59. a) oui b) non c) oui

60. a) non b) non c) oui d) non e) oui

61. a) 5 b) 1 ou $\frac{32}{7}$

62. $\alpha = -\frac{26}{7}$ $\beta = \frac{31}{2}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

63. a) oui b) oui c) non

64. $z = -2$

65. $M(\frac{9}{2}; -4; \frac{11}{2})$, $N(\frac{21}{10}; -\frac{2}{5}; \frac{11}{2})$ et $P(\frac{5}{2}; -1; \frac{11}{2})$

66. $G_1(1;0;3)$, $G_2(2;2;7)$ et $G_3(-2;-6;-9)$

2 Norme, angle et produit scalaire

Le chapitre précédent a permis d'introduire le concept de vecteur et de définir deux opérations fondamentales : l'addition vectorielle et la multiplication par un nombre réel. Il s'agit maintenant de présenter les notions nécessaires à la résolution de problèmes métriques comme le calcul de la distance entre deux points ou de l'angle de deux vecteurs. Ces notions sont la norme d'un vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs.

2.1 Norme d'un vecteur

Il a déjà été mentionné au paragraphe 1.2.2 que la norme d'un vecteur $\vec{a}$ est la longueur d'un de ses représentants. On la note $\|\vec{a}\|$.

Propriétés. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs et λ un nombre réel.*

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$

2. $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

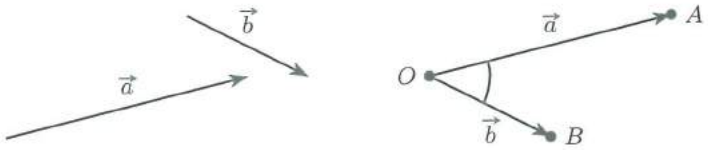
4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *(inégalité triangulaire)*

Un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

2.2 Angle de deux vecteurs

On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls et O un point quelconque. On sait qu'il existe exactement un point A et un point B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

L'**angle des vecteurs** $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est l'angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. On peut montrer que cet angle ne dépend pas du choix du point O.



Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **orthogonaux** si leur angle est un angle droit. On note $\vec{a} \perp \vec{b}$. Le vecteur nul est par convention orthogonal à tous les vecteurs.

Une base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ de V_2 est **orthonormée** si les vecteurs qui la constituent sont unitaires et orthogonaux :

$$\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_2}.$$

Une base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ de V_3 est **orthonormée** si les vecteurs qui la constituent sont unitaires et orthogonaux deux à deux :

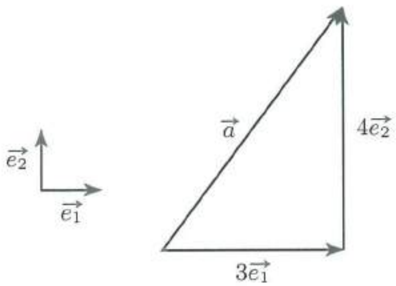
$$\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_2},\ \vec{e_1} \perp \vec{e_3} \text{ et } \vec{e_2} \perp \vec{e_3}.$$

On dira de même qu'un repère du plan ou de l'espace est orthonormé si la base associée est orthonormée.

2.3 Calcul de la norme d'un vecteur

Dorénavant, nous considérerons toujours des bases et des repères orthonormés.

Exemple. *Considérons le vecteur* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Comme les vecteurs $\vec{e_1}$ *et* $\vec{e_2}$ *sont orthogonaux et unitaires, on a par le théorème de Pythagore*

$$\|\vec{a}\|^2 = \|3\vec{e_1}\|^2 + \|4\vec{e_2}\|^2 = 9\|\vec{e_1}\|^2 + 16\|\vec{e_2}\|^2 = 9 + 16 = 25.$$

D'où $\|\vec{a}\| = \sqrt{25} = 5$.

