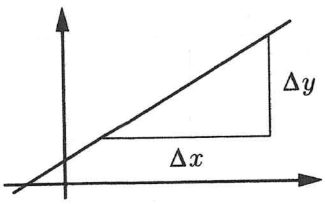
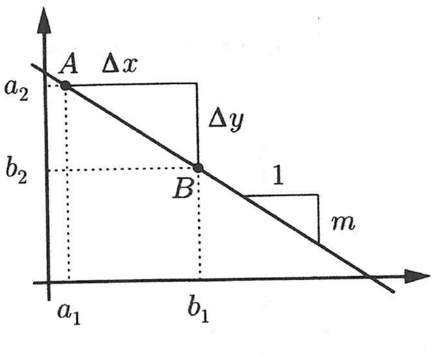
2. Fonctions du premier degré

2.1 Droites

Pente d'une droite



La **pente** d'une droite est le rapport $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement selon l'axe Ox et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe Oy.

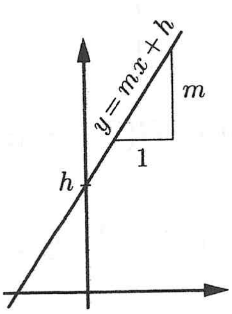


Pour trouver la pente m d'une droite dessinée, on peut choisir deux points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ sur la droite, déterminer la différence des abscisses $\Delta x = b_1 - a_1$ et la différence des ordonnées $\Delta y = b_2 - a_2$. La pente est égale au quotient

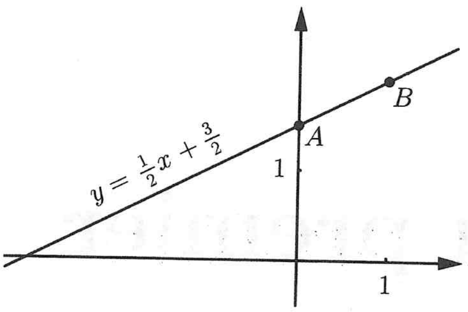
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est indépendant du choix des points A et B.

Fonction affine



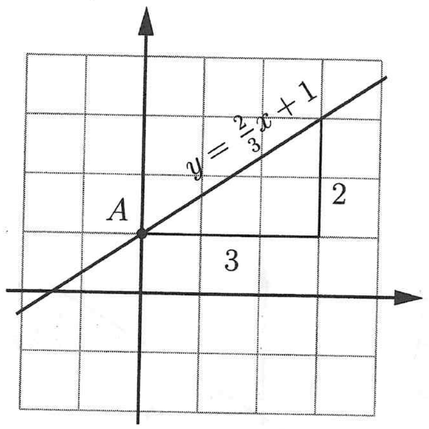
La fonction définie par $f(x) = mx + h$ est appelée **fonction affine**. Son graphe est une droite qui passe par le point $(0\,;h)$ et dont la pente vaut m.
Si $m \neq 0$, la fonction est du **premier degré**.



Exemple

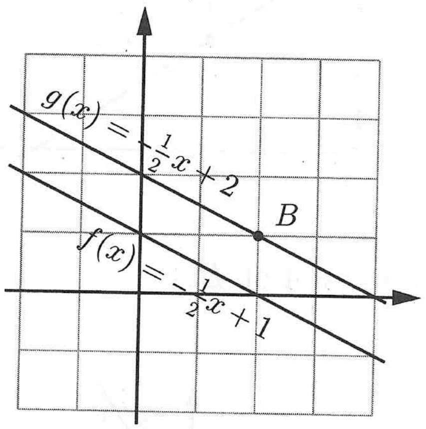
Le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}$ est une droite.
Pour dessiner cette droite, on peut calculer les coordonnées de deux points.
Si $x = 0$, alors $y = f(0) = \frac{3}{2}$. Le point $A(0\,;\frac{3}{2})$ est donc un point de la droite.
Si $x = 1$, alors $y = 2$. Le point $B(1\,;2)$ est donc un point de la droite.

Graphe à l'aide de la pente



Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = \frac{2}{3}\,x + 1$ est une droite.
Pour dessiner cette droite on peut calculer les coordonnées d'un point, par exemple le point $A(0\,;1)$ et utiliser le fait que la pente de cette droite vaut $\frac{2}{3}$.

Droites parallèles



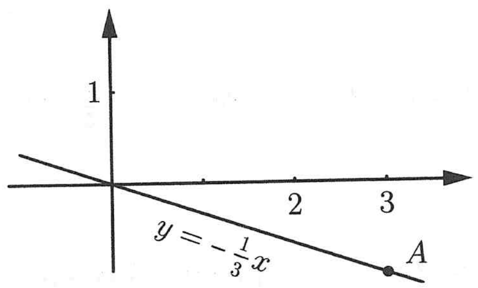
Cherchons la fonction g dont le graphe est la droite qui passe par le point $B(2\,;1)$ et qui est parallèle au graphe de la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 1$.
Deux droites parallèles ont même pente, donc $g(x) = -\frac{1}{2}\,x + h$.
Pour trouver la valeur de h, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées du point B.

Comme $B(2\,;1)$ appartient à la droite, $g(2) = 1$ et donc

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + h \implies h = 1 + 1 \implies h = 2$$

Fonction linéaire

La fonction définie par $f(x) = mx$ est appelée **fonction linéaire**. Son graphe est une droite qui passe par l'origine et dont la pente vaut m.



Exemple

Le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{3}x$ est une droite qui passe par l'origine.

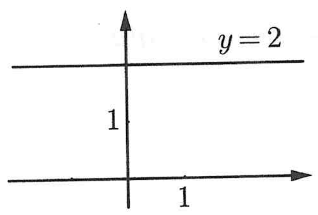
Pour la dessiner, on cherche un deuxième point.

Si $x = 3$, alors $y = f(3) = -1$. Le point $A(3\,;-1)$ est donc un point de la droite.

Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines.

Fonction constante

La fonction définie par $f(x) = h$ est appelée fonction **constante**. Son graphe est une droite parallèle à l'axe Ox qui passe par le point $(0\,;h)$.



Exemple

Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = 2$ est une droite horizontale et l'ordonnée de chacun de ses points est 2.

La pente de cette droite est nulle.

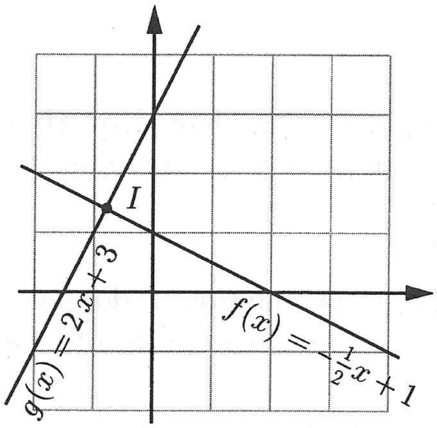
Bien que n'étant pas du 1$^{\text{er}}$ degré, les fonctions constantes sont des cas particuliers de fonctions affines.

2.2 Equations

Pour trouver le point d'intersection I des graphes de deux fonctions f et g, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Exemple 1

Les graphes des fonctions f et g données par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ se coupent en un point I.



