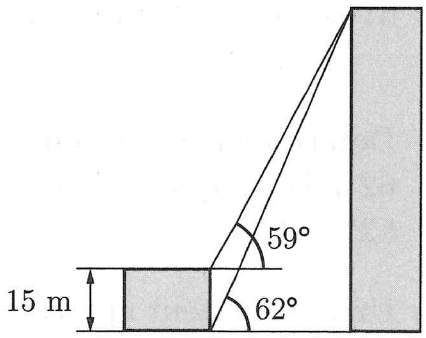
17. Déterminer l'angle aigu formé par deux diagonales d'un cube.

18. En observant un gratte-ciel du sommet d'une maison haute de 15 m, l'angle d'élévation est de 59°.

Si on l'observe depuis la route à côté de la maison, l'angle d'élévation est de 62°.

a) Calculer la distance d entre les deux constructions.

b) Calculer la hauteur h du gratte-ciel.



19. On considère deux losanges semblables $ABCD$ et $AECF$ ayant une diagonale commune AC.

a) Connaissant leur diagonale $AC = 6$ et l'angle $\widehat{ABC} = 60°$, calculer leurs côtés ainsi que les diagonales BD et EF.

b) Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$ pour que les côtés du losange $ABCD$ soient le double de ceux du losange $AECF$.

c) Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$ pour que l'aire du losange $ABCD$ soit le double de celle du losange $AECF$.

20. Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

a) $\frac{\pi}{6}$	b) $\frac{2\pi}{3}$	c) $\frac{\pi}{10}$	d) 4π	e) $-\frac{5\pi}{6}$
f) $\frac{15\pi}{4}$	g) 1	h) 0.7	i) -2	j) 3

21. Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

a) 45°	b) 60°	c) 75°	d) $-30°$	e) 120°
f) 315°	g) 22.7°	h) $-107.9°$	i) 292.3°	j) 152.5°

22. Calculer, à 1 mm près, le rayon d'un cercle sur lequel

a) un arc de 1° mesure 3 mm.

b) un arc de 0.03° mesure 0.05 mm.

23. Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

a) de 32° sur un cercle de rayon 15 cm.

b) de 2 radians sur un cercle de rayon 7 cm.

24. Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance[3] sachant que le rayon de la terre est de 6 370 km ?

Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

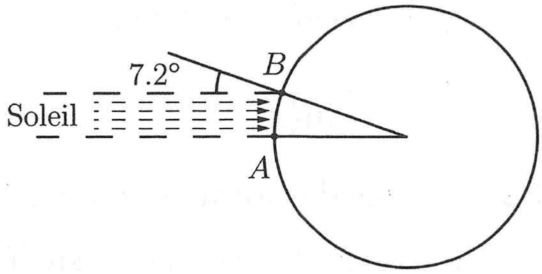
[3] Cette distance définit le mille nautique.

25. Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 46°37 'N et 47°25' N . Calculer la distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ entre ces deux villes.

26. Sion et Delémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est 46°14' N , calculer la latitude de Delémont.

27. Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont 49°45' N et 40°15' N . Calculer la distance ¡¡ à vol d'oiseau ¿¿ entre ces deux villes[4].

28. Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale un angle de 7.2°.



En déduire la circonférence et le rayon terrestre[5].

29. Activité grapheur

Tracer les graphes des fonctions suivantes et en déduire la période.

Pour vérifier qu'une fonction f est de période T (ou d'un multiple de T), il est possible de tracer le graphe de $f(x+T)-f(x)$.

$$f(x) = \sin(3\,x) \qquad g(x) = \frac{1}{2}\sin(2\,x)$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \qquad j(x) = \frac{1}{3}\sin\left(5\,x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$k(x) = h(x) + j(x) \qquad l(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\,x}{5}\right)$$

$$m(x) = f(x) + l(x) \qquad n(x) = \sin\left(\frac{2\,x}{5}\right) + \sin\left(\frac{5\,x}{2}\right)$$

[4]La mesure de la distance entre Dunkerque et Barcelone s'est faite par triangulation entre 1792 et 1798. Elle a servi de base à la première définition du mètre comme la dix millionième partie du quart de méridien terrestre (1799).