Généralisons l'exemple ci-dessus à un vecteur quelconque $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. On a $\|\vec{a}\|^2 = \|a_1\vec{e_1}\|^2 + \|a_2\vec{e_2}\|^2 = a_1^2\|\vec{e_1}\|^2 + a_2^2\|\vec{e_2}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$. On en déduit

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

De manière analogue, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque de V_3, on a

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Remarque. Si $\vec{a}$ est un vecteur non nul, alors $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ et $-\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ sont les deux seuls vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{a}$.

Exemple. *Soit* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On a* $\|\vec{a}\| = 3$. *Les vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *sont unitaires et colinéaires à* $\vec{a}$.

2.4 Distance entre deux points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. La distance $\delta(A;B)$ entre ces points est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

On a donc

$$\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

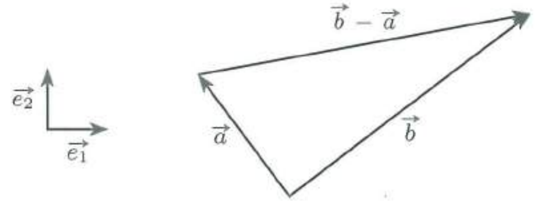
Exemple. *La distance entre les points $A(1;2)$ et $B(-2;1)$ est égale à $\delta(A;B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$.*

De même si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace, on a

$$\delta(A;B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.5 Produit scalaire

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ donnés dans une base orthonormée de V_2. Cherchons un critère qui permette de déterminer si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux ou non.



En utilisant le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \\ &\Leftrightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ &\Leftrightarrow b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ &\Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le nombre réel $a_1b_1 + a_2b_2$ est nul. Ce nombre revêt donc une importance particulière et motive ainsi la définition suivante. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre réel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Un calcul analogue dans V_3 montre que $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre réel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Nous avons montré ci-dessus que

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Exemple. *Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux car $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 7 \neq 0$.*

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et le nombre réel λ, on a*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(commutativité)*
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *(distributivité)*
3. $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
6. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Remarques.

1. On prendra garde au fait que le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur, mais un nombre.
2. Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de V_2. Alors $\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ sont les deux seuls vecteurs orthogonaux à $\vec{a}$ et de même norme que $\vec{a}$.

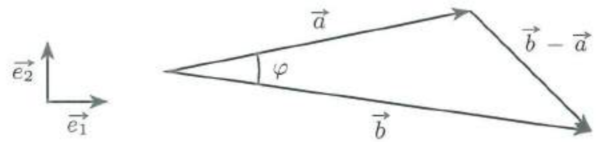
2.6 Expression trigonométrique du produit scalaire

Théorème 5. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls d'angle φ. On a*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi)$$

Démonstration. Le théorème du cosinus permet d'écrire

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi).$$



En travaillant dans V_2 et en introduisant les composantes des vecteurs dans une base orthonormée, on obtient

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi)$$

On procède de même dans V_3. □

Le résultat précédent peut s'écrire sous la forme

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}$$

Propriétés.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ *est aigu*
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi$ *est droit*
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ *est obtus*

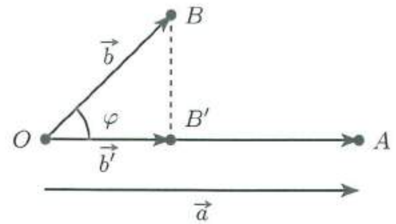
Exemple. *Calculer l'angle des vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

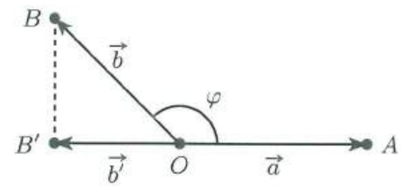
$$\cos(\varphi) = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 5^2}\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{29}\sqrt{41}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 119{,}54^\circ$$

Remarque. Le théorème précédent montre que le produit scalaire ne dépend que des normes et de l'angle des deux vecteurs. Il est donc indépendant de la base orthonormée choisie.