$2\,x + 3 = -\frac{1}{2}\,x + 1$

$2\,x + \frac{1}{2}\,x = 1 - 3$

$\frac{5}{2}\,x = -2$

$5\,x = -4$

$x = -\frac{4}{5}$

$y = 2 \cdot (-\frac{4}{5}) + 3 = \frac{7}{5}$ *donc* $I(-\frac{4}{5}\,;\frac{7}{5})$

Exemple 2

Le graphe de la fonction f *donnée par* $f(x) = 2\,x + 3$ *coupe l'axe* Ox *en un point* I. *L'axe* Ox *est le graphe de la fonction constante nulle* g *définie par* $g(x) = 0$.

$2\,x + 3 = 0$

$2\,x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

L'équation a une seule solution.
Comme $y = 0$, *le point d'intersection est* $I(-\frac{3}{2}\,;0)$

Exemple 3

Les graphes des fonctions f *et* g *données par* $f(x) = 2\,x+3$ *et* $g(x) = 2\,x-2$ *sont deux droites parallèles.*

$2\,x + 3 = 2\,x - 2$

$2\,x - 2\,x = -3 - 2$

$0 = -5$

L'équation ne possède aucune solution.

Exemple 4

Les graphes des fonctions f *et* g *données par* $f(x) = 2\,x + 6$ *et* $g(x) = 2(x + 3)$ *sont deux droites confondues.*

$2\,x + 6 = 2(x + 3)$

$0 = 0$

Toute valeur de x *est ici solution. L'équation possède donc une infinité de solutions.*
Par exemple, si $x = 1$, *alors* $y = 5$; *le point* $A(1\,;5)$ *appartient au graphe de* f *et à celui de* g *(évidemment, les deux graphes sont les mêmes).*

2.3 Systèmes de deux équations

On peut trouver l'expression $f(x) = m\,x + h$ d'une fonction affine, si l'on connaît deux points A et B de son graphe en résolvant un système de deux équations à deux inconnues m et h.

Cherchons par exemple la fonction donnée par $f(x) = m\,x + h$ dont le graphe est une droite d qui passe par les points $A(2\,;7)$ et $B(-1\,;1)$

$A(2\,;7)$ appartient à la droite d'où $\quad m \cdot 2 \ + h = 7$

$B(-1\,;1)$ appartient à la droite d'où $\quad m \cdot (-1) + h = 1$

Le système $\begin{cases} 2m + h = 7 \\ -m + h = 1 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues.

On élimine h par soustraction

$$\begin{array}{rcl|r} \left\{\begin{array}{l} 2m + h = 7 \\ -m + h = 1 \end{array}\right. & & & \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline 3m \qquad = 6 & & & \end{array}$$

On obtient $m = 2$ et, en remplaçant m par 2 dans l'une des deux équations, on trouve $h = 3$.

La fonction cherchée est donc donnée par $f(x) = 2\,x + 3$

Tout système $\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \end{cases}$ de 2 équations à 2 inconnues x et y peut être résolu de façon analogue.

Exemple 1

Résolvons le système $\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -6 \\ 3\,x - 2\,y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|r} \left\{\begin{array}{l} 2\,x - 3\,y = -6 \\ 3\,x - 2\,y = 1 \end{array}\right. & \begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array} \\ \hline -5\,y = -20 & \end{array}$$

On obtient $y = 4$ et, en remplaçant y par 4 dans la 1re équation, on trouve $x = 3$.

Le système possède donc la solution $(3\,;4)$.

Exemple 2

Résolvons le système $\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -6 \\ 2\,x - 3\,y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|r} \left\{\begin{array}{l} 2\,x - 3\,y = -6 \\ 2\,x - 3\,y = 1 \end{array}\right. & \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline 0 = -7 & \end{array}$$

Le système ne possède aucune solution.

Exemple 3

Résolvons le système $\begin{cases} 4x - 6y + 12 = 0 \\ 6x - 9y + 18 = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l} \begin{cases} 4x - 6y + 12 = 0 \\ 6x - 9y + 18 = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \\ \hline \qquad\qquad 0 = 0 & \end{array}$$

Le système possède une infinité de solutions.

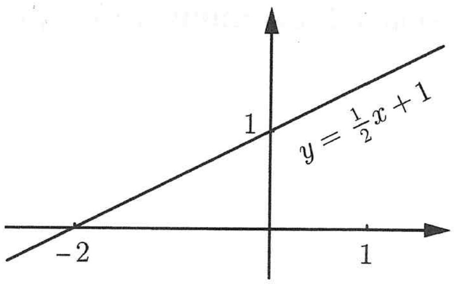
Par exemple, les couples $(0;2)$, $(-3;0)$ *et* $(-6;-2)$ *sont solutions du système.*

Si $x = t$, *on obtient* $y = \dfrac{2t+6}{3}$.

Ainsi, tout couple de la forme $\left(t;\dfrac{2t+6}{3}\right)$ *est solution.*

2.4 Inéquations

Pour résoudre l'inéquation $ax + b > 0$, on peut observer le graphe de la fonction donnée par $f(x) = ax + b$.



Exemple

Soit l'inéquation $\frac{1}{2}x + 1 > 0$

La fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ *coupe l'axe* Ox *en* $x = -2$

En observant le graphe de f *esquissé ci-contre, on constate que*

$$\tfrac{1}{2}x + 1 > 0 \;\; si \;\; x > -2$$

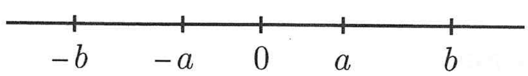
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $S =]-2;+\infty[$

Il est également possible de résoudre cette inéquation algébriquement :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{2}x + 1 & > & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}x & > & -1 & \cdot 2 \\ x & > & -2 & \end{array}$$

La résolution d'une inéquation du 1^{er} degré est analogue à celle d'une équation du 1^{er} degré, cependant il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre négatif.

En effet, un changement de signe inverse toute inégalité.



$$a < b \iff -a > -b$$

Exemple 1

$$\begin{array}{rcl|l} -x-2 & > & 0 & +2 \\ -x & > & 2 & \cdot(-1) \\ x & < & -2 & \end{array}$$

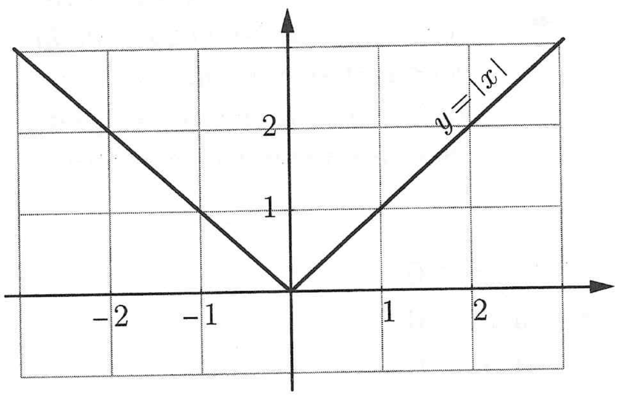
$$S =]-\infty\,;-2[$$

Exemple 2

$$\begin{array}{rcl|l} 3-2x & \leq & 0 & -3 \\ -2x & \leq & -3 & \cdot(-\frac{1}{2}) \\ x & \geq & \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$S = [\,\tfrac{3}{2}\,;+\infty[$$