[5]Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284 –195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

30. Donner la période, puis esquisser le graphe pour $x \in [-2\pi\,;2\pi]$ de chacune des fonctions suivantes.

$a(x) = \sin(2x)$ $\qquad$ $b(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$c(x) = 5\cos(3x)$ $\qquad$ $d(x) = 5\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$e(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{3\pi}{2}\right)$

31. A partir des graphes des fonctions sinus et cosinus, esquisser le graphe pour $x \in [-2\pi\,;2\pi]$ de chacune des fonctions suivantes.

$a(x) = x \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $b(x) = x + \sin(x)$

$c(x) = \cos(x) + \sin(x)$ $\qquad$ $d(x) = \sin^2(x)$

$e(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ $\qquad$ $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$

32. A l'aide des formules d'addition, démontrer les formules de duplication.

a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) $\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

33. A l'aide des formules de duplication, établir les formules de bissection.

a) $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ $\qquad$ b) $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

34. A partir des valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 30° et 45°,

a) déterminer les valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 75° et 15° en utilisant les formules d'addition ;

b) déterminer les valeurs exactes des fonctions trigonométriques des angles de 22.5° et 15° en utilisant les formules de bissection.

35. A l'aide des formules d'addition,

a) exprimer $\sin(3t)$, $\cos(3t)$ et $\tan(3t)$ en fonction de $\sin(t)$, $\cos(t)$ et $\tan(t)$;

b) exprimer $\sin(4t)$, $\cos(4t)$ et $\tan(4t)$ en fonction de $\sin(t)$, $\cos(t)$ et $\tan(t)$.

36. Connaissant l'angle au sommet $2\,\alpha$ et la base $2\,a$ d'un triangle isocèle, calculer le rayon r de son cercle circonscrit et le rayon ρ de son cercle inscrit.

37. Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(t) = 0.829$

c) $\tan(t) = -0.754$

d) $\cos(t) = -1.43$

e) $\tan(t) = 5.33$

f) $\sin(3\,t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\tan(5\,t) = 3.273$

h) $\cos(\frac{t}{2}) = -\frac{1}{2}$

38. Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin(\frac{2\,t}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

c) $\sin(3\,t) = \sin(2\,t)$

d) $\cos(2\,t) = \cos(4\,t)$

e) $\sin(2\,x) = \cos(3\,x + \frac{\pi}{4})$

f) $\sin(\frac{4\,x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$

g) $\tan(3\,x) = \cot\,(x)$

h) $\cos(2\,t) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4\,t)$

39. Résoudre les équations suivantes.

a) $4\,\cos^2(t) - 4\,\cos(t) - 3 = 0$

b) $2\,\sin^2(x) - 3\,\sin(x) + 1 = 0$

c) $3\,\sin^2(x) + 8\,\cos(x) + 1 = 0$

d) $3\,\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2 = 0$

e) $5\,\sin(x) = 6\,\cos^2(x)$

f) $\cos(x) = \tan(x)$

g) $8\,\cos^2(t) + 5\,\sin(t) - 1 = 0$

h) $\tan^4(t) - 4\,\tan^2(t) + 3 = 0$

40. Résoudre les équations suivantes.

a) $3\,\cos(x) + 2\,\sin(x) = -3$

b) $\sin(t) + 3\,\cos(t) = 3$

c) $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}\,\cos(t) - \sin(t) = 1$

e) $3\,\sin(t) + 5\,\cos(t) = 2$

f) $\sin(2\,x) + 3\cos(2\,x) = 2$

41. Résoudre les équations suivantes en utilisant la relation $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$.

a) $\sin(t) = 3\,\cos(t)$

b) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - 2\,\sin^2(\alpha) = 0$

c) $\sin^2(t) - 4\,\sin(t)\cdot\cos(t) + 3\,\cos^2(t) = 0$

d) $1 - 2\,\sin(x)\cdot\cos(x) - 2\,\cos^2(x) = 0$

e) $\cos^2(\varphi) + 4\,\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - 5\,\sin^2(\varphi) = 0$

f) $5\,\sin^2(2\,t) + 3\,\sin(t)\cdot\cos(t) - 4 = 0$

42. Résoudre les équations suivantes.

a) $\sin(2\,t) = \tan(t)$

b) $\cos(2\,x) + 2\,\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$

c) $\sin(x)\cdot\cos(2\,x + \frac{\pi}{3}) = \sin^2(x)$

d) $1 + \sin(x) = \cos(2\,x)$

43. Activité grapheur

Résoudre graphiquement les équations suivantes.

