les triangles CBL et GAL sont semblables, on a $\dfrac{CB}{BL} = \dfrac{GA}{AL}$, c'est-à-dire $\dfrac{y}{\frac{b}{c}y - b} = \dfrac{a}{x + \frac{b}{c}y - b}$. On en déduit $a\left(\dfrac{b}{c}y - b\right) = y\left(x + \dfrac{b}{c}y - b\right)$ et, en réduisant et en multipliant de chaque côté par $\dfrac{c}{b}$, $y^2 = cy - \dfrac{c}{b}xy + ay - ac$. C'est l'équation de la courbe.

Descartes affirme sans démonstration qu'il s'agit d'une hyperbole. La méthode permettant de déterminer la nature d'une courbe dont l'équation est du deuxième degré est exposée plus loin, dans le cadre de la résolution d'un autre problème.

Le raisonnement est fondé uniquement sur la considération de triangles semblables et sur des calculs de proportions. Les coordonnées du point C ne sont pas obtenues, comme nous le ferions aujourd'hui, en cherchant le point d'intersection des droites GL et KN. Le symbolisme de Descartes est pratiquement le même que le nôtre ; seuls les signes d'égalité et de soustraction sont différents. On notera aussi l'écriture yy au lieu de y^2. Les égalités de rapports ne sont en revanche pas exprimées de manière symbolique mais de manière rhétorique, comme dans la tradition antique. Descartes écrit ainsi que NL est à LK comme CB est à BK, égalité que nous écrivons aujourd'hui $\dfrac{NL}{LK} = \dfrac{CB}{BK}$.

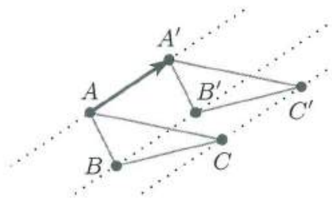
1 Notion de vecteur

Sauf mention contraire, chaque notion abordée dans ce chapitre est aussi bien valable dans le plan que dans l'espace.

1.1 Introduction

Certaines notions mathématiques ou physiques telles que la distance, la mesure d'un angle, la température, la masse ou l'altitude sont entièrement caractérisées par un nombre (pour une unité donnée). Mais ce n'est pas le cas de toutes les notions mathématiques et physiques.

Exemple 1. *Considérons la translation envoyant le point A sur le point A' représentée sur la figure ci-dessous. Un nombre ne suffit pas à décrire entièrement cette translation ; il faut encore connaître sa direction et son sens. On représente habituellement une telle translation à l'aide d'une flèche allant de A vers A'.*
Construisons l'image du triangle ABC.



La direction de cette translation est donnée par la droite passant par A et A' : pour construire les images des points B et C, on commence par tracer les parallèles à cette droite passant par B et C.
Le sens induit par cette translation est donné par l'extrémité de la flèche : ici la translation va de A vers A', et non de A' vers A.
La longueur de cette translation est celle de la flèche : on reporte la distance entre les points A et A', dans le bon sens, à partir des points B et C. On obtient ainsi leur image B' et C'.

Remarquons que le choix de l'origine de la flèche n'a aucune importance. Nous avons dessiné une flèche d'origine A car cela simplifie la compréhension, mais n'importe quelle flèche de même direction, même sens et même longueur permet de déterminer entièrement cette translation.

Exemple 2. *Considérons une luge tirée horizontalement avec une certaine force, représentée sur la figure ci-dessous par la flèche. Pour définir entièrement cette force, on doit connaître*

1. *son intensité, représentée par la longueur de la flèche,*
2. *sa direction, représentée par la droite suivant laquelle la force s'exerce,*
3. *le sens selon lequel la force s'exerce, indiqué par la pointe de la flèche.*

Un nombre seul ne suffit pas à caractériser une force ; son intensité est une information primordiale, mais insuffisante. Il faut aussi connaître sa direction et son sens.

Certaines notions nécessitent donc un nouveau concept, celui de vecteur, capable d'englober les aspects de direction, de sens et de longueur.

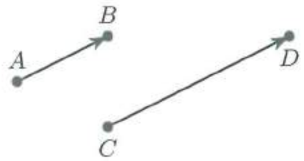
1.2 Bipoints et vecteurs

Formalisons les exemples précédents afin de parvenir à une définition rigoureuse de la notion de vecteur. À cet effet, nous devons dans un premier temps définir la notion de bipoint.

1.2.1 Bipoints

Un **bipoint** est un couple de points $(A; B)$. Le point A est son **origine** et le point B son **extrémité**. On le représente habituellement par une flèche allant de A à B.

Remarquons que, si $A \neq B$, les bipoints $(A; B)$ et $(B; A)$ sont distincts.



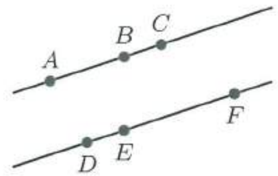
Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ ont la **même direction** si la droite passant par A et B est parallèle à la droite passant par C et D.

Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ de même direction peuvent avoir le **même sens** ou **des sens opposés**.

La **longueur d'un bipoint** $(A; B)$ est la distance entre A et B, notée $\delta(A; B)$.

Exemple. *Considérons la figure ci-contre.*

Les bipoints $(A; C)$ et $(E; D)$ ont même direction. Les bipoints $(A; B)$ et $(D; F)$ ont même direction et même sens, tandis que les bipoints $(E; F)$ et $(C; B)$ ont même direction mais ont des sens opposés. Les bipoints $(B; C)$ et $(D; E)$ ont même direction, même sens et même longueur.



Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ sont **équipollents** s'ils ont même direction, même sens et même longueur. On note $(A; B) \sim (C; D)$.

