5. Fonctions rationnelles

5.1 Définition

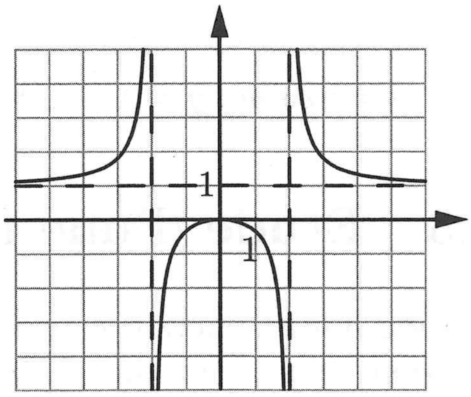
La fonction donnée par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes est appelée **fonction rationnelle**.

L'ensemble de définition D d'une fonction rationnelle comprend toutes les valeurs réelles de x sauf celles qui annulent le dénominateur $q(x)$.

Exemple

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ est une fonction rationnelle. Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

Son graphe est représenté ci-contre.



On remarque que, quand x tend vers $\pm\infty$, la courbe se rapproche de la droite horizontale $y = 1$. Cette droite est appelée asymptote horizontale.

De manière analogue, les droites $x = 2$ et $x = -2$ sont appelées asymptotes verticales.

5.2 Fonction homographique

Une fonction **homographique** est une fonction rationnelle dont le numérateur est une constante ou un polynôme de degré un et le dénominateur un polynôme de degré un.

Une fonction homographique est donnée par $f(x) = \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$

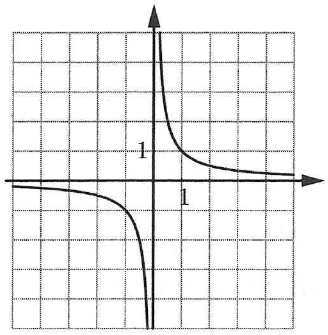
$(a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0)$

L'ensemble de définition de la fonction homographique $f(x) = \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$ est $D = \mathbb{R} \smallsetminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

Son graphe est une hyperbole qui admet la droite d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ comme asymptote verticale et la droite d'équation $y = \dfrac{a}{c}$ comme asymptote horizontale.

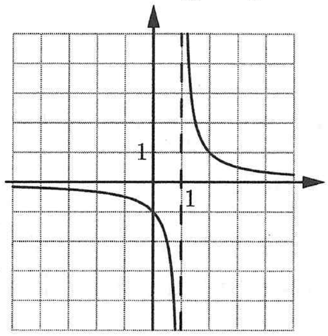
Exemples

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



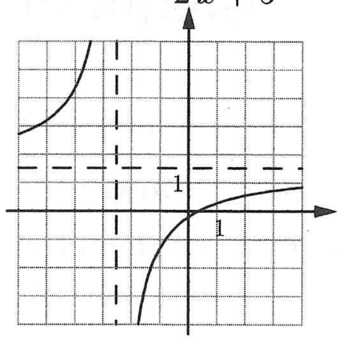
Asymptotes
verticale : $x = 0$
horizontale : $y = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



Asymptotes
verticale : $x = 1$
horizontale : $y = 0$

$f(x) = \dfrac{3\,x-1}{2\,x+5}$



Asymptotes
verticale : $x = -\frac{5}{2}$
horizontale : $y = \frac{3}{2}$

5.3 Etude d'une fonction rationnelle

L'étude d'une fonction consiste à donner diverses informations sur cette fonction, puis à en esquisser son graphe.

Exemple 1

Etude de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x-1}{2\,x+2}$

- *Ensemble de définition*

  f n'est pas définie lorsque $2\,x+2 = 0$, donc $D = \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

  Le graphe de f coupe l'axe Ox en $I(1\,;0)$ et l'axe Oy en $J(0\,;-\frac{1}{2})$

x		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2\,x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage de* $x = -1$

  Si $x \overset{<}{\longrightarrow} -1$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$
  Si $x \overset{>}{\longrightarrow} -1$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$