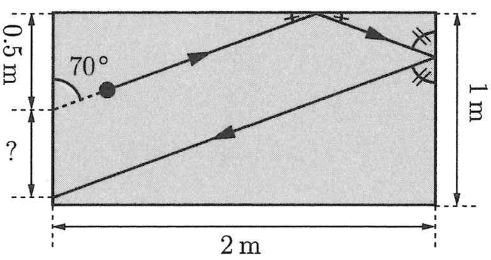
a) $\cos(x) - x = 0$

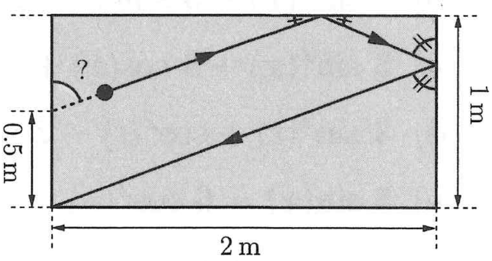
b) $3\,\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) + 2\,x^2 = 0$

44. On lance une boule de billard selon le schéma ci-dessous

a) Où revient la boule ?

b) Quel est l'angle de départ ?





45. Résoudre les triangles suivants.

a)	$a = 70.24$	$b = 82.12$	$\gamma = 30,69°$
b)	$a = 85.80$	$c = 57.29$	$\beta = 117.81°$
c)	$a = 85.67$	$\beta = 123.18°$	$\gamma = 24.54°$
d)	$c = 95.05$	$\beta = 37.91°$	$\gamma = 34.61°$
e)	$a = 41.94$	$b = 96.92$	$c = 107.26$
f)	$a = 68.87$	$b = 35.57$	$c = 81.46$

g) $\beta = 30.65°$	$a = 98.06$	$b = 364.04$
h) $\beta = 39.37°$	$a = 460.14$	$b = 335.59$
i) $\gamma = 45.33°$	$b = 371.37$	$c = 323.05$

46. Montrer que l'aire S d'un triangle peut s'exprimer sous les formes

$$S = 2\,r^2\,\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) = \frac{a\,b\,c}{4\,r}$$

où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

47. Résoudre un triangle connaissant son aire $S = 12.52$ ainsi que les angles $\alpha = 54.08°$ et $\beta = 88.94°$.

48. D'un parallélogramme $ABCD$, on donne les côtés $AB = 30$, $BC = 20$ et l'angle $\beta = 60°$ en B. Calculer la longueur des diagonales AC et BD, ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

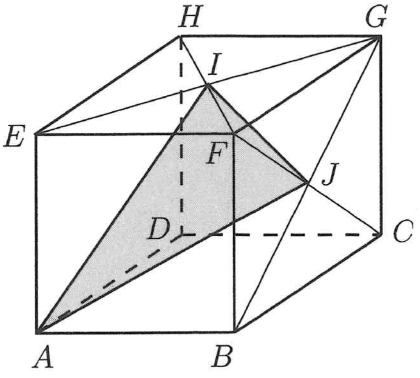
49. D'un quadrilatère convexe $ABCD$, on donne les angles $\alpha = 100°$ et $\beta = 70°$, ainsi que les longueurs des côtés $AB = 4.3$, $BC = 6.8$ et $AD = 9.1$. Calculer la longueur du côté CD du quadrilatère.

50. Un point B est inaccessible et invisible d'un point A. Pour déterminer la distance AB, on a choisi deux points C et D alignés avec A et d'où l'on voit les points A et B. On a mesuré les distances $AD = 432.3$ m et $AC = 521.8$ m ainsi que les angles $\widehat{ADB} = 55.3°$ et $\widehat{ACB} = 41.6°$.
Calculer la distance AB

a) lorsque le point A est situé entre C et D;

b) lorsque le point A n'est pas situé entre C et D.