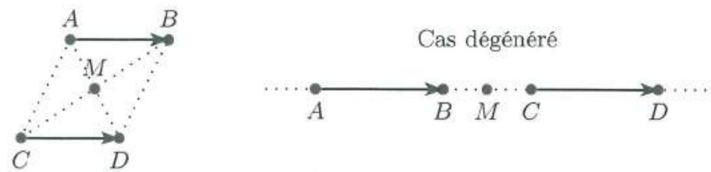
Définitions équivalentes de l'équipollence

$(A; B)$ est équipollent à $(C; D)$

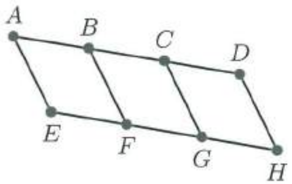
$\Leftrightarrow$ $ACDB$ est un parallélogramme (éventuellement dégénéré)

$\Leftrightarrow$ $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu M

$\Leftrightarrow$ il existe une translation envoyant A sur B et C sur D.



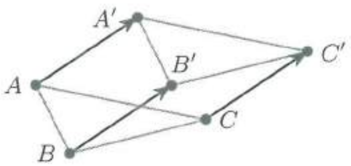
Exemple. *Sur la figure ci-dessous, on a entre autres $(A; B) \sim (F; G)$, $(A; G) \sim (B; H)$ et $(F; B) \sim (G; C)$.*



Propriété. *$(A; B) \sim (C; D)$ si et seulement si $(A; C) \sim (B; D)$.*

1.2.2 Vecteurs

Exemple. *Reprenons l'exemple de la translation.*



Les flèches sur la figure représentent des bipoints équipollents qui définissent tous la même translation. Les bipoints $(A;A')$, $(B;B')$ et $(C;C')$ sont des représentants d'un même vecteur dont ils indiquent la direction, le sens et la longueur.

Un **vecteur** est l'ensemble des bipoints équipollents à un bipoint donné.

L'ensemble des bipoints équipollents à $(A;B)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.

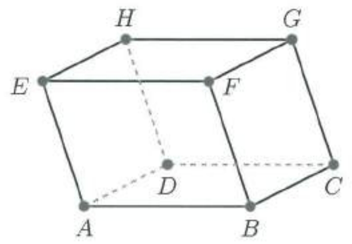
Le bipoint $(A;B)$, ou tout autre bipoint élément de $\overrightarrow{AB}$, est appelé **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des vecteurs du plan est noté V_2 et l'ensemble des vecteurs de l'espace V_3.

On peut aussi noter les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$, sans faire référence à un représentant.

Exemple. *Les bipoints $(A;B)$, $(D;C)$, $(E;F)$ et $(H;G)$ de la figure ci-dessous sont équipollents. Ils appartiennent donc tous au même vecteur, que l'on peut noter $\overrightarrow{AB} = \{(A;B);(D;C);(E;F);(H;G);\ldots\} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.*

On a ainsi $(A;B) \in \overrightarrow{AB}$ et $(D;C) \in \overrightarrow{AB}$, autrement dit, les bipoints $(A;B)$ et $(D;C)$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Tous les représentants d'un vecteur ont même direction, même sens et même longueur. Cette longueur est appelée **norme** du vecteur.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **de même direction** si leurs représentants ont même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même direction peuvent être **de même sens** si leurs représentants ont même sens, ou **de sens opposés** si leurs représentants ont des sens opposés.

Remarque. Il faut être attentif au fait qu'un vecteur est un ensemble infini de bipoints. Lorsqu'on dessine une « flèche » (c'est-à-dire un bipoint), on dessine un des représentants du vecteur. Par abus de langage, on dira que l'on dessine ce vecteur. Ainsi un vecteur est entièrement défini par sa direction, son sens et sa longueur, mais ne dépend pas de son emplacement. On peut représenter un vecteur par un bipoint de n'importe quelle origine.

Chaque vecteur possède une infinité de représentants. On peut montrer que, étant donné un vecteur $\vec{v}$ et un point A quelconques, il existe un unique point B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des bipoints dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.

On a donc $\vec{0} = \{(A;A);(B;B);\ldots\} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Propriétés.

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; A = B$
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \;\Leftrightarrow\; A = B$
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Complément. L'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints car on peut démontrer qu'elle est
1. réflexive : $(A;B) \sim (A;B)$
2. symétrique : $\big((A;B) \sim (C;D)\big) \Rightarrow \big((C;D) \sim (A;B)\big)$
3. transitive : $\big((A;B) \sim (C;D) \text{ et } (C;D) \sim (E;F)\big) \Rightarrow \big((A;B) \sim (E;F)\big)$

quels que soient les points A, B, C, D, E et F.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A;B)$ selon la relation d'équipollence

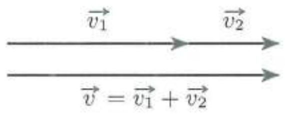
$$\overrightarrow{AB} = \{(M;N) \mid (M;N) \sim (A;B)\}$$

Ainsi on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; (A;B) \sim (C;D)$.

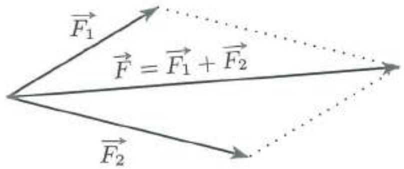
1.3 Addition de vecteurs

Exemple 1. *Considérons un bateau descendant un fleuve avec une vitesse $\vec{v_1}$, le fleuve s'écoulant lui-même avec une vitesse $\vec{v_2}$.*

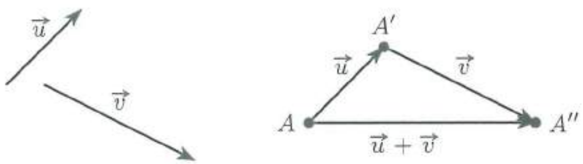
Pour un observateur immobile posté sur la berge du fleuve, le bateau avance avec une vitesse $\vec{v}$, de même direction et de même sens que les deux autres vitesses, dont l'intensité est la somme de celles des deux autres vitesses.