2.7 Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre vecteur

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (de V_2 ou de V_3). Choisissons trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Soit B' le point d'intersection de la droite (OA) avec sa perpendiculaire issue de B. Le vecteur $\overrightarrow{OB'} = \vec{b'}$ est la **projection orthogonale** de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.





Théorème 6.

$$\vec{b'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} \qquad \text{et} \qquad \|\vec{b'}\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$$

Démonstration. Il faut distinguer deux cas selon que l'angle φ des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu ou obtus.

Si φ est aigu, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi) = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b'}\|$.

On en déduit $\|\vec{b'}\| = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$.

Comme $\vec{a}$ et $\vec{b'}$ sont de même sens, on a

$$\vec{b'} = \|\vec{b'}\|\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}.$$

Si φ est obtus, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\varphi) = -\|\vec{a}\|\,\|\vec{b'}\|$ car $\cos(\varphi)$ est négatif.

On en déduit $\|\vec{b'}\| = -\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$.

Comme $\vec{a}$ et $\vec{b'}$ sont de sens contraires, on a

$$\vec{b'} = -\|\vec{b'}\|\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}\,\frac{1}{\|\vec{a}\|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}.$$

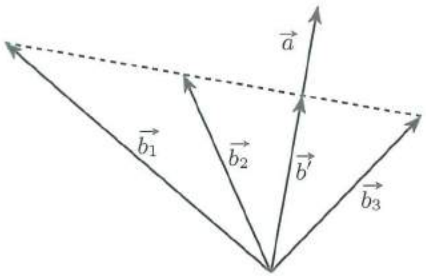
On en déduit que, dans les deux cas, on a $\|\vec{b'}\| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$. □

Exemple. *Considérons les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = -9$ *et* $\|\vec{a}\|^2 = 14$, *donc* $\vec{b'} = \dfrac{-9}{14}\,\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{9}{14} \\ -\frac{27}{14} \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Si le vecteur $\vec{a}$ est unitaire, on obtient $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{b'}\|$.
2. Sur la figure ci-dessous, les trois vecteurs $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ et $\vec{b_3}$ ont même projection orthogonale sur le vecteur $\vec{a}$. On a $\vec{a} \cdot \vec{b_1} = \vec{a} \cdot \vec{b_2} = \vec{a} \cdot \vec{b_3} = \vec{a} \cdot \vec{b'}$.



2.8 Exercices relatifs au chapitre 2

Dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont données relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ ou $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ du plan ou de l'espace et les composantes des vecteurs sont relatives à la base associée.

Norme

1. Montrer que les vecteurs suivants sont unitaires.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer les normes de ces vecteurs.

b) Calculer ensuite les composantes des vecteurs unitaires colinéaires respectivement aux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

3. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les normes de ces vecteurs ainsi que celles des vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{d}$ et $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

b) Calculer ensuite les composantes des vecteurs unitaires colinéaires et de sens contraire respectivement aux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

4. Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

b) Déterminer les vecteurs de norme 5 colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

5. Soit le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

b) Déterminer les vecteurs de norme 9 colinéaires au vecteur $\vec{a}$.

6. Calculer la distance entre les points A et B suivants.

a) $A(5;-3;1)$, $B(3;0;9)$ b) $A(-2;10;5)$, $B(8;4;-10)$
c) $A(0;0;1)$, $B(5;6;7)$ d) $A(0;0;0)$, $B(8;-3;9)$

7. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

a) $A(4;0;-3)$, $B(10;2;0)$, $C(8;-1;6)$ et $D(2;-3;3)$

b) $A(3;4;-2)$, $B(10;5;-6)$, $C(5;9;-1)$ et $D(-2;8;3)$

8. On considère les points $A(4;-1)$ et $B(-5;11)$. Déterminer les points de la droite (AB) situés à une distance 3 de A.

9. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer k pour que le vecteur $\vec{a} + k\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$.