51. On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.
On désigne par I le centre de la face $EFGH$ et par J le centre de la face $BCGF$.
Calculer les angles du triangle AIJ.



52. Calculer les coordonnées cartésiennes des points suivants donnés par leurs coordonnées polaires.

a) $A[6\,;\frac{7\pi}{4}]$ b) $B[4\,;\frac{5\pi}{6}]$ c) $C[2\,;\frac{2\pi}{3}]$

d) $D[5\,;253°]$ e) $E[0.5\,;60°]$ f) $F[3\,;-45°]$

g) $G[7\,;\frac{2\pi}{5}]$ h) $H[1\,;22°]$

53. Calculer les coordonnées polaires des points suivants donnés par leurs coordonnées cartésiennes.

a) $A(-9\,;12)$ b) $B(2\,;-1)$ c) $C(-6\,;-7)$

d) $D(-4\sqrt{3}\,;-12)$ e) $E(-5\,;5)$ f) $F(-2\,;0)$

54. Déterminer les coordonnées des sommets du carré $A'B'C'D'$ obtenu par rotation de 30° autour de l'origine du carré $ABCD$ dont on donne les sommets $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$ et $C(5\,;5)$.

9.9 Réponses aux exercices du chapitre 9

1.

a)	$\alpha = 22.8°$	$a = 1.65$	$b = 3.92$	$S = 3.23$
b)	$\beta = 47.65°$	$a = 7.96$	$b = 8.73$	$S = 34.72$
c)	$b = 18.49$	$\alpha = 35.71°$	$\beta = 54.29°$	$S = 122.86$
d)	$a = 17.20$	$\alpha = 73.64°$	$\beta = 16.36°$	$S = 43.44$
e)	$\beta = 37.63°$	$b = 3.74$	$c = 6.12$	$S = 9.07$
f)	$\alpha = 64.2°$	$b = 44.33$	$c = 101.85$	$S = 2'032.51$
g)	$\alpha = 69.3°$	$a = 21.70$	$c = 23.20$	$S = 88.97$
h)	$\beta = 58.8°$	$a = 19.68$	$c = 38.00$	$S = 319.84$
i)	$c = 50.60$	$\alpha = 25.15°$	$\beta = 64.85°$	$S = 492.35$
j)	$c = 13.01$	$\alpha = 77.57°$	$\beta = 12.43°$	$S = 17.78$
k)	$a = 49.98$	$c = 63.71$	$\alpha = 51.68°$	$\beta = 38.32°$
l)	$b = 6.26$	$c = 6.83$	$\alpha = 23.57°$	$\beta = 66.43°$
m)	$\beta = 50.5°$	$a = 4.10$	$b = 4.97$	$c = 6.45$

2.

a)	$\beta = \gamma = 68.75°$	$b = c = 32.56$	$S = 358.05$
b)	$\beta = \gamma = 42.4°$	$a = 9.30$	$S = 19.76$
c)	$\alpha = 67.4°$	$b = c = 9.28$	$S = 39.77$
d)	$\beta = \gamma = 63.6°$	$b = c = 39.38$	$a = 35.02$

3. $a = 2\,b\sin(\frac{\alpha}{2})$ $\qquad$ $S = b^2\sin(\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha}{2})$

4. $r^2\left(\frac{\alpha}{2} - \sin(\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha}{2})\right)$

5. 30 m

6. a) 6 378 m $\qquad$ b) 536 m

7. 59.5 m

8. a) 18.9 m $\qquad$ b) 21.6 m

9. 40.8 m

10. Largeur de la rivière : 27.1 m $\qquad$ Hauteur de l'arbre : 17.6 m

11. 6 361 km

12. a) 7.2 m   b) 10.2 m

13. 2 315 m

14. $\alpha \cong 64.46°$ $\beta \cong 115.54°$ $c \cong 8.87$ $BD \cong 9.46$

15. $r \cong 8.51$ $\rho \cong 3.63$

16. $\sqrt{13} \cong 3.61$ km

17. 70.53°

18. $d \cong 69$ m $h \cong 130$ m

19. a) $AB = 6$ $AE = 2\sqrt{3}$ $BD = 6\sqrt{3}$ $EF = 2\sqrt{3}$
b) 53.13°   c) 70.53°