2.5 Fonctions définies par morceaux

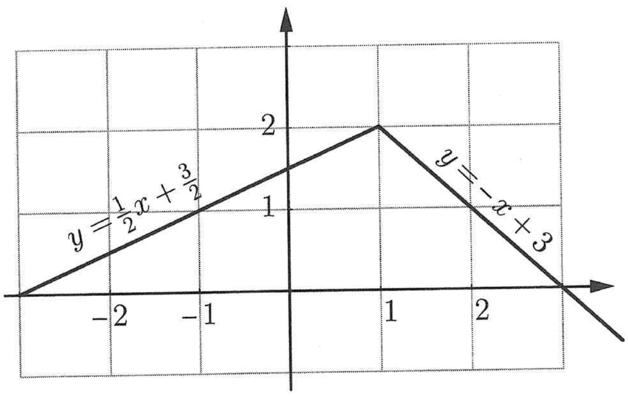


Le graphe de la fonction **valeur absolue** donnée par $f(x) = |\,x\,|$ est représenté ci-contre.
On constate que ce graphe est formé de deux demi-droites, la demi-droite d'équation $y = -x$ pour les x négatifs et la demi-droite d'équation $y = x$ pour les x positifs.

On peut donner une expression de cette même fonction sans utiliser le symbole *valeur absolue*, en séparant, dans la définition de f, les x positifs des x négatifs.

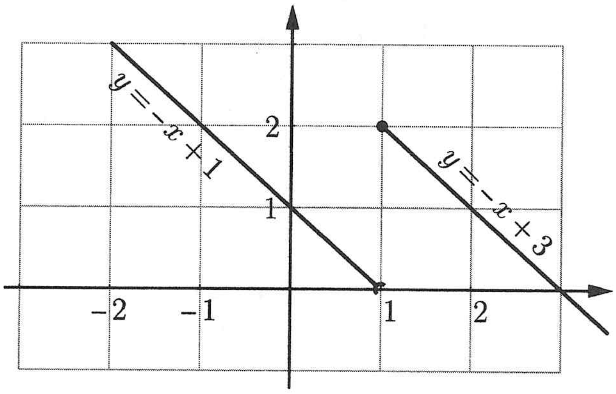
$$|\,x\,| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ \;\;x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction donnée de cette façon est dite **définie par morceaux** ou définie par intervalles.



Exemple 1

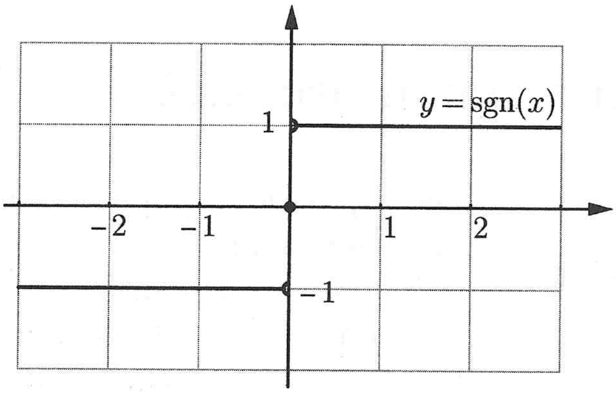
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \; si \; x < 1 \\ -x + 3 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$



Exemple 2

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \textit{si } x < 1 \\ -x+3 & \textit{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction présente un ***saut*** *en* $x = 1$.



Exemple 3

La fonction ***signe*** *donnée par* $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ *prend la valeur* 1 *si* x *est positif, la valeur* -1 *si* x *est négatif et la valeur* 0 *si* x *est nul. Elle est définie par morceaux et peut être donnée par l'expression :*

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2.6 Exercices

1. Dessiner les graphes des fonctions

$$f(x) = -2\,x + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = \tfrac{1}{2}\,x - 3$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = g(x)$ c) $f(x) = x$

d) $f(x) < 0$ f) $f(x) > g(x)$ g) $f(x) \geq x$

2. a) Estimer les pentes des cinq droites dessinées ci-contre.

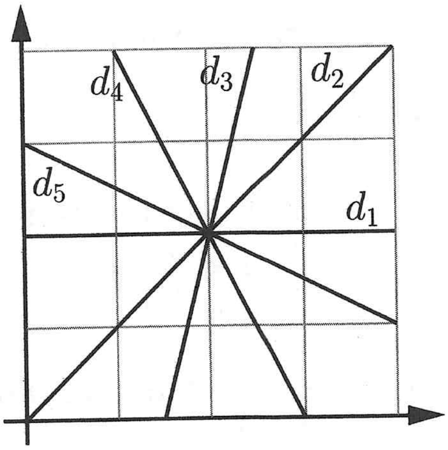
b) Dessiner une droite

1) de pente 5

2) de pente -10

3) de pente $-\frac{1}{3}$

c) Existe-t-il une fonction dont le graphe est une droite verticale ?



3. On donne la fonction affine $a(x) = 2\,x - 1$ et la fonction linéaire $l(x) = 2\,x$.

a) Dessiner les graphes de a et de l.

b) Vérifier que $l(2) + l(3) = l(5)$

c) Vérifier que $l(5 \cdot x) = 5 \cdot l(x)$

d) Vérifier que $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$ et que $l(k \cdot x) = k \cdot l(x)$

e) La fonction a possède-t-elle ces mêmes propriétés ?

4. Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$ b) $3\,x + 8 = 2\,(x + 4)$

c) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$ d) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$

e) $\dfrac{t-5}{3} = \dfrac{2-t}{2}$ f) $\sqrt{2}\,x = 1 + x$

g) $\sqrt{6} = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3}$ h) $3\,x - \dfrac{4-x}{2} = x - \dfrac{1}{3}$

5. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2\,x + 5 \geq 1$ b) $5 - 2\,x \geq 1$

c) $-4\,a - 5 < a + 5$ d) $-(7 - 2\,x) - 8 > 0$

e) $1 - 3\,x \leq \frac{1}{3}\,x + 2$ f) $3\,(1 - x) > \frac{2}{5}\,x$

6. Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ 3x-y=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x+4=-6y \\ 1-x=6y \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-4y=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ x+2y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=10 \end{cases}$

7. Résoudre les systèmes d'équations en fonction du paramètre t :

a) $\begin{cases} x+y=t \\ x-y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=t \\ 3x-y=2t \end{cases}$

8. Résoudre les systèmes d'inéquations :

a) $\begin{cases} 3-x<\frac{x}{3} \\ 1+4x\geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3-x\leq 2x+4 \\ 2x-1<-x \end{cases}$

9. a) Trouver la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(7\,;-2)$ et $B(-3\,;1)$.

b) Trouver la fonction affine dont le graphe coupe l'axe Ox en $I(-5\,;0)$ et dont la pente vaut $-\frac{5}{8}$.

c) Trouver la fonction affine telle que $f(2)=5$ et dont le graphe passe par le point $A(5\,;5)$.

d) Trouver l'abscisse du point $C(x\,;10)$ sachant que les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;-2)$ et C sont alignés.

10. Dessiner les graphes des fonctions affines f telles que :

a) $f(-1)=2$ et la pente du graphe de f vaut -2

b) $f(0)=-1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$

c) $f(2)=0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$

d) $f(3)=1$ et la pente du graphe de f vaut 1

e) $f(4)=5$ et la pente du graphe de f vaut 0

11. La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la fonction $v(t)=9.8\cdot t+v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse

b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t=4\,\mathrm{s}$ sachant qu'au temps $t=2\,\mathrm{s}$ sa vitesse était de 21 m/s ?