  Le graphe de f *admet la droite* $x = -1$ *comme asymptote verticale.*

- *Comportement asymptotique*

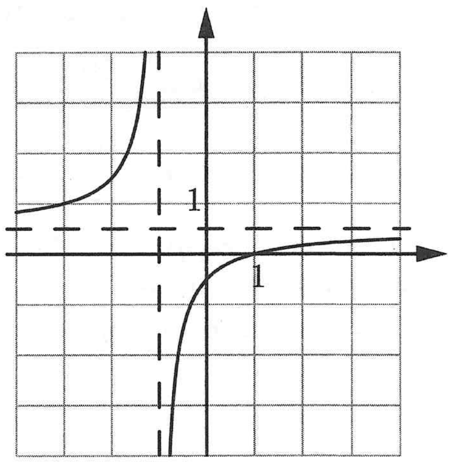
  Le quotient de la division de $x - 1$ *par* $2\,x + 2$ *est* $\dfrac{1}{2}$ *et le reste est égal à* -2 .

  La fonction peut donc s'écrire $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-2}{2\,x+2}$

  Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{-2}{2\,x+2} \overset{>}{\longrightarrow} 0$ *et* $f(x) \overset{>}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$
  Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{-2}{2\,x+2} \overset{<}{\longrightarrow} 0$ *et* $f(x) \overset{<}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

  Le graphe de f *admet la droite d'équation* $y = \frac{1}{2}$ *comme asymptote horizontale.*

- *Graphe*



Exemple 2

Etude de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-3}$

- *Ensemble de définition*

  f *n'est pas définie lorsque* $x - 3 = 0$, *donc* $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

  Le graphe de f *coupe l'axe* Ox *en* $I_1(1\,;0)$ *et* $I_2(-2\,;0)$ *et l'axe* Oy *en* $J(0\,;\frac{2}{3})$

		-2		1		3	
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage $x = 3$*

  Si $x \xrightarrow{<} 3$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$

  Si $x \xrightarrow{>} 3$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$

  Le graphe de f admet la droite $x = 3$ comme asymptote verticale.

- *Comportement asymptotique*

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 + & x - & 2 & \;x - 3 \\
\cline{4-4}
x^2 - & 3x & & \;x + 4 \\
\cline{1-3}
 & 4x - & 2 & \\
 & 4x - & 12 & \\
\cline{2-3}
 & & 10 &
\end{array}
$$

  Le quotient de la division de $x^2 + x - 2$ par $x - 3$ est $x + 4$ et le reste vaut 10.

  La fonction peut donc s'écrire $f(x) = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

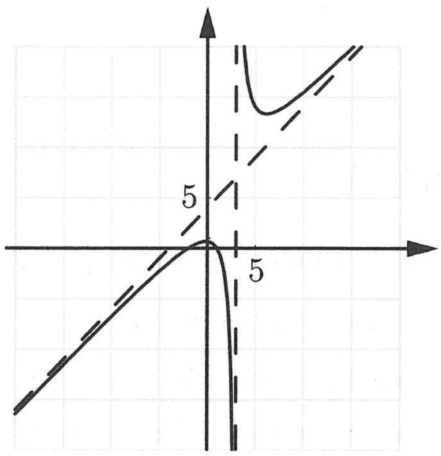
  Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{10}{x-3} \xrightarrow{<} 0$ et $f(x) \xrightarrow{<} x + 4$

  Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{10}{x-3} \xrightarrow{>} 0$ et $f(x) \xrightarrow{>} x + 4$

  La courbe se rapproche de la droite $y = x + 4$ quand x tend vers $\pm\infty$. Cette droite est appelée asymptote oblique. Le graphe de f admet donc la droite $y = x + 4$ comme asymptote oblique.

- *Graphe*



Exemple 3

Etude de la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$

- *Ensemble de définition*

  f n'est pas définie lorsque $x^2 - 2x = 0$, donc $D = \mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$

- *Intersection avec les axes et tableau des signes*

Le graphe de f *coupe l'axe* Ox *en* $I(-1\,;0)$

		-1		0		2	
x^3+1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2-2\,x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$		$+$

- *Comportement de la fonction au voisinage de* $x=0$ *et de* $x=2$

Si $x \xrightarrow{<} 0$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$
Si $x \xrightarrow{>} 0$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$

Si $x \xrightarrow{<} 2$, *alors* $f(x) \longrightarrow -\infty$
Si $x \xrightarrow{>} 2$, *alors* $f(x) \longrightarrow +\infty$

Le graphe de f *admet les droites d'équations* $x=0$ *et* $x=2$ *comme asymptotes verticales.*

- *Comportement asymptotique*

$$\begin{array}{lll|l}
x^3 & & +1 & x^2-2\,x \\ \cline{4-4}
x^3-2\,x^2 & & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 2\,x^2 & +1 & \\
 & 2\,x^2-2\,x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2\,x+1 &
\end{array}$$

Le quotient de la division de x^3+1 *par* $x^2-2\,x$ *est* $x+2$ *et le reste est* $2\,x+1$.