20. a) 30°   b) 120°   c) 18°   d) 720°   e) −150°
f) 675°   g) 57.3°   h) 40.1°   i) −114.6°   j) 171.9°

21. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $-\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{2\pi}{3}$
f) $\frac{7\pi}{4}$ g) 0.40   h) −1.88   i) 5.10   j) 2.66

22. a) 172 mm   b) 95 mm

23. a) 84 mm   b) 140 mm

24. 1 853 m   Non

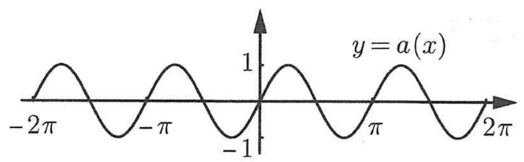
25. 90 km

26. 47°20’ N

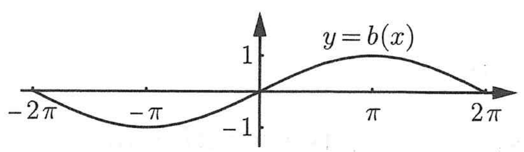
27. 1 056 km

28. Circonférence : 40 000 km   Rayon : 6 370 km

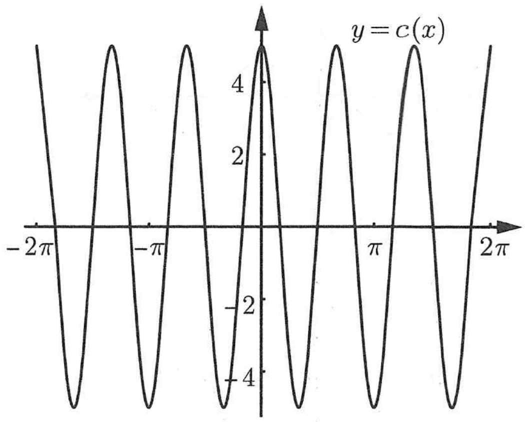
30. Période de $a(x)$: π



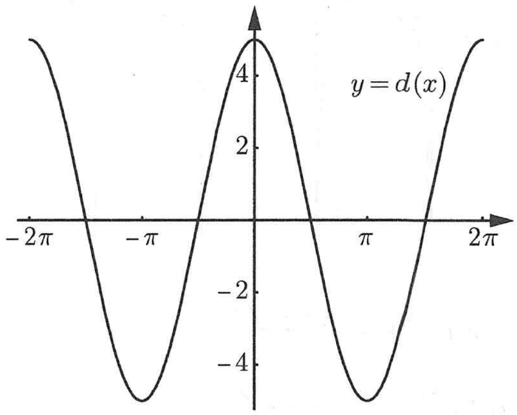
Période de $b(x)$: 4π



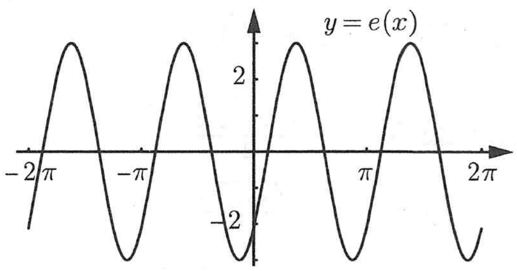
Période de $c(x)$: $\frac{2\pi}{3}$



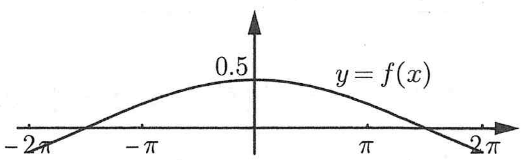
Période de $d(x)$: 2π



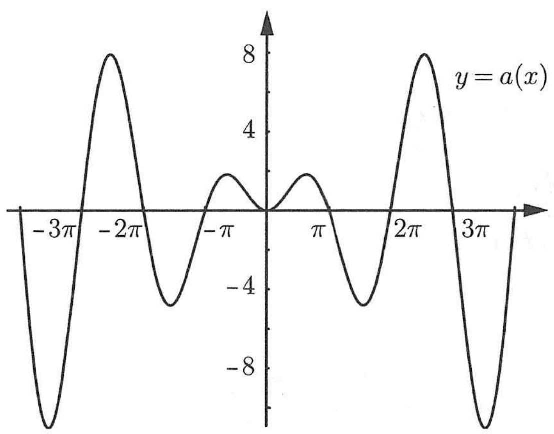
Période de $e(x)$: π

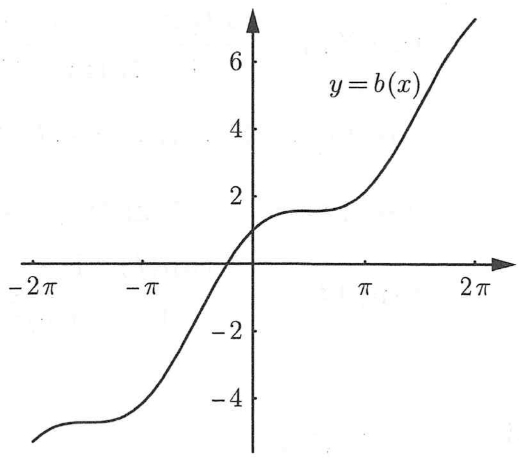


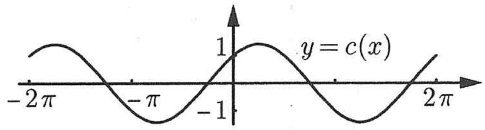
Période de $f(x)$: 6π

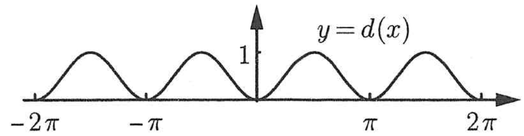


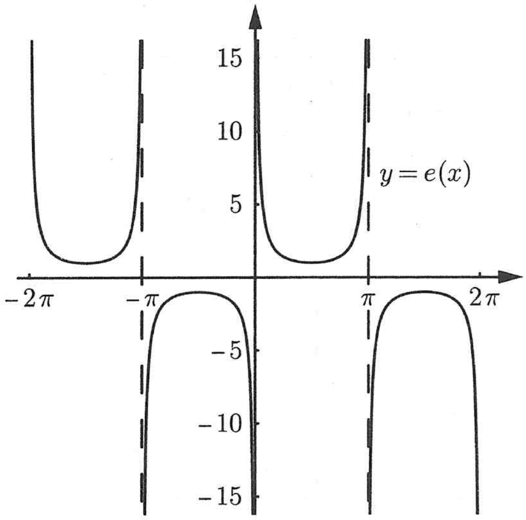
31.

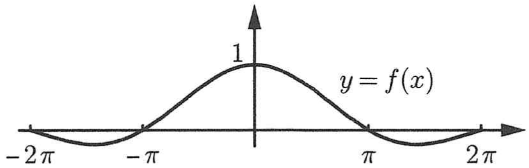












34. a) $\cos(75°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin(75°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $\sin(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan(75°) = 2+\sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan(15°) = 2-\sqrt{3}$