12. Une barre métallique mesure 45 cm à une température de 15 °C et 45, 2 cm à une température de 51 °C. En admettant que l'allongement de la barre est proportionnel à l'élévation de la température, on demande :

a) La longueur de la barre à une température de 60 °C

b) La température à laquelle la barre mesure 44, 7 cm.

13. Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

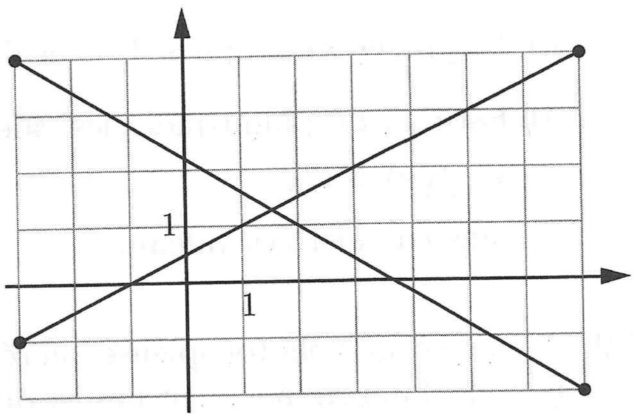
14. Une autoroute de 120 km relie les villes A et B. Un habitant de A se rend à la ville B à la vitesse moyenne de 60 km/h. A quelle vitesse doit-il revenir de B à A s'il veut que sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour soit de :

a) 80 km/h b) 100 km/h c) 120 km/h

15. Un garçon tond le gazon en 90 minutes, mais sa sœur peut le faire en 60 minutes. Combien leur faudrait-il de temps s'ils travaillaient ensemble avec deux tondeuses ?

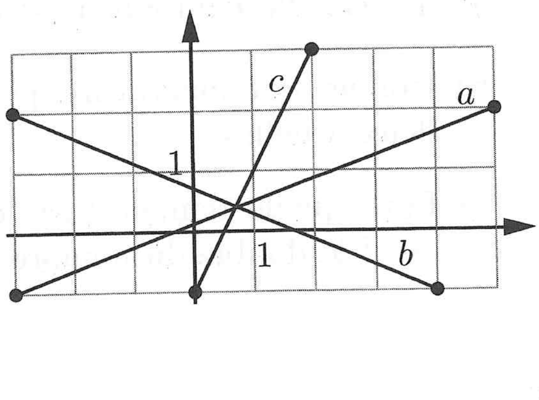
16. a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-contre.

b) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.



c) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point $P(2\,;-1)$.

17. Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



18. On considère la fonction donnée par $f(x) = a\,x + a$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Dessiner le graphe de f pour quelques valeurs de a.

b) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, le graphe de $f(x) = a\,x + a$ passe-t-il par le point $A(3\,;8)$?

c) Vérifier que, pour toute valeur de a, le graphe de f passe par un même point B dont on donnera les coordonnées.

19. Soit $f(x) = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = -\frac{2}{5}\,x + 3$

a) Trouver les fonctions :

1) ${}^r f$	2) ${}^r g$	3) $f \circ g$
4) $g \circ f$	5) ${}^r(f \circ g)$	6) ${}^r(g \circ f)$

b) Trouver les valeurs de x telles que :

1) $f(x) = 0$	2) $g(x) = 0$	3) $f(x) = 3$
4) $g(x) = 5$	5) $f(x) = x$	6) $g(x) = -2\,x$
7) $g(2\,x) = 2$	8) $f(3\,x) = 3\,x$	9) $f(x-1) = x - 1$

c) Esquisser les graphes de f et de g.

d) Estimer graphiquement les valeurs x et $y = f(x)$ telles que :

1) $f(x) = g(x)$ 2) $f(x) = 2\,g(x)$

puis calculer ces valeurs.

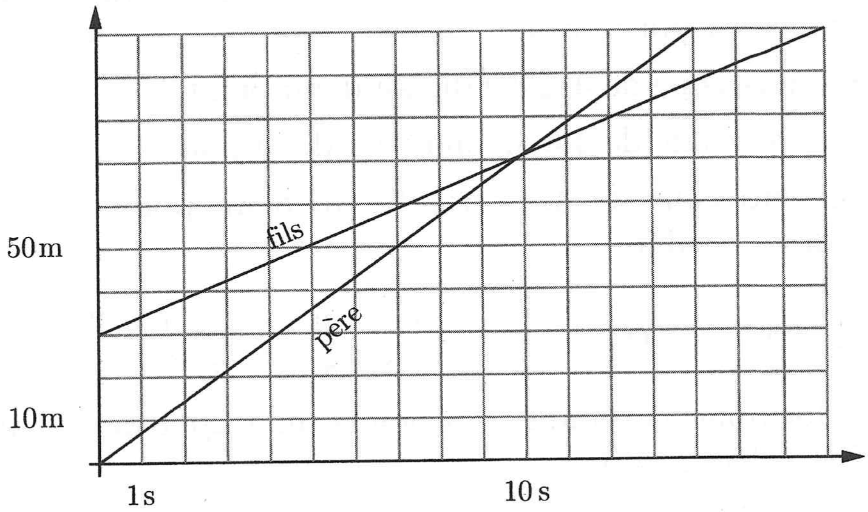
20. A l'aide d'une photocopieuse, on réduit un document à 80 %. Avec quel facteur d'agrandissement faut-il photocopier la copie pour obtenir une nouvelle copie identique à l'original ?

21. La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

22. Un père défie son fils au 100 m et lui laisse 30 m d'avance. Les graphes simplifiés de cette course sont donnés ci-dessous.



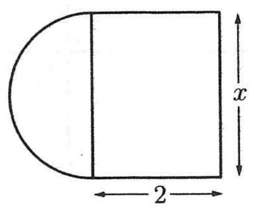
a) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

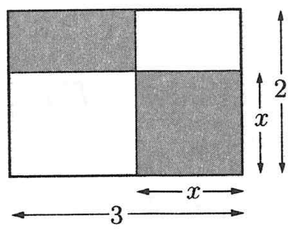
c) Quelle a été la vitesse du père, celle du fils ?

d) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

23. Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque ?



24. Pour quelle valeur de x le carré et le rectangle grisés ont-ils la même aire ?



25. Pour un travail écrit comptant 12 points, la note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 12 points.

a) Trouver la fonction affine qui donne la note en fonction du nombre de points.

b) Le maître A décide de donner la note 6 à partir de 10 points (0 point donne la note 1 et 10 points et plus la note 6).
Le maître B décide de commencer de noter à 2 (0 point donne la note 2 et 12 points la note 6).
Pour quels résultats est-on avantagé par le maître A plutôt que par le maître B ?

26. Un élève a obtenu les notes 4.5 , 4 , 3 et 4 .
Quelle note minimale (entre 1 et 6 au demi point) doit-il obtenir au prochain test pour avoir

a) une moyenne de 4 arrondie au demi point ?

b) une moyenne de 4.5 arrondie au demi point ?

c) une moyenne de 4.5 arrondie au demi point si le prochain test compte double ?