10. On considère les points $A(1;3)$, $B(-8;12)$ et $C(1;2)$: Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

11. Vérifier que le triangle de sommets $A(-4;-2)$, $B(\frac{4}{5};\frac{22}{5})$ et $C(\frac{24}{5};-\frac{18}{5})$ est isocèle. Calculer ensuite son aire.

12. Montrer que les trois points $A(-\frac{35}{9};-\frac{40}{9};\frac{35}{9})$, $B(-5;0;-\frac{45}{9})$ et $C(-\frac{20\sqrt{2}}{9};\frac{35\sqrt{2}}{9};\frac{20\sqrt{2}}{9})$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

13. Montrer que les points $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ sont sur un cercle de centre $I(2;1)$.

14. Calculer les longueurs des côtés du quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(-2;1)$, $B(5;2)$, $C(10;7)$ et $D(3;6)$. Que peut-on dire de ce quadrilatère ?

15. Montrer que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

a) $A(0;11;7)$, $B(20;10;0)$, $C(15;23;16)$ et $D(15;2;19)$

b) $A(5;13;21)$, $B(25;12;14)$, $C(10;21;2)$ et $D(10;0;5)$

16. Un mobile part du point $A(-2;3)$ et avance en ligne droite d'une distance 7 en direction du point $B(10;-2)$. Il arrive au point P. Déterminer les coordonnées du point P.

17. On considère les points $A(4;5;8)$ et $B(3;11;5)$. Déterminer le point P de l'axe Ox tel que

a) $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$ b) $\|\overrightarrow{AP}\| = 2\|\overrightarrow{BP}\|$

18. Déterminer le centre P et le rayon r de la sphère passant par les quatre points A, B, C et D suivants.

a) $A(3;1;3)$, $B(0;-3;4)$, $C(3;0;4)$ et $D(1;-1;-1)$

b) $A(5;1;6)$, $B(6;-4;-6)$, $C(3;-2;7)$ et $D(-4;-2;0)$

Produit scalaire

19. On considère les vecteurs suivants.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{e}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

Calculer
$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{e}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{d}\cdot\vec{e}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})$.

20. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\-9\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$.

21. On considère les vecteurs suivants.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{g}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\quad \vec{h}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \vec{i}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$$

a) Déterminer les paires de vecteurs orthogonaux.

b) Calculer $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$, $(\vec{b}\cdot\vec{h})\cdot\vec{c}$, $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{i}$, $(\vec{g}\cdot\vec{a})\cdot\vec{d}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{d}\cdot\vec{a})$.

22. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$ est un rectangle.

23. a) On considère les points $A(-4;-3)$, $B(2;0)$ et $C(0;4)$. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

b) Trouver les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

24. Déterminer le nombre réel λ pour que le vecteur $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\\lambda\end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$.

25. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$. Déterminer le nombre λ et le vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{a}$ tels que $\vec{b}=\lambda\vec{a}+\vec{v}$.

26. Calculer les composantes des vecteurs de norme $\frac{13}{2}$ orthogonaux au vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$.

27. Déterminer les vecteurs de norme 15 orthogonaux à $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

28. Soit $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs unitaires de première composante nulle qui sont orthogonaux à $\vec{a}$.

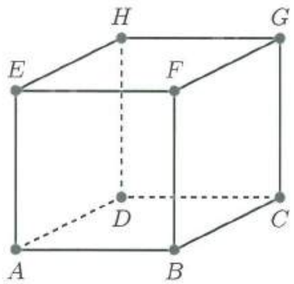
29. Déterminer les nombres réels s et t pour que le vecteur $\begin{pmatrix}7\\s\\t\end{pmatrix}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs $\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-5\\20\\9\end{pmatrix}$.

30. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

a) $A(-4;5;3)$, $B(-1;1;5)$, $C(5;5;4)$ et $D(2;9;2)$

b) $A(7;-2;0)$, $B(5;2;2)$, $C(10;5;1)$ et $D(12;1;-1)$

31. Montrer que les points $A(0;11;7)$, $B(10;21;2)$, $C(20;10;0)$, $D(10;0;5)$, $E(5;13;21)$, $F(15;23;16)$, $G(25;12;14)$ et $H(15;2;19)$ sont les sommets d'un cube.