b) $\cos(22.5°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\cos(15°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sin(22.5°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\sin(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\tan(22.5°) = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\tan(15°) = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

35. a) $\sin(3\,t) = -\sin^3(t) + 3\,\sin(t)\cdot\cos^2(t)$

$\cos(3\,t) = \cos^3(t) - 3\,\sin^2(t)\cdot\cos(t)$

$$\tan(3\,t) = \frac{3\,\tan(t) - \tan^3(t)}{1-3\,\tan^2(t)}$$

b) $\sin(4\,t) = 4\,\sin(t)\cdot\cos(t)\,\big(1-2\,\sin^2(t)\big)$

$\cos(4\,t) = 1 - 4\,\sin^2(t)\cdot\cos^2(t)$

$$\tan(4\,t) = \frac{4\,\tan(t)\,\big(1-\tan^2(t)\big)}{1-4\,\tan^2(t)}$$

36. $r = \dfrac{a}{\sin(2\,\alpha)}$ $\qquad$ $\rho = a\,\dfrac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

37. a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 \cong 56° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 \cong 124° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t \cong -37° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Pas de solution

e) $t \cong 79.4° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = -20° + k \cdot 120°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 80° + k \cdot 120°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t \cong 14.6° + k \cdot 36°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 240° + k \cdot 720°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -240° + k \cdot 720°,\ k \in \mathbb{Z}$