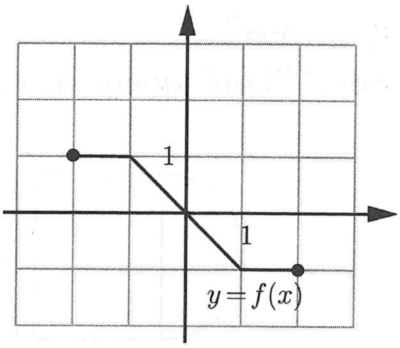
27. Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

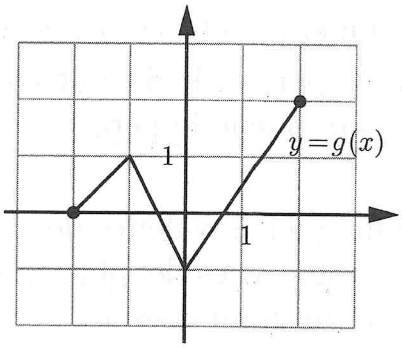
a) Déterminer l'ordonnée des points du graphe de f d'abscisse $x = 2$, $x = -1$ et $x = 4$.

b) Déterminer l'abscisse des points du graphe de f d'ordonnée 1.

c) Déterminer l'abscisse des points du graphe de f d'ordonnée 5.

28. Déterminer $f(x)$ et $g(x)$.

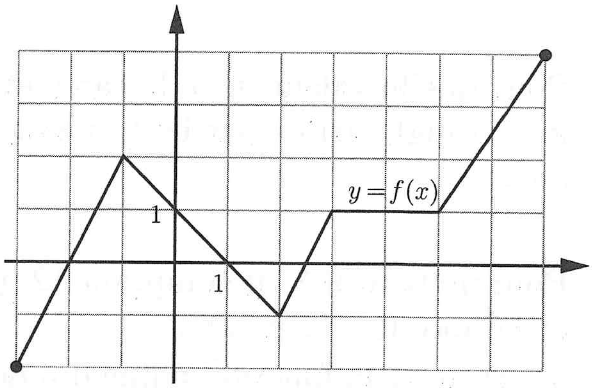




29. Déterminer $f(x)$, puis résoudre :

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) > 1$



30. On donne la fonction : $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;-1] \\ 2x & \text{si} \quad x \in \,]-1\,;2] \\ \frac{1}{2}x+3 & \text{si} \quad x \in \,]2\,;+\infty[\end{cases}$

a) Dessiner le graphe de f

b) Résoudre les équations $f(x) = 1$ et $f(x) = x$

c) Résoudre l'inéquation $f(x) < x$

31. Pour quelle valeur de a le graphe de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{si} \quad x \leq a \\ x - 1 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$ forme-t-il une ligne brisée ?

32. Ecrire les fonctions suivantes sans utiliser de valeurs absolues, puis esquisser les graphes :

a) $f(x) = |x - 5|$

b) $f(x) = -3|x| + 6$

c) $f(x) = |-2x + 3| - |x + 2|$

d) $f(x) = \big||x| - 2\big|$

e) $f(x) = |x - 5| + |x + 1| - |2x - 3|$

33. Dessiner les graphes de

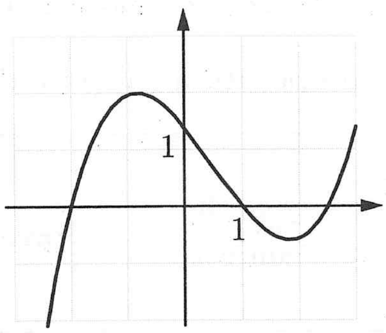
a) $f(x) = \operatorname{sgn}(2x + 1)$

b) $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(1 - x)$

34. A partir du graphe de f esquissé ci-contre, dessiner les graphes de

a) $g(x) = \operatorname{sgn}\big(f(x)\big)$

b) $h(x) = f\big(\operatorname{sgn}(x)\big)$

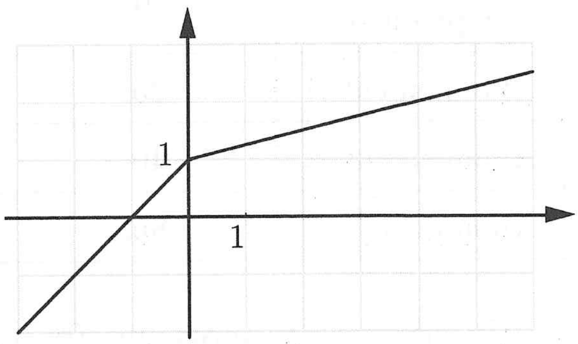


35. A partir du graphe de f esquissé ci-contre

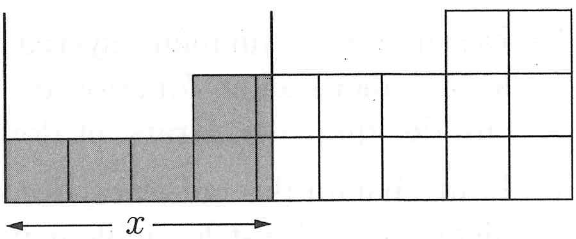
a) Dessiner la réciproque ${}^{r}\!f$ de f

b) Déterminer $f(x)$ et ${}^{r}\!f(x)$

c) Résoudre l'équation $f(x) = {}^{r}\!f(x)$



36. L'unité de longueur étant le côté des carreaux du quadrillage, on désigne par $f(x)$ l'aire du domaine grisé, pour $0 \leq x \leq 9$.



a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ et $f(9)$.

b) Déterminer $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0\,;3]$, $]3\,;7]$ et $]7\,;9]$.

c) Représenter la fonction f.

d) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 10$ et $f(x) = 15$, puis contrôler les résultats à l'aide d'un calcul.

37. Un nombre entier de six chiffres commence par le chiffre 1. Si l'on déplace ce 1 à la droite du nombre, on obtient un nouveau nombre égal au triple du nombre initial. Quel est ce nombre initial ?

38. Une balle est tirée horizontalement sur une cible. Le tireur entend le bruit de l'impact 1.5 s plus tard. Si la vitesse de la balle est de 990 m/s et la vitesse du son de 330 m/s, à quelle distance de la cible se trouve le tireur ?

39. Un jour, j'ai ramassé tellement de champignons que j'ai eu de la peine à les porter. En fait, je ne portais pratiquement que de l'eau, car les champignons frais contiennent 90 % d'eau. Je les ai mis à sécher. Après un certain temps, ils pesaient 15 kg de moins et contenaient encore 60 % d'eau. Quelle quantité de champignons ai-je ramassé ?

40. Un opérateur propose différents contrats pour la téléphonie mobile :

Type de contrat	Taxe mensuelle	Minutes de conversation gratuite	Prix par minute de communication supplémentaire
Carte à prépaiement	0.–	0	–.80
Abonnement A	25.–	15	–.55
Abonnement B	40.–	25	–.45
Abonnement C	85.–	120	–.40

a) Un client a, en moyenne, 90 minutes de communication par mois. Calculer, pour chacun des contrats, la somme qu'il doit payer.

b) Dessiner, dans un même système d'axes, les graphes qui représentent le prix mensuel en fonction du temps de communication pour chacun des quatre contrats, et donner les expressions de ces fonctions.

c) Pour chacun des contrats, donner l'intervalle de temps de communication, où il est le meilleur marché.

d) L'opérateur de télécommunications offre, pour la carte à prépaiement, une réduction de 25 % aux périodes à *tarif réduit*. Un client téléphone en moyenne 90 minutes par mois. Quelle partie de la communication doit être au moins effectuée durant les périodes à tarif réduit pour que la carte à prépaiement soit meilleur marché que la l'abonnement A ?