32. On considère les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Déterminer les points P de l'axe Ox tels que le triangle APB soit rectangle.

33. On considère les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$. Déterminer les sommets C et D

a) d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté ;

b) d'un carré $ACBD$ dont $[AB]$ est une diagonale.

34. On considère les points $B(3;4)$ et $C(1;-2)$. Trouver un point A tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A.

35. On considère les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle ? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

36. On considère les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et $C(\lambda;5)$. Déterminer les nombres réels λ pour lesquels le triangle ABC est rectangle. Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

37. On considère les points $A(0;0)$ et $B(6;6)$. Trouver deux points C et D tels que le quadrilatère $ACBD$ soit un losange dont la diagonale $[CD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AB]$.

38. On considère les points $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ et $D(4;0)$. Trouver les milieux respectifs R, S, T et U de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

39. On considère les points $A(2;3)$, $B(14;12)$ et $H(10;9)$.

a) Vérifier que les points A, B et H sont alignés.

b) Déterminer le point C tel que ABC est un triangle dont l'aire est égale à 75 et tel que H soit le pied de la hauteur issue de C.

40. On considère les points $A(4;4)$ et $B(-2;3)$. Déterminer le centre C et le rayon r du cercle qui passe par A et qui est tangent à la droite (OB) en O.

41. Dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, calculer les composantes et la norme du vecteur $\vec{v}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{v}\cdot\vec{e_1}=4$, $\vec{v}\cdot\vec{e_2}=7$ et $\vec{v}\cdot\vec{e_3}=7$

b) $\vec{v}\cdot\vec{e_1}=-5$, $\vec{v}\cdot\vec{e_2}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{e_3}=12$

42. Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les vecteurs
$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Vérifier que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base orthonormée de V_2.

b) Exprimer $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans cette base.

c) Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ lorsque ces vecteurs sont exprimés dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

d) Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ lorsque ces vecteurs sont exprimés dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

43. On donne un vecteur $\vec{a}$ de V_3. Montrer que, dans une base orthonormée $(\vec{f_1}; \vec{f_2}; \vec{f_3})$, les composantes de $\vec{a}$ sont $a_1' = \vec{f_1} \cdot \vec{a}$, $a_2' = \vec{f_2} \cdot \vec{a}$ et $a_3' = \vec{f_3} \cdot \vec{a}$.

44. Relativement à une base orthonormée $\mathcal{B}$, on donne les vecteurs
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f_3} = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $\|\vec{a}\|$ et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en utilisant les composantes dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{f_1}; \vec{f_2}; \vec{f_3})$ est une base orthonormée.

c) Calculer les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $\|\vec{a}\|$ et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en utilisant les composantes dans la base $\mathcal{B}'$.

45. a) Établir la relation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$ en développant $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) En déduire que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

46. Montrer que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

47. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires.

a) Établir l'équivalence $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

48. On considère les vecteurs
$$\vec{a} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que les vecteurs $2\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{a} + 2\vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{c}$ forment une base orthonormée de V_3.

49. On considère les vecteurs $\vec{a} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 23 \\ -36 \\ 24 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -36 \\ -31 \\ r \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre réel r et un vecteur $\vec{c}$ pour que $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ soit une base orthonormée de V_3.

50. a) Montrer que le produit scalaire de deux vecteurs ne change pas si l'on ajoute à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.

b) Interpréter ce résultat géométriquement.

Angles

51. Calculer l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

52. Calculer l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

53. On considère les points $A(4; 2)$, $B(-3; 2)$, $C(0; 4)$ et $D(\frac{7}{2}; -\frac{11}{2})$. Calculer les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{COD}$.