Exemple 2. *Deux forces qui agissent simultanément sur un corps produisent le même effet qu'une force unique, appelée résultante de ces forces. Simon Stevin*[1] *a montré que la résultante $\vec{F}$ de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est donnée par la «règle du parallélogramme».*



Exemple 3. *Considérons une translation déterminée par le vecteur $\vec{u}$, suivie d'une deuxième translation déterminée par le vecteur $\vec{v}$. Faisons agir successivement ces deux translations sur un point A.*



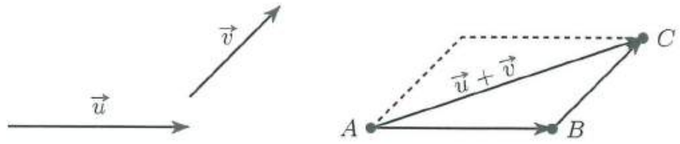
En dessinant un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A, on obtient l'image A' du point A par la première translation. En dessinant un représentant du vecteur $\vec{v}$ d'origine A', on obtient l'image A'' du point A' par la seconde translation.

Effectuer successivement ces deux translations revient à effectuer directement la translation déterminée par le vecteur $\overrightarrow{AA''}$. Ce vecteur sera appelé vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et noté $\vec{u} + \vec{v}$.

1. Simon Stevin, physicien et mathématicien flamand, 1548–1620.

En généralisant ces exemples, on obtient la définition suivante.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. À partir d'un point A quelconque, on construit les points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le bipoint $(A; C)$ ainsi obtenu définit un vecteur, appelé **vecteur somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est une des diagonales du parallélogramme construit avec les représentants des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De la définition de la somme de deux vecteurs découle immédiatement que, quels que soient les points A, B et C, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité est appelée **relation de Chasles**[2].

L'**addition vectorielle**, notée $+$, est l'opération interne qui associe à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$.

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a*

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(associativité) ;*
2. $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ *($\vec{0}$ est l'élément neutre) ;*
3. $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$ *(tout vecteur $\vec{v}$ possède un unique* ***opposé*** *noté $-\vec{v}$) ;*
4. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(commutativité).*

À l'aide de la notion d'opposé d'un vecteur, on peut définir la **soustraction vectorielle**, notée $-$, qui est l'opération interne associant à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur différence $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

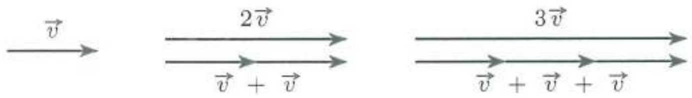
2. Cette appellation est propre aux pays francophones et n'est historiquement pas justifiée. Dans son *Traité de géométrie supérieure* (1852), le géomètre français Michel Chasles (1793-1880) utilise en effet la relation $ac = ab+bc$ uniquement pour des segments sur une droite orientée. La notion de vecteur n'apparaît pas dans le livre de Chasles. Elle ne sera formalisée que vers 1880 (cf. notice historique).

1.4 Multiplication d'un vecteur par un nombre

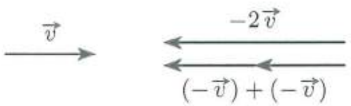
Exemple 1. *On exerce une force $\overrightarrow{F}$ sur un objet. Si l'on exerce une force de même direction et de même sens que la force initiale, mais d'une intensité triple, on dira qu'on exerce une force $3\overrightarrow{F}$ sur l'objet.*

Le vecteur $3\overrightarrow{F}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{F}$, mais de norme triple.

Exemple 2. *Soit un vecteur $\overrightarrow{v}$. La somme $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{v}$, mais de norme double. Ce vecteur sera noté $2\overrightarrow{v}$.*
De même, la somme $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}$ est un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{v}$, de norme triple. Ce vecteur sera noté $3\overrightarrow{v}$.



Par analogie, la somme $-\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{v})$ est un vecteur de même direction que $\overrightarrow{v}$, de sens opposé et de norme double. Ce vecteur sera noté $-2\overrightarrow{v}$.



En généralisant les exemples précédents à des nombres réels quelconques, on obtient la définition suivante.

Le **produit d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ par un nombre réel** λ, noté $\lambda\cdot\overrightarrow{v}$ ou aussi $\lambda\overrightarrow{v}$, est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{v}$, de même sens que $\overrightarrow{v}$ si λ est positif et de sens opposé si λ est négatif, et dont la norme est celle de $\overrightarrow{v}$ multipliée par $|\lambda|$.

La **multiplication d'un vecteur par un nombre réel** est l'opération externe qui associe à un nombre réel λ et à un vecteur $\overrightarrow{v}$ leur produit $\lambda\overrightarrow{v}$.

Le nombre réel λ est souvent appelé **scalaire**.

Propriétés. *Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et les nombres réels λ et μ, on a les propriétés suivantes.*

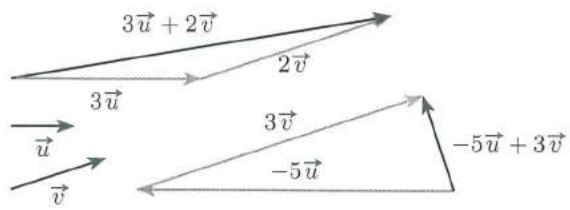
1. $1\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}$
2. $(\lambda\mu)\overrightarrow{v}=\lambda(\mu\overrightarrow{v})$
3. $(\lambda+\mu)\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{v}$
4. $\lambda(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}$
5. $\lambda\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$
6. $(-1)\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}$

Remarque. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ peut aussi être défini comme le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les images des points A et B par une homothétie de centre quelconque et de rapport λ.