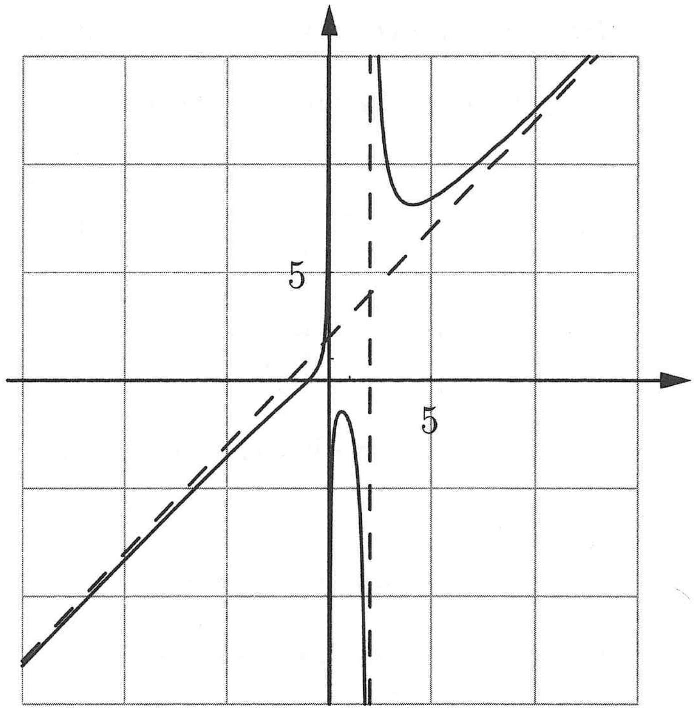
La fonction peut donc s'écrire $f(x) = x+2+\dfrac{2\,x+1}{x^2-2\,x}$

Si $x \longrightarrow -\infty$, *alors* $\dfrac{2\,x+1}{x^2-2\,x} \xrightarrow{<} 0$, *donc* $f(x) \xrightarrow{<} x+2$
Si $x \longrightarrow +\infty$, *alors* $\dfrac{2\,x+1}{x^2-2\,x} \xrightarrow{>} 0$, *donc* $f(x) \xrightarrow{>} x+2$

Le graphe de f *admet la droite* $y=x+2$ *comme asymptote oblique.*

L'expression $\dfrac{2\,x+1}{x^2-2\,x}$ *s'annule pour* $x=-\dfrac{1}{2}$, *donc le graphe de* f *coupe l'asymptote oblique au point* $I(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2})$

- *Graphe*



5.4 Exercices

1. a) Trouver une fonction homographique f dont le graphe passe par le point $A(-1\,;3)$, admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ et une asymptote verticale d'équation $x = -3$.

b) Trouver une fonction homographique f dont le graphe coupe l'axe Ox en $x = 3$, l'axe Oy en $y = -6$ et admet la droite $y = 2$ comme asymptote horizontale.

c) Trouver l'équation d'une hyperbole qui passe par les points $A(0\,;1)$, $B(2\,;0)$ et $C(-2\,;-\frac{1}{2})$.

d) Trouver une fonction homographique f dont le graphe passe par l'origine et admet le point $S(-2\,;3)$ comme centre de symétrie.

2. Etudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3\,x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^3 - 2\,x + 1}$

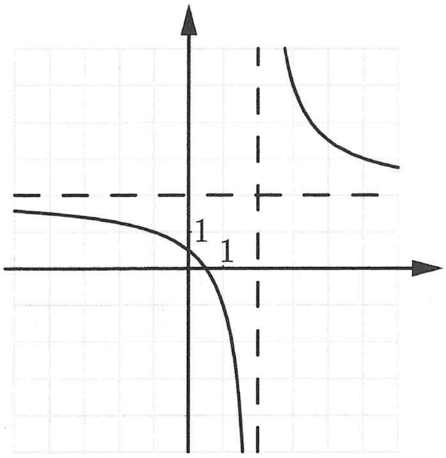
c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^5 + 2\,x}{2\,x^3 - x}$