41. Une caisse d'assurance maladie propose à ses clients différentes franchises

Pour une franchise de 230.– , la prime annuelle s'élève à 4 710.–

Pour une franchise de 400.– , la prime annuelle s'élève à 4 630.–

Pour une franchise de 600.– , la prime annuelle s'élève à 4 470.–

Pour une franchise de 1 200.– , la prime annuelle s'élève à 3 990.–

Pour une franchise de 1 500.– , la prime annuelle s'élève à 3 750.–

En plus de la franchise, une participation de 10 % aux frais qui dépassent la franchise reste à la charge de l'assuré. Cette participation est limitée à 600.– par année.

a) Quelle franchise un assuré doit-il choisir pour obtenir la solution la moins chère en supposant que ses factures médicales totaliseront 1 000.– l'an prochain ?

b) Quelle franchise un assuré doit-il choisir pour obtenir la solution la moins chère en supposant que ses factures médicales totaliseront 8 000.– l'an prochain ?

c) Tracer le graphe qui donne la dépense totale en fonction des coûts de santé pour un assuré ayant une franchise de 600.– . On admettra que les coûts peuvent varier entre 0 et 10 000 francs par an.

d) Donner l'expression de la fonction qui, pour une franchise de 1 500.–, donne la dépense totale en fonction des coûts de santé.

e) Donner l'expression de la fonction qui, pour une franchise f et une prime p, donne la dépense totale en fonction des coûts de santé.

42. Activité tableur

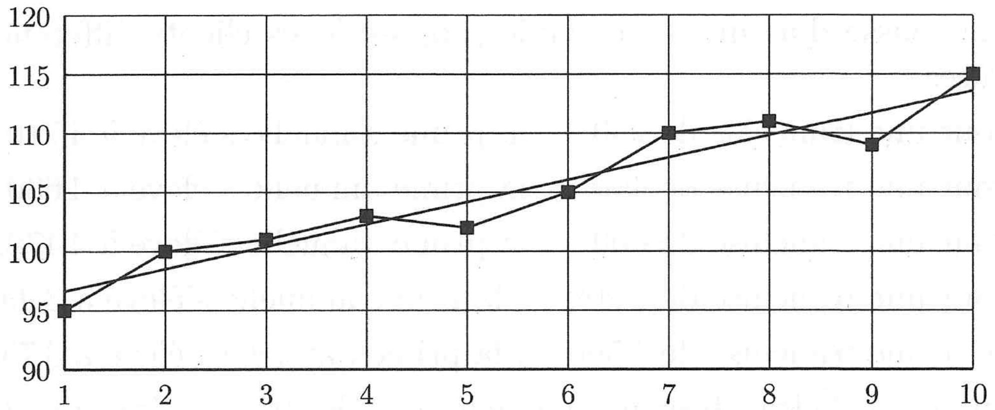
Le tableau suivant décrit le cours hebdomadaire d'une action pour les 10 premières semaines de l'année écoulée.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur	95	100	101	103	102	105	110	111	109	115

a) Faire dessiner, avec le tableur, les segments de droites qui représentent graphiquement cette situation.

b) Ajouter au dessin le graphe de la droite qui décrit au mieux cette situation. Cette droite est appelée *droite de régression linéaire.*

On obtient un graphique semblable au dessin ci-dessous



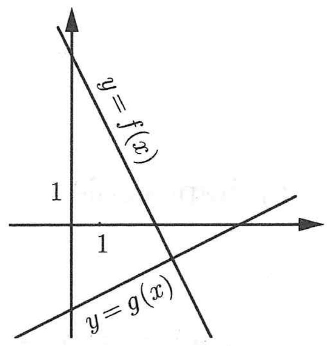
c) Estimer, en observant le dessin, l'expression de la droite de régression linéaire.

d) Quelle est la plus grande différence entre le cours de l'action et la valeur donnée par la droite de régression linéaire ?

e) En supposant que l'action poursuive la même tendance, quel sera son cours à la vingtième semaine ?

f) Sachant que, au cours de la 20^e semaine, l'action vaut 100 francs, faire dessiner une nouvelle droite de régression linéaire qui tient compte de cette donnée supplémentaire.
Quelle valeur cette nouvelle droite de régression, donne-t-elle pour le cours de l'action à la 10^e semaine ?

2.7 Réponses aux exercices du chapitre 2

1. 

a) $x = 3$ b) $x = \frac{18}{5}$

c) $x = 2$ d) $x > 3$

e) $x < \frac{18}{5}$ f) $x \leq 2$

2. a) $m_1 = 0$ $m_2 = 1$ $m_3 = 4$ $m_4 = -2$ $m_5 = -0.5$

c) Non

4. a) $x = -23$ b) $x = 0$

c) $x = -\frac{3}{8}$ d) tout x est solution

e) $t = \frac{16}{5}$ f) $x = \sqrt{2} + 1 \cong 2.41$

g) $u = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{2} \cong 0.507$ h) $x = \frac{2}{3}$

5. a) $x \geq -2$ b) $x \leq 2$ c) $a > -2$

d) $x > \frac{15}{2}$ e) $x \geq -\frac{3}{10}$ f) $x < \frac{15}{17}$

6. a) $(x\,;y) = (\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$ b) $(x\,;y) = (15\,;35)$

c) $(x\,;y) = (-1\,;\frac{1}{3})$ d) $(x\,;y) = (2\,t+1\,;t)\,,\ t \in \mathbb{R}$

e) Aucune solution f) $(x\,;y) = (2\,;0)$

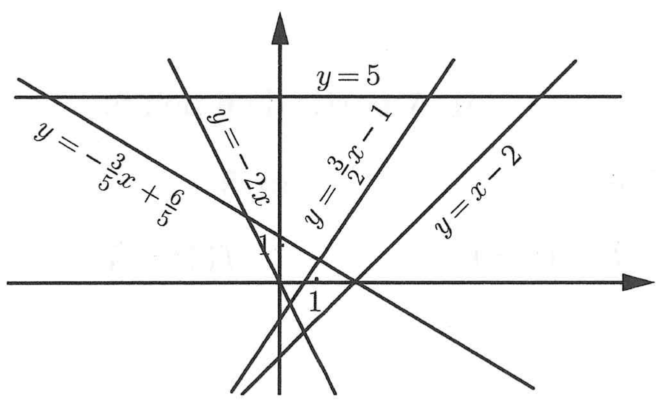
7. a) $(x\,;y) = (\frac{t}{2}\,;\frac{t}{2})$ b) $(x\,;y) = (3\,t\,;7\,t)$

8. a) $x > \frac{9}{4}$ b) $x \in [-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}[$

9. a) $f(x) = -\frac{3}{10}\,x + \frac{1}{10}$ b) $f(x) = -\frac{5}{8}\,x - \frac{25}{8}$

c) $f(x) = 5$ d) $x = -5$

10.