54. On considère les points $A(4; -2)$, $B(2; 6)$ et $C(-3; 2)$. Calculer les angles du triangle ABC.

55. On considère les points $A(5;-3;8)$, $B(1;7;2)$ et $C(-3;2;5)$. Calculer les angles du triangle ABC.

56. On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;-2)$ et $C(4;4)$.

a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

b) Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point $P(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

d) Calculer les angles du triangle ABC.

57. On considère deux points A et B tels que $\|\overrightarrow{OA}\| = 4$, $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. On pose $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

a) Calculer les normes des vecteurs $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{a}$.

b) Calculer $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, $2\vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$ et $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

58. On considère un parallélogramme $OACB$ et on donne $\|\overrightarrow{OA}\| = 7$, $\|\overrightarrow{OB}\| = 2$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. Calculer les longueurs des diagonales de ce parallélogramme et l'angle aigu qu'elles forment.

59. Calculer les angles que la droite (OA) forme avec les axes de coordonnées dans les cas suivants.

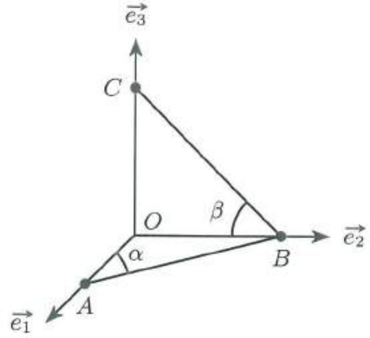
a) $A(3;4;5)$ b) $A(1;-2;0)$ c) $A(1;1;2)$

60. Soit A un point distinct de O. On appelle φ_1, φ_2 et φ_3 les angles que la droite (OA) forme respectivement avec les axes Ox, Oy et Oz. Trouver une relation trigonométrique entre les angles φ_1, φ_2 et φ_3.

61. On considère les points $E_1(1;0;0)$, $E_2(0;1;0)$, $E_3(0;0;1)$ et A tels que $\widehat{E_1OA} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{E_3OA} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer l'angle $\widehat{E_2OA}$.

62. On considère les points $E_1(1;0;0)$, $E_2(0;1;0)$ et $E_3(0;0;1)$. Déterminer les coordonnées des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = 2\sqrt{2}$, $\widehat{E_1OM} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{E_2OM} = \frac{3\pi}{4}$.

63. On considère la figure ci-contre et on donne les angles $\alpha = 60°$ et $\beta = 45°$. Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$.



Projection orthogonale

64. Calculer la norme de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

65. Calculer la norme de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

66. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$

67. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

68. Déterminer la projection orthogonale P' de P sur la droite (AB) et le symétrique P'' du point P par rapport à la droite (AB) dans les cas suivants.

a) $A(-3;4)$, $B(9;-2)$ et $P(4;-7)$

b) $A(8;-1)$, $B(2;7)$ et $P(7;17)$

69. On considère les points $A(-2;-1;2)$ et $B(-5;3;4)$.

a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale P de A sur la droite (OB).

b) Déterminer les coordonnées du symétrique S de A par rapport à la droite (OB).

70. Déterminer le symétrique S de $A(12;0;-3)$ par rapport à la droite (OB) avec $B(-5;5;10)$.

71. On considère un tétraèdre $ABCD$ et les milieux respectifs M, N, P et Q des arêtes $[AD]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[CD]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$ et que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Montrer, en calculant $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$, que si les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur, les droites (MN) et (PQ) sont orthogonales.

72. On considère un triangle ABC rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

a) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ de deux manières différentes.
En déduire le théorème d'Euclide : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BH}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$.

b) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$ de deux manières différentes.
En déduire le théorème de la hauteur : $\|\overrightarrow{AH}\|^2 = \|\overrightarrow{CH}\| \cdot \|\overrightarrow{BH}\|$.

73. Soit un triangle ABC quelconque. On considère H le point d'intersection des deux hauteurs (AA') et (BB').

a) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$ de deux manières différentes.