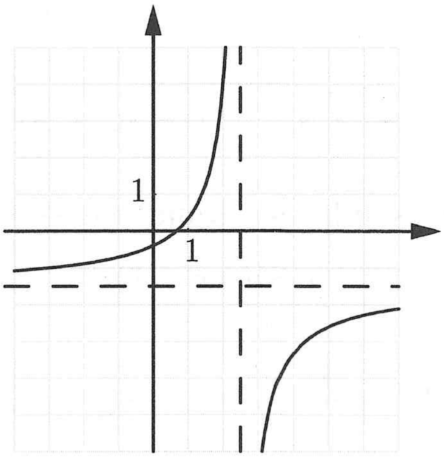
3. Donner l'ensemble de définition ainsi que les points d'intersection avec les axes, faire le tableau des signes, trouver les asymptotes et esquisser le graphe des fonctions homographiques suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2\,x - 3}{3\,x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{-2\,x + 1}{x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - 5\,x}{\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\,x}$

4. Donner l'expression d'une fonction homographique dont le graphe est donné ci-dessous.

a) 

b) 

5. Etudier le signe des fonctions données par

a) $f(x) = \dfrac{7x-8}{3x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(3x-1)}$

6. Etudier les fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+4}$ f) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3-9x}{x^3-1}$ j) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-5x^2+4}$

k) $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x+2|}$

7. Calculer

a) $\dfrac{x-1}{x^2-x-2} + \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

b) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+2x^2-x-2} - \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2} - \dfrac{2x+3}{x^2-1} + \dfrac{2}{x+2}$

d) $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} + 3$

8. Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2} = 0$ b) $\dfrac{2-3x}{2x-1} - \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{x-1} = 0$

c) $\dfrac{4}{x^2-3x} = \dfrac{x-1}{x-3} - 1$

9. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1-x$

e) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2} > 0$

f) $\dfrac{3\,x^2-7\,x-20}{x^2+4\,x-12} \leq 0$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

h) $\dfrac{13}{2\,x+1} \geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

i) $\dfrac{x-3}{-x^2+x-2} > 0$

j) $\dfrac{1}{x} \geq x$

k) $\dfrac{13}{2-x} \leq 7 - \dfrac{4}{3\,x+1}$

l) $\dfrac{12\,x^2-13\,x-14}{x-2} < 0$

m) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+3}$

n) $\dfrac{x}{3\,x-4} \geq \dfrac{1}{4}$

o) $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

p) $\dfrac{6}{4-x} - \dfrac{1}{1-x} \leq 1$

q) $1 > \dfrac{3}{2\,x-1} \leq 5$

r) $-2\,x \leq \dfrac{2\,x-1}{x} < 1$

10. Donner l'ensemble de définition des fonctions irrationnelles suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5\,x+7}}{3\,x^2-5\,x+2}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4\,x+3}{-x^3-2\,x^2+4\,x+8}}$

5.5 Réponses aux exercices du chapitre 5

1. a) $f(x) = \dfrac{2\,x+8}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{2\,x-6}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{-x+2}{5\,x+2}$ d) $f(x) = \dfrac{3\,x}{x+2}$

2. a) impaire b) ni paire ni impaire

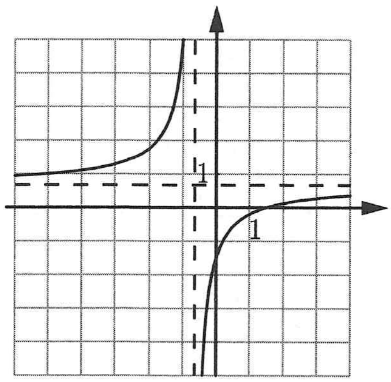
c) paire d) impaire

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{2}\,;0)$ et $(0\,;-\frac{3}{2})$
Tableau des signes

		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -\frac{2}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$

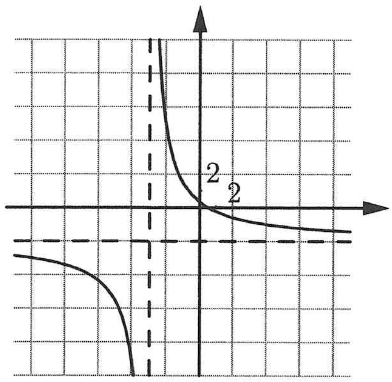


b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Points sur les axes : $(\frac{1}{2}\,;0)$ et $(0\,;\frac{1}{3})$
Tableau des signes