38. a) $t_1 = k \cdot 3\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 3\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = \pi + k \cdot 4\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = -\frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -\frac{3\pi}{11} + k \cdot \frac{12\pi}{11}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = k \cdot \frac{\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

39. a) $t_1 = 120° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 240° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = 90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$x_3 = 150° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -115.5° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = 45° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_3 = 225° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_4 = 315° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_1 = 41.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 138.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 38.2° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 141.8° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

g) $t_1 = -42.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 222.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = -45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$
$t_3 = 60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_4 = -60° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

40. a) $x_1 = 180° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = 247.4° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $t_1 = k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 36.87° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = 135° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $t_1 = -90° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $t_1 = -39.0° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 100.9° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $x_1 = 34.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -16.17° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

41. a) $t = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad \alpha_2 = 26.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $t_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 71.57° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = 67.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = -22.5° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\varphi_1 = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad \varphi_2 = -11.31° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $t_1 = 24.6° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 65.4° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$

42. a) $t_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad t_2 = 45° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 67.5° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_1 = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

44. a) A 46 cm du milieu du bord gauche

b) 69.44°

45.

a)	$\alpha = 58.79°$	$\beta = 90.52°$	$c = 41.92$	$S = 1\,472$
b)	$\alpha = 37.95°$	$\gamma = 24.24°$	$b = 123.41$	$S = 2\,174$
c)	$\alpha = 32.28°$	$c = 66.62$	$b = 134.26$	$S = 2\,389$
d)	$\alpha = 107.48°$	$a = 159.62$	$b = 102.83$	$S = 4\,661$
e)	$\alpha = 22.99°$	$\beta = 64.52°$	$\gamma = 92.48°$	$S = 2\,031$
f)	$\alpha = 56.98°$	$\beta = 25.66°$	$\gamma = 97.36°$	$S = 1\,215$
g)	$\alpha = 7.89°$	$\gamma = 141.46°$	$c = 444.95$	$S = 11\,122$

h) $\alpha_1 = 60.43°$ $\gamma_1 = 80.20°$ $c_1 = 521.33$ $S_1 = 76\,083$
$\alpha_2 = 119.57°$ $\gamma_2 = 21.06°$ $c_2 = 190.11$ $S_2 = 27\,744$

i) $\beta_1 = 54.84°$ $\alpha_1 = 79.83°$ $a_1 = 447.12$ $S_1 = 59\,043$
$\beta_2 = 125.16°$ $\alpha_2 = 9.51°$ $a_2 = 75.05$ $S_2 = 9\,910$

47. $\gamma = 36.98°$ $c = 4.3$ $a = 5.8$ $b = 7.2$

48. $AC = 10\sqrt{7} \cong 26.46$ $BC = 10\sqrt{19} \cong 43.59$
$\theta \cong 64.31°$

49. $CD \cong 4.39$

50. a) $AB \cong 529.1$ b) $AB \cong 355.4$

51. Angle en $A \cong 33.56°$ Angle en I et $J \cong 73.22°$

52. a) $A(3\sqrt{2}\,;-3\sqrt{2})$ b) $B(-2\sqrt{3}\,;2)$ c) $C(-1\,;\sqrt{3})$
d) $D(-1.46\,;-4.78)$ e) $E(\frac{\sqrt{3}}{4}\,;\frac{1}{4})$ f) $F(\frac{3\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{3\sqrt{2}}{2})$
g) $G(2.16\,;6.66)$ h) $H(0.93\,;0.37)$

53. a) $A\,[15\,;126.87°]$ b) $B\,[\sqrt{5}\,;-26.57°]$ c) $C\,[\sqrt{85}\,;229.40°]$
d) $D\,[8\sqrt{3}\,;240°]$ e) $E\,[5\sqrt{2}\,;135°]$ f) $F\,[2\,;180°]$

54. $A'\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}\,;\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$
$C'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-5}{2}\,;\dfrac{5+5\sqrt{3}}{2}\right)$, $D'\left(\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}\,;\dfrac{5\sqrt{3}+1}{2}\right)$