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

74. Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

75. Soit Γ le cercle circonscrit à un triangle ABC. On considère le point D de Γ diamétralement opposé à A et le point M milieu de $[BC]$.

a) Montrer que $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AC}\|^2$.

c) En déduire que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$ et que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2$.

76. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est situé sur la hauteur issue de C.

c) À l'aide de l'associativité de l'addition vectorielle, montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

d) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est situé sur le segment $[OH]$ du triangle ABC, au tiers de ce segment à partir de O. La droite (OH) est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.

77. Soit $ABCD$ un tétraèdre.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) En déduire que, si deux couples d'arêtes opposées (non adjacentes) ont pour support des droites orthogonales, il en est de même pour le troisième couple d'arêtes opposées.

78. On considère un tétraèdre $ABCD$ dans lequel on a la relation $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

a) Montrer que ses arêtes opposées (non adjacentes) sont deux à deux orthogonales.

b) Montrer que la somme des carrés des longueurs de deux arêtes opposées est la même pour les trois couples d'arêtes opposées.

Réponses aux exercices du chapitre 2

2. a) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 4$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{73}$, $\|\vec{d}\| = 1$
b) $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{73}}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3. a) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{c}\| = 3\sqrt{2}$, $\|\vec{d}\| = 13$,
$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \frac{7}{2}$, $\|\vec{a} - \vec{d}\| = 2\sqrt{35}$, $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \frac{\sqrt{181}}{2}$
b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\-12\\0\end{pmatrix}$

4. a) $\pm\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ b) $\pm\frac{5}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$

5. a) $\pm\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}$ b) $\pm\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}$

6. a) $\sqrt{77}$ b) 19 c) $\sqrt{97}$ d) $\sqrt{154}$

8. $(\frac{11}{5}; \frac{7}{5})$ et $(\frac{29}{5}; -\frac{17}{5})$

9. $\frac{3}{2}$ ou $-\frac{23}{10}$

10. $\|\overrightarrow{AB}\| = 9\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{181}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$

11. $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 4\sqrt{5}$ et $aire = 32$

14. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\| = 5\sqrt{2}$. C'est un losange.

16. $P(\frac{58}{13}; \frac{4}{13})$

17. a) $P(-25; 0; 0)$ b) pas de solution

18. a) $P(1; -1; 2)$, $r = 3$ b) $P(3; -2; 0)$, $r = 7$

19. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{e} = -9$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = -8$, $\vec{d} \cdot \vec{e} = 0$,
$\vec{c} \cdot \vec{d} = -9$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = 24$

20. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 61$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = 61$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -19$,
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 61$, $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 66$

21. a) $\vec{a}$ et $\vec{d}$, $\vec{a}$ et $\vec{g}$, $\vec{b}$ et $\vec{h}$, $\vec{d}$ et $\vec{i}$

b) $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}$, $(\vec{b}\cdot\vec{h})\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{i} = \begin{pmatrix}48\\12\\24\end{pmatrix}$,

$(\vec{g}\cdot\vec{a})\cdot\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{d}\cdot\vec{a}) = 0$

23. $D(-6;1)$

24. $\frac{3}{4}$

25. $\lambda = 3$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

26. $\pm\begin{pmatrix}6\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

27. $\vec{v} = \pm\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

28. $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$

29. $s = 4$ et $t = -5$

32. $P_1(-1;0;0)$ et $P_2(-7;0;0)$ si le triangle est rectangle en P,
$P_3(\frac{5}{2};0;0)$ si le triangle est rectangle en A et
$P_4(-\frac{31}{4};0;0)$ si le triangle est rectangle en B.