11. a) $t(v) = \dfrac{(v - v_0)}{9.8}$ b) 40.6 m/s

12. a) 45.25 cm b) $-39\,^\circ$C

13. 340 francs

14. a) 120 km/h b) 300 km/h c) impossible

15. 36 minutes

16. a) $I(\frac{17}{11}\,;\frac{14}{11})$ b) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$ c) $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

17. Elles forment un triangle.

18. b) $a = 2$ c) $B(-1\,;0)$

19. a) 1) ${}^{r}f(x) = 3\,x + \frac{3}{2}$ 2) ${}^{r}g(x) = -\frac{5}{2}\,x + \frac{15}{2}$

3) $(f \circ g)(x) = -\frac{2}{15}\,x + \frac{1}{2}$ 4) $(g \circ f)(x) = -\frac{2}{15}\,x + \frac{16}{5}$

5) ${}^{r}(f \circ g)(x) = -\frac{15}{2}\,x + \frac{15}{4}$ 6) ${}^{r}(g \circ f)(x) = -\frac{15}{2}\,x + 24$

b) 1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{15}{2}$ 3) $\frac{21}{2}$

4) -5 5) $-\frac{3}{4}$ 6) $-\frac{15}{8}$

7) $\frac{5}{4}$ 8) $-\frac{1}{4}$ 9) $\frac{1}{4}$

d) 1) $(x\,;y) = (\frac{105}{22}\,;\frac{12}{11})$ 2) $(x\,;y) = (\frac{195}{34}\,;\frac{24}{17})$

20. 125 %

21. a) -40 b) $160\,^\circ$C

22. a) Le père a gagné avec 3 secondes d'avance.

b) $\cong 12.35$ m c) $\cong 7.14$ m/s , $\cong 4.12$ m/s d) $\cong 70.83$ m

23. $x < \frac{16}{\pi}$

24. $\frac{6}{5}$

25. a) $n(x) = \frac{5}{12}\,x + 1$ b) A partir de 6 points

26. a) 3.5 b) 6 c) 5

27. a) $f(2) = 3$ $f(-1) = 6$ $f(4) = 7$

b) aucun

c) 0 et 3

28. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-2\,;-1\,[\\ -x & \text{si} \quad x \in [-1\,;1\,[\\ -1 & \text{si} \quad x \in [1\,;2] \end{cases}$

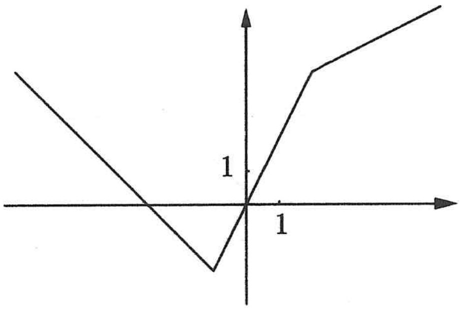
$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \in [-2\,;-1\,[\\ -2x - 1 & \text{si} \quad x \in [-1\,;0\,[\\ \frac{3}{2}x - 1 & \text{si} \quad x \in [0\,;2] \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x \in [-3\,;-1\,[\\ -x + 1 & \text{si} \quad x \in [-1\,;2\,[\\ 2x - 5 & \text{si} \quad x \in [2\,;3\,[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3\,;5\,[\\ \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} & \text{si} \quad x \in [5\,;7] \end{cases}$

a) $x = -1$ et $x = \frac{17}{3}$

b) $x \in \left]-\frac{3}{2}\,;0\right[\cup \left]5\,;7\right]$

30.



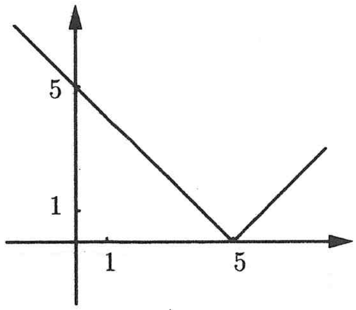
b) $x = -4$ et $x = 0.5$

$x = -1.5$, $x = 0$ et $x = 6$

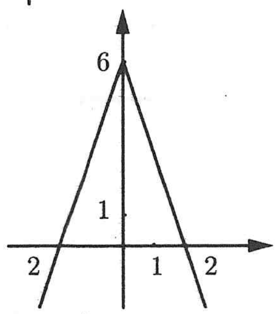
c) $x \in \left]-1.5\,;0\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$

31. $a = 4$

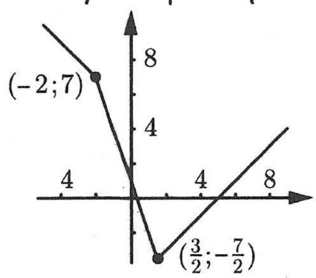
32. a) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$



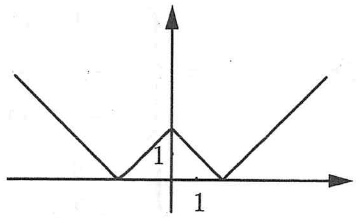
b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x < 0 \\ -3x + 6 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



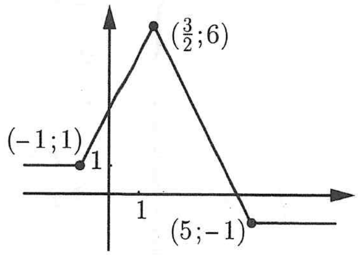
c) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-2\right[\\ -3x + 1 & \text{si } x \in \left[-2\,;\frac{3}{2}\right[\\ x - 5 & \text{si } x \in \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[\end{cases}$



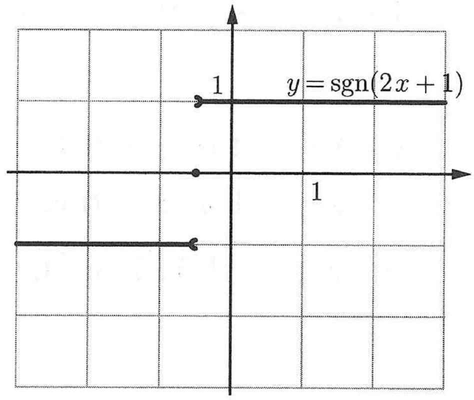
d) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x \in \left]-\infty\,;-2\right[\\ x+2 & \text{si} \quad x \in \left[-2\,;0\right[\\ -x+2 & \text{si} \quad x \in \left[0\,;2\right[\\ x-2 & \text{si} \quad x \in \left[2\,;+\infty\right[\end{cases}$



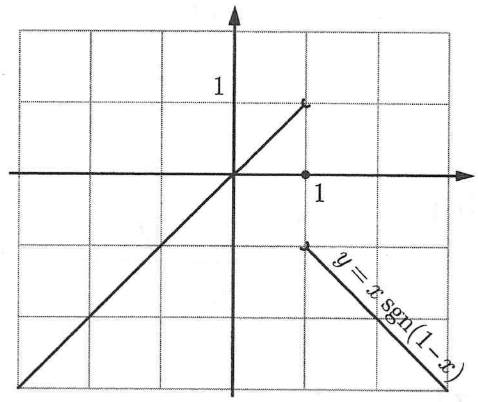
e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left]-\infty\,;-1\right[\\ 2x+3 & \text{si} \quad x \in \left[-1\,;\frac{3}{2}\right[\\ -2x+9 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{3}{2}\,;5\right[\\ -1 & \text{si} \quad x \in \left[5\,;+\infty\right[\end{cases}$