Complément. Pour démontrer que l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel sont des opérations bien définies, il faut prouver d'abord qu'elles ne dépendent pas du choix des représentants des vecteurs. Il faut aussi voir que l'on peut toujours effectuer une telle construction, ce qui découle directement du complément précédent page 11.
On déduit des propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel que $(V_2;+;\cdot)$ et $(V_3;+;\cdot)$ sont des **espaces vectoriels**[3].

1.5 Combinaisons linéaires

Exemple 1. *Considérons les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ représentés sur la figure ci-dessous. À partir de ces deux vecteurs, on peut « construire » les vecteurs $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ et $-5\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$.*



On dit que les vecteurs $3\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ et $-5\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

3. Pour plus d'informations sur les espaces vectoriels, voir Algèbre linéaire, CRM N°28.

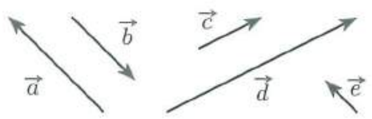
Exemple 2. *De même, le vecteur* $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$.

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres réels et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont des vecteurs, le vecteur $\vec{t} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n}$ est une **combinaison linéaire** de ces vecteurs.

Deux vecteurs (du plan ou de l'espace) sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel.

Exemple. *Considérons les vecteurs suivants.*

$\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont colinéaires car* $\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$.
$\vec{a}$ *et* $\vec{e}$ *sont colinéaires car* $\vec{a} = 3\vec{e}$.
$\vec{b}$ *et* $\vec{e}$ *sont colinéaires car* $\vec{b} = -2\vec{e}$.
$\vec{c}$ *et* $\vec{d}$ *sont colinéaires car* $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{d}$.

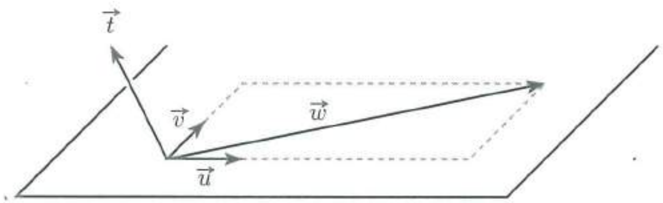


Remarque. On déduit immédiatement de la définition que

1. tout vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur nul car $\vec{0} = 0\vec{v}$;
2. deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.

Trois vecteurs de l'espace V_3 sont **coplanaires** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des deux autres.

Exemple. *Sur la figure ci-dessous, les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires car* $\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v}$. *Remarquons que ces trois vecteurs peuvent être représentés dans le même plan.*
Les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas coplanaires car aucun de ces trois vecteurs ne peut être écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Remarquons qu'il est impossible de représenter ces trois vecteurs dans un même plan.*



Remarques.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ est un vecteur quelconque, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
2. Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires car $\vec{0} = 0\vec{v} + 0\vec{w}$, quels que soient les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Complément.

Des vecteurs sont **linéairement dépendants** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.

On en déduit immédiatement que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont colinéaires. De même, trois vecteurs de l'espace sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont coplanaires. Ainsi, la notion de dépendance linéaire généralise celles de colinéarité et de coplanarité.

De plus, si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque et $\vec{v}$ est un vecteur non nul, on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement dépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{u} = \lambda\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad 1\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{0}. \end{aligned}$$

On en déduit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, avec au moins un coefficient non nul. Si un des deux vecteurs au moins est nul, le résultat est évident. De même, si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de l'espace et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs de l'espace non colinéaires, on a

$$\begin{aligned} \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ linéairement dépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \\ &\Leftrightarrow \quad 1\vec{u} - \lambda\vec{v} - \mu\vec{w} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ainsi trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, avec au moins un coefficient non nul. Si au moins deux des vecteurs sont colinéaires, le résultat est évident.

Plus généralement, les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont linéairement dépendants si et seulement si le vecteur nul s'écrit comme combinaison linéaire de ces n vecteurs avec au moins un coefficient non nul, autrement dit s'il existe des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$.

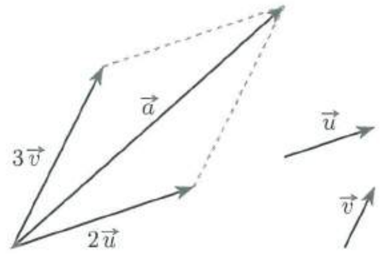
Ainsi les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ sont linéairement indépendants si et seulement si la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls, autrement dit, on a

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = 0 \ldots \text{ et } \alpha_n = 0)$$

1.6 Bases et composantes

1.6.1 Définitions

Exemple. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan et $\vec{a}$ un vecteur quelconque.*



Sur la figure, le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. On remarque par ailleurs que c'est la seule manière d'écrire $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs non colinéaires.

On peut généraliser cet exemple à n'importe quel vecteur $\vec{a}$ du plan à l'aide du théorème suivant.

Théorème 1. *Tout vecteur de V_2 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires de V_2.*

Une **base** de V_2 est un couple de vecteurs non colinéaires.