		-3		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -3$ et $y = -2$

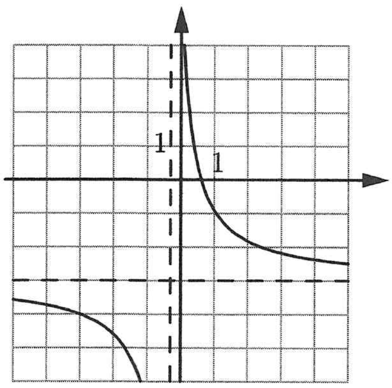


c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{10}\}$

Points sur les axes : $(\frac{3}{5}\,;0)$ et $(0\,;6)$
Tableau des signes

		$-\frac{3}{10}$		$\frac{3}{5}$	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$

Asymptotes : $x = -\frac{3}{10}$ et $y = -3$



4. a) $f(x) = \dfrac{2\,x-1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3\,x+2}{2\,x-5}$

5. a)

		$-\frac{1}{3}$		$\frac{8}{7}$	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

b)

		$-\frac{1}{3}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

c)

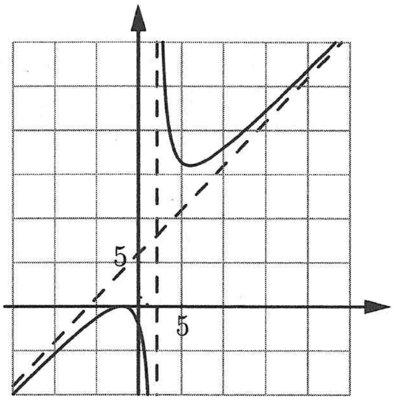
		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$	0	$+$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Points sur les axes : $(-2\,;0)$ et $(0\,;-2)$
Tableau des signes

		-2		2	
$f(x)$	$-$	0	$-$		$+$

Asymptotes : $x = 2$ et $y = x+6$

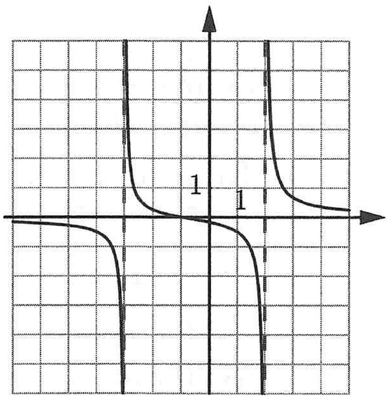


b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;2\}$

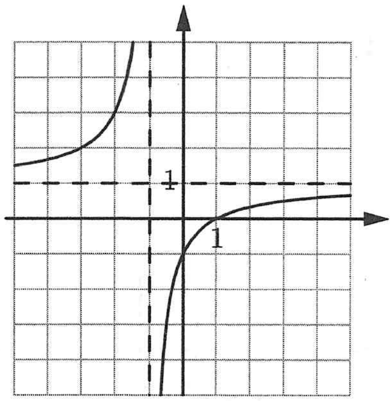
Points sur les axes : $(-1\,;0)$ et $(0\,;-\frac{1}{6})$
Tableau des signes

		-3		-1		2	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$

Asymptotes : $x = -3$, $x = 2$ et $y = 0$



c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

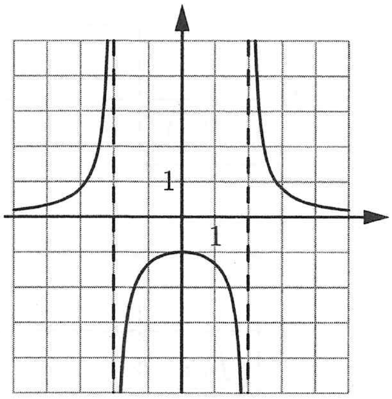


Points sur les axes : $(1\,;0)$ et $(0\,;-1)$
Tableau des signes

		-1		1	
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -1$, $y = 1$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$