33. a) $C(9;-4)$ et $D(8;2)$ ou $C(-3;-6)$ et $D(-4;0)$
b) $C(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ et $D(\frac{11}{2};-\frac{3}{2})$

34. $A(5;0)$ ou $A(-1;2)$

35. $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = \frac{5}{2}$, $\lambda_4 = -2$ isocèle pour λ_1 ou λ_3

36. $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{13}{2}$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 4$ isocèle pour λ_4

37. $C(9;-3)$, $D(-3;9)$

38. $R(0;\frac{3}{2})$, $S(\frac{3}{2};\frac{7}{2})$, $T(\frac{7}{2};2)$, $U(2;0)$

39. $C(4;17)$ ou $C(16;1)$

40. $C(\frac{12}{5};\frac{8}{5})$ $r = \frac{4\sqrt{13}}{5}$

41. a) $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\7\\7\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{114}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}-5\\0\\12\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\| = 13$

42. b) $\vec{a} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, $\vec{b} = 5\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$
c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -41$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -41$

44. a) $\sqrt{6}$ et 11 c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{3}\\\frac{5\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-\frac{10}{3}\\\frac{7\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$ d) $\sqrt{6}$ et 11

49. $r = -\frac{12}{49}$ et $\vec{c} = \pm\frac{1}{49}\begin{pmatrix}24\\-12\\-41\end{pmatrix}$

51. a) 45° b) 138,18° c) 90°

52. a) 63,61° b) 139,56° c) 90°

53. $\widehat{AOB} = 119{,}74°$, $\widehat{AOD} = 84{,}09°$, $\widehat{BOC} = 56{,}31°$
$\widehat{BOD} = 156{,}16°$, $\widehat{COD} = 147{,}53°$

54. $\alpha = 46{,}22°$ $\beta = 65{,}38°$ $\gamma = 68{,}40°$

55. $\alpha = 34{,}98°$ $\beta = 53{,}38°$ $\gamma = 91{,}64°$

56. a) $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5}$ c) 15
d) $\alpha = 63{,}43°$, $\beta = 71{,}57°$ et $\gamma = 45°$

57. a) $\|2\vec{a} - \vec{b}\| = 2\sqrt{13}$, $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 2\sqrt{7}$, $\|\vec{b} - \vec{a}\| = 2\sqrt{3}$
b) $\vec{a}\cdot(\vec{a} - 2\vec{b}) = 8$, $2\vec{a}\cdot(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 112$, $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

58. $\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{67}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{39}$, angle $= 28{,}32°$

59. a) 64,9° 55,6° 45°
b) 63,4° 153,4° 90°
c) 65,9° 65,9° 35,3°

60. $\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3) = 1$

61. $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

62. $M_1(\sqrt{2};-2;\sqrt{2})$ ou $M_2(\sqrt{2};-2;-\sqrt{2})$

63. 52,24°

64. a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

65. a) 9 b) $\frac{46}{\sqrt{38}}$ c) $\frac{2}{9}$

66. a) $\begin{pmatrix} 3,52 \\ 2,64 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -155 \\ -93 \end{pmatrix}$

67. a) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 56 \\ -56 \\ 28 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-5 \\ \sqrt{2}-5 \\ 2-5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

68. a) $P'(7;-1)$ et $P''(10;5)$ b) $P'(-1;11)$ et $P''(-9;5)$

69. a) $P(-\frac{3}{2};\frac{9}{10};\frac{6}{5})$ b) $S(-1;\frac{14}{5};\frac{2}{5})$

70. $S(-6;-6;-9)$

3 Équations de la droite dans le plan

Dans les deux premiers chapitres de cet ouvrage, nous avons présenté la notion de vecteur et exposé ses propriétés essentielles.

L'ambition de ce troisième chapitre est double. Dans un premier temps, nous nous attacherons à caractériser la droite et à établir ses diverses équations en fondant notre démarche sur la notion de vecteur du plan. Par la suite, nous traiterons quelques questions d'ordre métrique telles que le calcul de l'angle de deux droites ou la distance d'un point à une droite.

3.1 Vecteur directeur d'une droite

Exemple. *Les points $A(5;-3)$, $B(-13;5)$, $C(14;-7)$, $D(4;2)$ et $E(-6;2)$ sont-ils alignés ?*

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$.