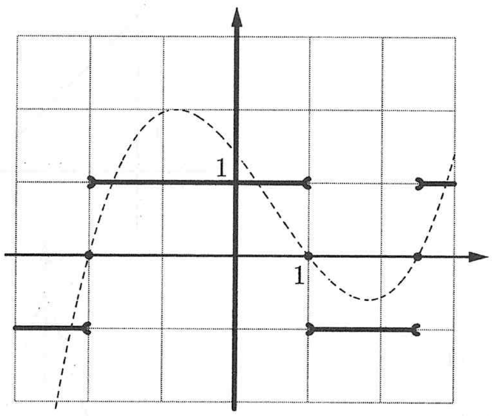
33. a)



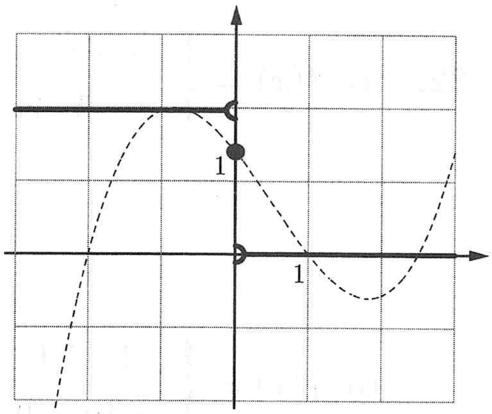
b)



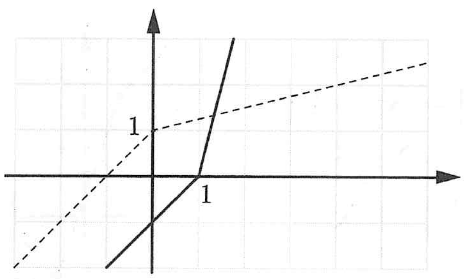
34. a)



b)



35. a)

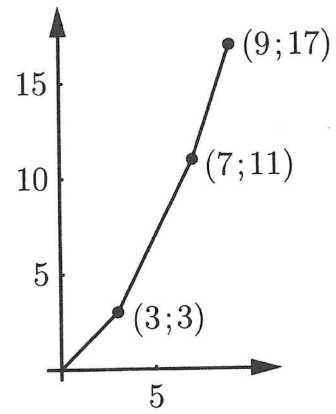


b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

${}^r f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x-4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

c) $x = \frac{4}{3}$

36.



a) $f(0)=0$, $f(3)=3$, $f(7)=11$ et $f(9)=17$

b) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0;3[\\ 2x-3 & \text{si } x\in[3;7[\\ 3x-10 & \text{si } x\in[7;9] \end{cases}$

d) $f(x)=10 \Leftrightarrow x=\frac{13}{2}$

$f(x)=15 \Leftrightarrow x=\frac{25}{3}$

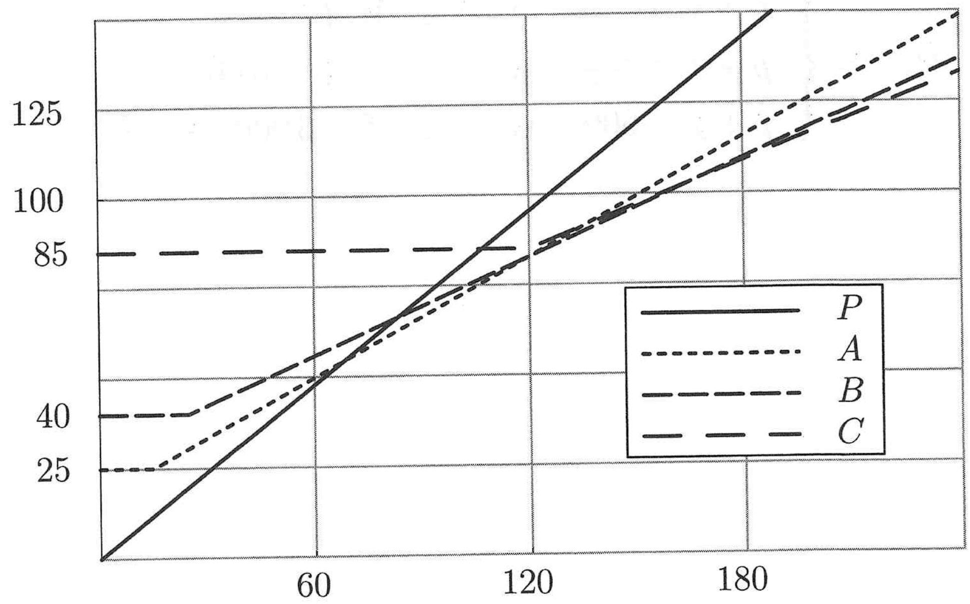
37. 142 857

38. 371.25 m

39. 20 kg

40. a) P : 72.– A : 66.25 B : 69.25 C : 85.–

b)



$P(x)=0.8\,x$

$A(x)=0.55\,x+16.75 \quad (x\geq 15)$

$B(x)=0.45\,x+28.75 \quad (x\geq 25)$

$C(x)=0.4\,x+37 \quad (x\geq 120)$

c) P : moins de 67 minutes

A : entre 67 et 120 minutes

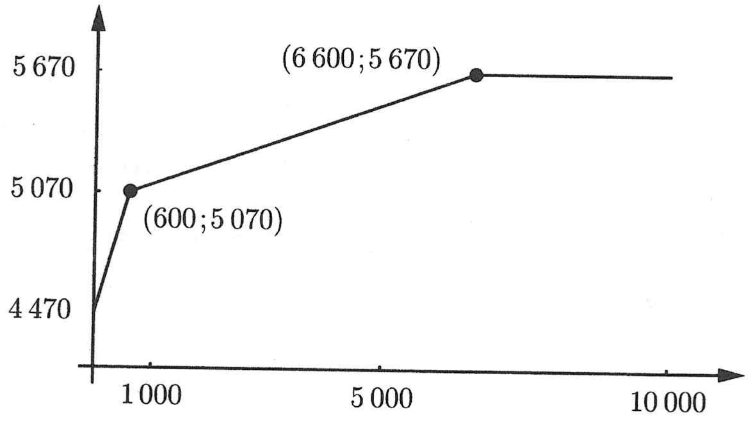
B : entre 120 et 165 minutes

C : plus de 165 minutes

d) Plus de 28 minutes et 45 secondes

41. a) 1 500.– b) 230.–

c)



d) $$f(x) = \begin{cases} 3\,750 + x & \text{si} \quad x \in [\,0\,;1\,500\,[\\ 5\,250 + \frac{x-1\,500}{10} & \text{si} \quad x \in [\,1\,500\,;7\,500\,[\\ 5\,850 & \text{si} \quad x \in [\,7\,500\,;+\infty\,[\end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} p + x & \text{si} \quad x \in [\,0\,;f\,[\\ p + f + \frac{x-f}{10} & \text{si} \quad x \in [\,f\,;f+6\,000\,[\\ p + f + 600 & \text{si} \quad x \in [\,f+6\,000\,;+\infty\,[\end{cases}$$