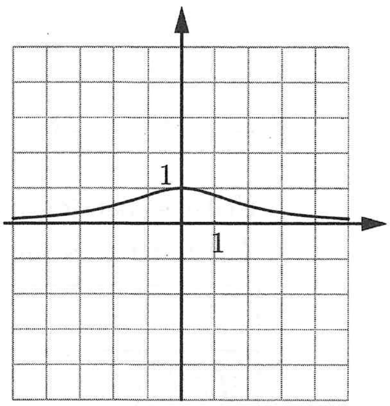


Point sur les axes : $(0\,;-1)$
Tableau des signes

		-2		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Asymptotes : $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

e) $D = \mathbb{R}$

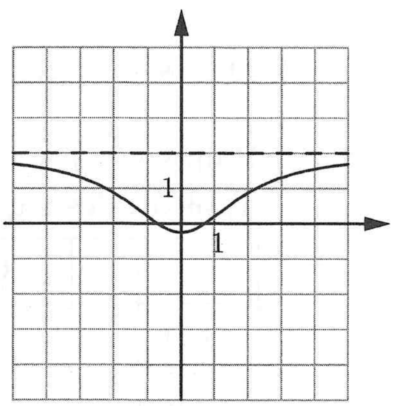


Point sur les axes : $(0\,;1)$
Tableau des signes

$f(x)$	$+$

Asymptote : $y = 0$

f) $D = \mathbb{R}$



Points sur les axes : $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ et $(0\,;-\frac{1}{4})$
Tableau des signes

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptote : $y = 2$

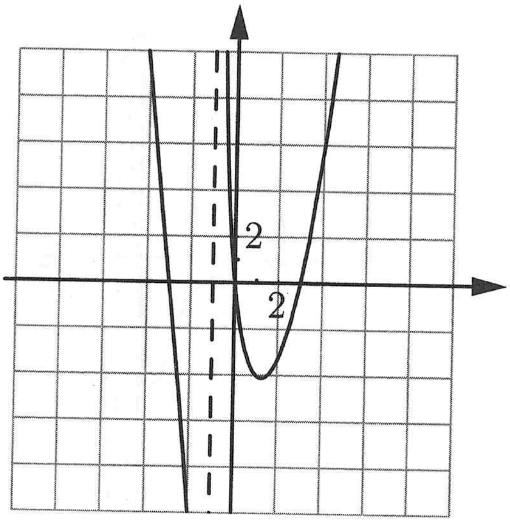
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		-1		0		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$

Asymptote : $x = -1$



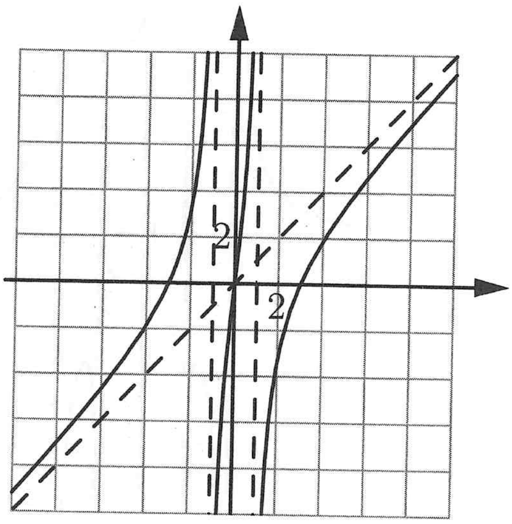
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		-1		0		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -1$, $x = 1$ et $y = x$



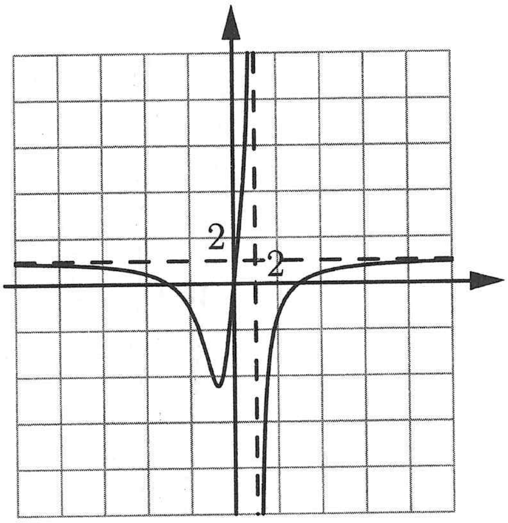
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Points sur les axes : $(-3\,;0)$, $(0\,;0)$ et $(3\,;0)$