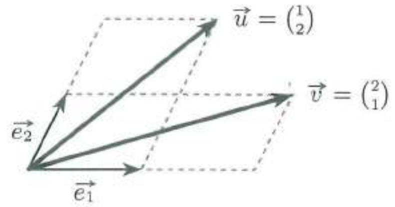
Si $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une base de V_2 et $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, alors x et y sont appelées respectivement première et seconde **composante** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$.

On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

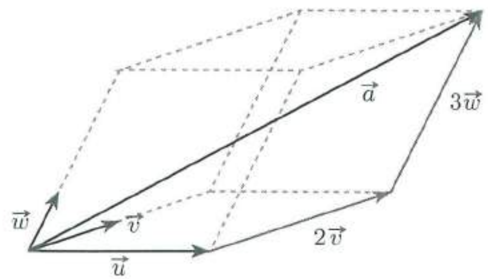
Toutes les bases de V_2 comprennent deux vecteurs ; on dit que V_2 est de **dimension 2**.

Remarque. L'ordre des composantes est essentiel : la première se rapporte au premier vecteur de base, et la seconde au second vecteur de base.

Par exemple, les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ représentés sur la figure sont deux vecteurs distincts.



Exemple. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et $\vec{a}$ un vecteur quelconque.*



Sur la figure, le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ car $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$. On remarque par ailleurs que c'est la seule manière d'écrire $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs non coplanaires.

On peut généraliser cet exemple à n'importe quel vecteur $\vec{a}$ de l'espace à l'aide du théorème suivant.

Théorème 2. *Tout vecteur de V_3 s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires de V_3.*

Une **base** de V_3 est un triplet de vecteurs non coplanaires.

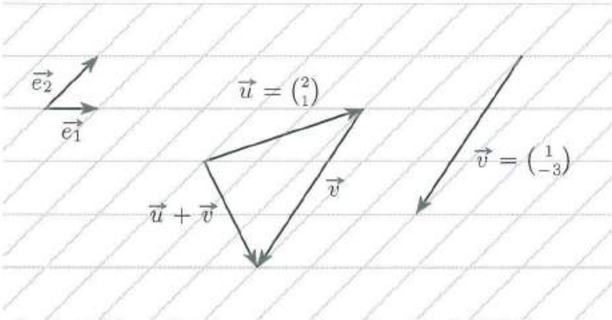
Si $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est une base de V_3 et $\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, alors x, y et z sont appelées respectivement première, deuxième et troisième **composante** du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$.

On note $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Toutes les bases de V_3 comprennent trois vecteurs ; on dit que V_3 est de **dimension 3**.

1.6.2 Opérations sur les composantes des vecteurs

Exemple. *Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, considérons les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ représentés sur la figure ci-dessous.*
On remarque que les composantes du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ sont $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.



On peut généraliser l'exemple précédent à l'aide du théorème suivant, énoncé et démontré dans le plan, mais aussi valable dans l'espace en ajoutant une troisième composante.

Théorème 3. *Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs exprimés dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ de V_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

1. $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}$,
2. $\lambda\vec{u} = \lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. $$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= (u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}) + (v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2})\\ &= (u_1+v_1)\vec{e_1} + (u_2+v_2)\vec{e_2} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\lambda\vec{u} &= \lambda(u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}) = \lambda(u_1\vec{e_1}) + \lambda(u_2\vec{e_2})\\ &= (\lambda u_1)\vec{e_1} + (\lambda u_2)\vec{e_2} = \begin{pmatrix}\lambda u_1\\\lambda u_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Exemple. *Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\,' = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ exprimés dans une base de V_3.*
On a $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $3\vec{u} = 3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\-9\end{pmatrix}$.

1.6.3 Déterminant

Exemple. *Il est aisé de déterminer si deux vecteurs de V_2 dont on connaît les composantes sont colinéaires ou non : $\vec{u} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{u} = 2\vec{v}$, tandis que $\vec{w} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ne le sont pas.*
Il est en revanche plus délicat de déterminer à quelle condition les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On a $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires*
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\lambda\\4\lambda\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow u_1 = 3\lambda \text{ et } u_2 = 4\lambda \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{u_1}{3} \text{ et } \lambda = \frac{u_2}{4}\\ &\Leftrightarrow \frac{u_1}{3} = \frac{u_2}{4} \quad \Leftrightarrow 4u_1 - 3u_2 = 0\end{aligned}$$

Cet exemple motive la définition suivante.

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ exprimés dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ de V_2. Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel

$$\mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ donnés dans une base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ de V_3. Le **déterminant** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) &= \begin{vmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\u_2 & v_2 & w_2\\u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}\\ &= u_1\begin{vmatrix}v_2 & w_2\\v_3 & w_3\end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\v_3 & w_3\end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix}v_1 & w_1\\v_2 & w_2\end{vmatrix}\\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)\end{aligned}$$

Remarques.

1. Dans le plan, on parle de déterminant d'ordre 2, et dans l'espace, de déterminant d'ordre 3.
2. Dans la définition ci-dessus, le déterminant de trois vecteurs de l'espace a été calculé en le développant selon la première colonne.

   On peut aussi le calculer en utilisant le tableau suivant.

   $$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1$$

   $$\begin{array}{ccc|cc} u_1 & v_1 & w_1 & u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & u_3 & v_3 \\ - & - & - & + \; + & + \end{array}$$

   Cette technique est appelée règle de Sarrus [4]. On prendra garde au fait qu'elle n'est valable que pour l'ordre 3.

Le théorème suivant généralise l'exemple donné au début du paragraphe.

Théorème 4.

1. *Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V_2. On a*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

2. *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de V_3. On a*

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$$

Exemple. *Soient* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule
$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot 8 - 1\cdot(-8) - 3\cdot 0 \;=\; 16+8 \;=\; 24 \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Det}(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$, *les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.*

4. Pierre Frédéric Sarrus, 1798-1861, mathématicien français.

1.7 Repères et coordonnées

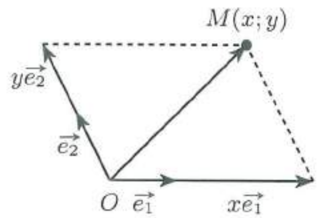
1.7.1 Définitions

Pour repérer un point dans le plan ou dans l'espace, on a non seulement besoin d'une base, comme pour les vecteurs, mais on a aussi besoin d'un point de référence.

Un **repère du plan** est un triplet $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ où O est un point du plan et $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2, appelée **base associée** au repère. Le point O se nomme **origine** du repère.

Si O, A et B sont trois points non alignés, $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est un repère du plan.

Dans un repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, les **coordonnées** d'un point M du plan sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base associée $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.



Autrement dit

Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$	Dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$M(x;y)$
x et y sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$	x et y sont les coordonnées du point M

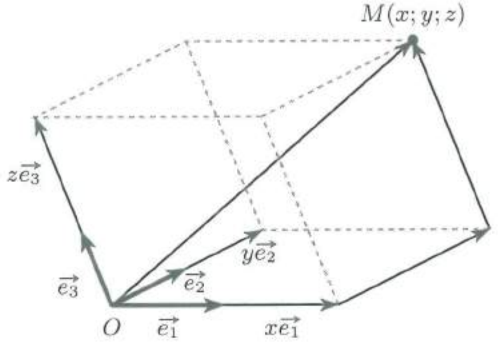
La première coordonnée du point est l'**abscisse** et la seconde l'**ordonnée**.

Un **repère de l'espace** est un quadruplet $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est une base de V_3, appelée **base associée** au repère. Le point O se nomme **origine** du repère.

Si O, A, B et C sont quatre points non coplanaires, $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ est un repère de l'espace.

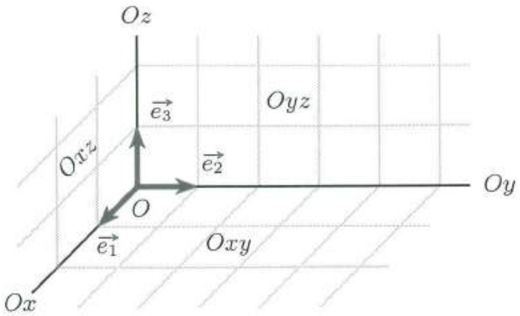
Dans un repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, les **coordonnées** d'un point M de l'espace sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base associée $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$.

Si $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on note $M(x; y; z)$.



La première coordonnée du point est l'**abscisse**, la deuxième l'**ordonnée** et la troisième la **cote**.

Pour nommer les axes et les plans de référence, on utilisera les notations suggérées sur la figure ci-dessous.



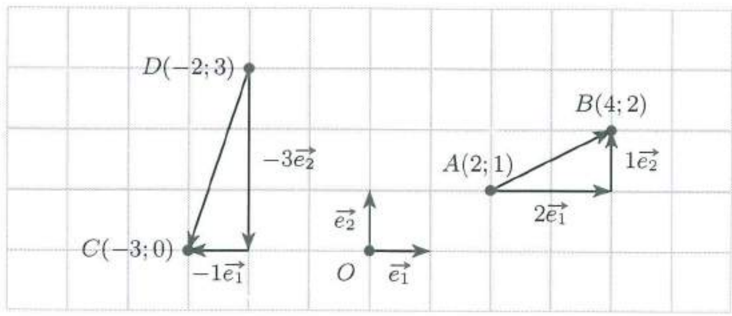
1.7.2 Calculs avec les coordonnées des points

Afin d'alléger la lecture, les théorèmes suivants sont énoncés dans le plan, mais restent aussi valables dans l'espace, en ajoutant une troisième coordonnée.

Par convention, on note $(x_A; y_A)$ les coordonnées d'un point A quelconque.

> **Exemple.** *Considérons les points $A(2;1)$, $B(4;2)$, $C(-3;0)$ et $D(-2;3)$.*
> *On peut aisément déduire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-2) \\ 0-3 \end{pmatrix}.$$



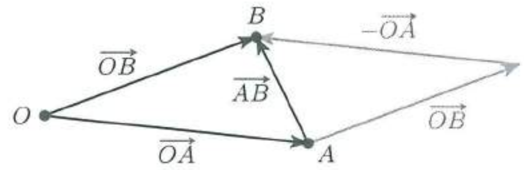
Cet exemple peut être généralisé à l'aide du théorème suivant.

Propriété.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} &&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$



□

Propriétés. *Soient A, B et C trois points.*

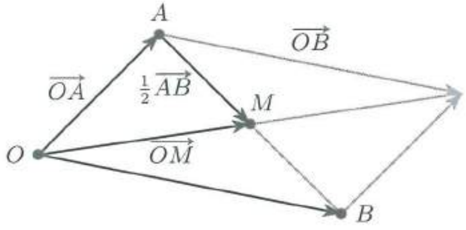
1. *Le point $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ est le milieu du segment $[AB]$.*
2. *Le point $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ est le centre de gravité du triangle ABC .*

Démonstration.