Tableau des signes

		-3		0		1		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = 1$, $y = 1$



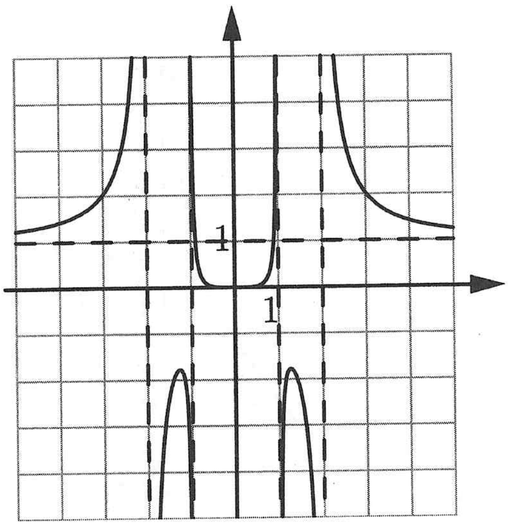
j) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

Point sur les axes : $(0\,;0)$

Tableau des signes

		-2		-1		0		1		2	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$	0	$+$		$-$		$+$

Asymptotes : $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ et $y = 1$

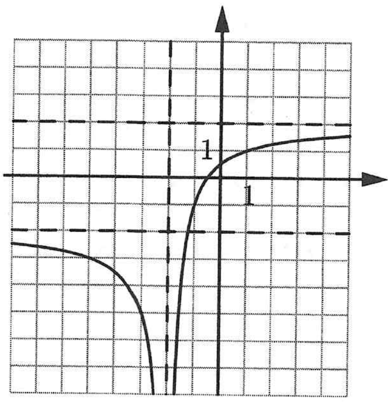


k) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Points sur les axes : $(-\frac{1}{2}\,;0)$ et $(0\,;\frac{1}{2})$
Tableau des signes

		-2		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$

Asymptotes : $x = -2$, $y = -2$ et $y = 2$



7. a) $\dfrac{2\,x^2+2}{x^3-2\,x^2-x+2}$ b) $\dfrac{4\,x-2}{x^3+2\,x^2-x-2}$

c) $\dfrac{x^2-8\,x-10}{x^3+2\,x^2-x-2}$ d) $\dfrac{3\,x^2}{x^2-1}$

8. a) $x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{4}$ b) $x = 0.54$ ou $x = 1.28$

c) $x = 2$

9. a) $S = \,]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$

b) $S = \,]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,0\,;\frac{3}{2}\,[\,\cup\,]\,\frac{3}{2}\,;2\,[$

c) $S = \,]-\infty;-2\,[\,\cup\,]-2;-1\,[\,\cup\,]\,1\,;\infty\,[$

d) $S = [-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$

e) $S = \,]\,1\,;2\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$

f) $S = \,]-6\,;-\frac{5}{3}\,]\cup]\,2\,;4\,]$

g) $S = \,]-\infty\,;-1\,[\cup[\,0\,;1\,[$

h) $S = \,]-\frac{1}{2}\,;4\,[$

i) $S = \,]-\infty\,;3\,[$

j) $S = \,]-\infty\,;-1\,]\cup]\,1\,;+\infty\,[$

k) $S = \,]-\infty\,;-\frac{1}{3}\,[\cup]\,2;+\infty\,[$

l) $S = \,]-\infty\,;-\frac{2}{3}\,[\cup]\,\frac{7}{4};2\,[$

m) $S = \,]-\infty\,;-3-\sqrt{2};\,[\cup]-3\,;-2\,[\cup]-3+\sqrt{2}\,;-1\,[$

n) $S = \,]-\infty\,;-4\,]\cup]\,\frac{4}{3};+\infty\,[$

o) $S = \,]-3\,;-1\,[\cup[\,2\,;+\infty\,[$

p) $S = \,]-\infty\,;1\,[\cup]\,4\,;+\infty\,[$

q) $S = \left[\frac{4}{5}\,;2\right[$

r) $S = \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,;1\right[$

10. a) $D = \left[-\frac{7}{5}\,;+\infty\right[\smallsetminus \left\{\frac{2}{3}\,;1\right\}$

b) $D = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-2\,;1\right] \cup \left]2\,;3\right]$