1. Le milieu M de $[AB]$ vérifie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$



2. La démonstration est laissée en exercice.

□

1.8 Exercices relatifs au chapitre 1

Bipoints et vecteurs

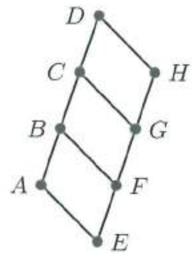
1. Trouver pour chacune des figures ci-dessous quelques ensembles de bipoints

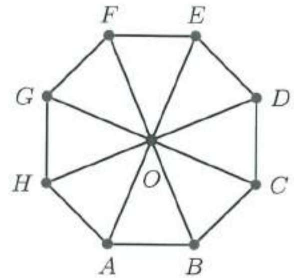
a) de même direction ;

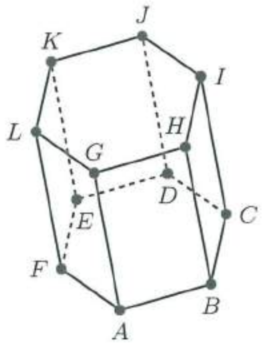
b) de même sens ;

c) de sens opposés ;

d) équipollents.







2. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

d) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$ e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$ f) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

3. On considère le parallélépipède représenté ci-dessous. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

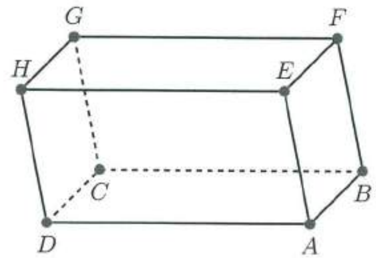
b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



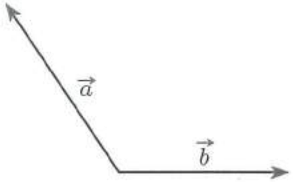
4. On considère des points A, B, C, D et E. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$
c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$
e) $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$

5. On donne les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ci-contre. Représenter les vecteurs

$\vec{c}=2\vec{a}$ $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}$ $\vec{e}=-\frac{3}{4}\vec{a}$

$\vec{f}=-\frac{1}{4}\vec{b}$ $\vec{g}=\frac{5}{2}\vec{b}$ $\vec{h}=\sqrt{3}\,\vec{b}$

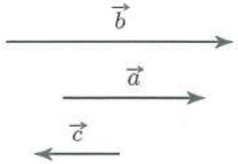


6. On donne les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ci-contre. Représenter les vecteurs

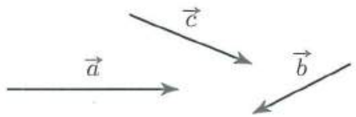
$\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{y}=\vec{a}+\vec{c}$

$\vec{z}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ $\vec{f}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$

$\vec{g}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ $\vec{h}=\frac{7}{3}\vec{a}-3\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



7. On donne les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ci-dessous.



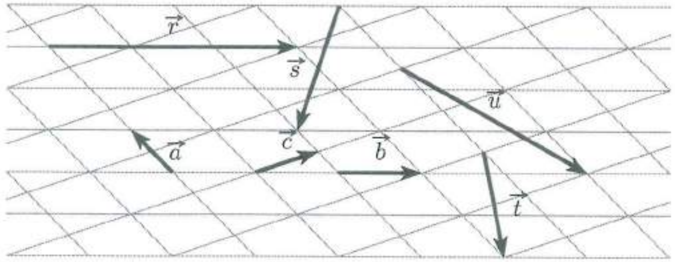
a) Représenter les vecteurs

$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ $\vec{w}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

b) Représenter les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ tels que

$\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}$ $\vec{y}-\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}-\vec{z}$

8. On considère les vecteurs représentés dans la figure ci-dessous.



a) Représenter les vecteurs $\vec{d}=3\vec{a}+4\vec{b}-5\vec{c}$, $\vec{e}=-2\vec{a}-3\vec{b}$ et $\vec{f}=\frac{1}{2}(3\vec{a}-\vec{b})-\frac{7}{2}\vec{c}$.

b) Exprimer les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ et $\vec{u}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

9. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ de l'exercice 3. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ et $\vec{t}=\overrightarrow{AF}$.

a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EC}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) On note M le milieu de $[FG]$, N celui de $[HG]$ et P le centre du parallélogramme $ABCD$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{FN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c) On considère le point J tel que $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

10. On considère une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{SB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{SC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SD}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

11. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ de l'exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.

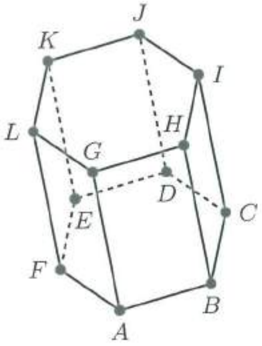
a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DG}$ b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{GH}$

12. On considère le prisme représenté ci-contre dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$

c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$



13. On donne trois points non alignés O, A et B et λ un nombre réel.

a) Construire les points C, D et E tels que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

b) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$?

c) Construire les points F, G et H tels que $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

d) Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$?

e) Construire les points I, J, K et L tels que $\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

f) Quel est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$?

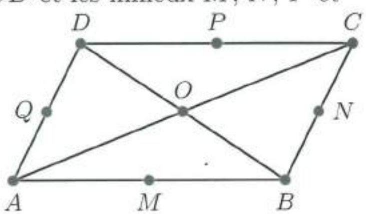
Bases

Dans les exercices suivants, les composantes des vecteurs sont données relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ ou $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$, sauf mention contraire.

14. On considère le parallélogramme $ABCD$ et les milieux M, N, P et Q de ses côtés. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

a) dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$;

b) dans la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM})$.



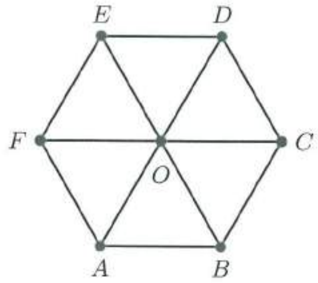
15. On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$

a) dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$;

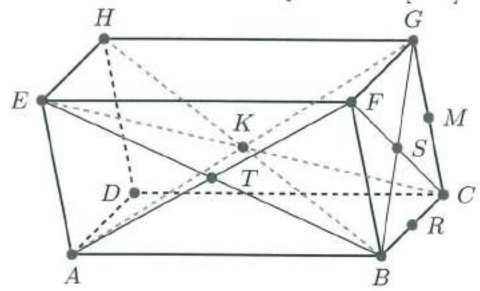
b) dans la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED})$;

c) dans la base $\mathcal{B}_3 = (\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC})$;

d) dans la base $\mathcal{B}_4 = (\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB})$.



16. On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ et les points K, M, R, S et T (M et R étant les milieux respectifs de $[CG]$ et $[BC]$).



Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans les bases suivantes.

a) $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ b) $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BR})$

17. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs et les représenter.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $2\vec{u} - 3\vec{v}$ d) $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

18. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes des vecteurs

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

19. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les nombres réels α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

20. Exprimer le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans les cas suivants.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

21. Déterminer m pour que les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} m^2+1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

22. Parmi les vecteurs suivants, déterminer ceux qui sont colinéaires.

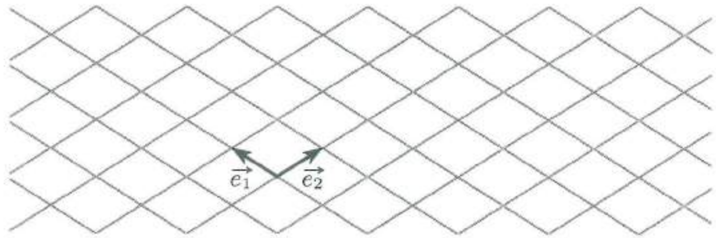
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

23. On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer un nombre λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire au vecteur $\vec{a}$ tels que $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$.

24. On considère la figure ci-dessous.

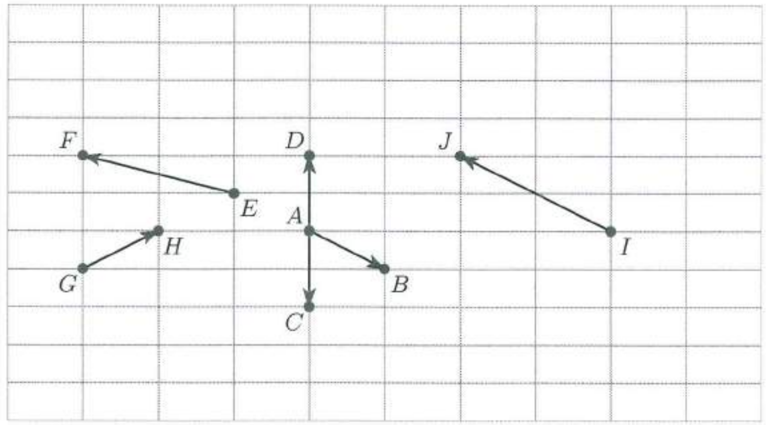


a) Représenter dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ les vecteurs

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\vec{b} + 2\vec{c}$ et donner leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$.

25. On considère la figure ci-dessous et la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.



On pose $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GH}$, $\vec{c} = \overrightarrow{IJ}$ et $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$.

a) Représenter les vecteurs $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donnés dans la base $\mathcal{B}$.

b) Représenter les vecteurs $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b})$.

c) Trouver les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

d) Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{a}\,;\vec{b})$.

e) Déterminer deux nombres réels λ et μ tels que $\vec{a}+\lambda\vec{b}=\mu\vec{c}$.

26. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\8\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\18\\-11\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}35\\14\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{e}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{d}$, $\vec{v}=-\vec{c}+3\vec{e}$, $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}+2\vec{d}$ et $\vec{t}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

b) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.

27. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\6\\15\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-3\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}-15\\-10\\-25\end{pmatrix}$ et $\vec{g}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-12\end{pmatrix}$.

Déterminer ceux qui sont colinéaires.

28. Déterminer si les trois vecteurs suivants sont coplanaires.

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\12\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\13\\-4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{5}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2\\-\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-10\\\frac{7}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{16}{3}\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

29. Exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-8\\6\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-16\\10\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\52\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}11\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\-12\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix}$

30. On considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}+2\vec{a}=\vec{b}-2\vec{c}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $6(\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{w})+2\vec{b}=\vec{0}$.

c) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que $5\vec{t}-\vec{a}=\frac{3}{2}(2\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{t})+\frac{5}{6}\vec{b}$.

31. Utiliser des déterminants pour trouver parmi les vecteurs suivants lesquels sont colinéaires.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{21}{2}\\-15\end{pmatrix}$ $\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{12}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ $\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-4\end{pmatrix}$

32. Utiliser des déterminants pour trouver parmi les vecteurs suivants lesquels sont coplanaires.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}$ $\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\vec{d}=\begin{pmatrix}-13\\9\\13\end{pmatrix}$

Repères

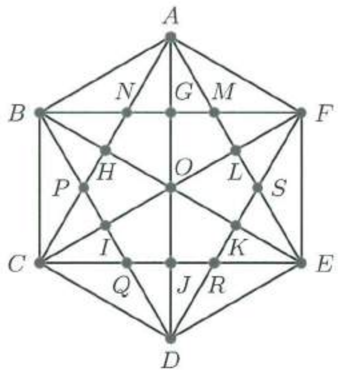
Sauf mention contraire, dans les exercices suivants, les coordonnées des points sont données dans un repère $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ du plan ou $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ de l'espace. Les composantes des vecteurs sont exprimées dans les bases associées.

33. On considère l'hexagone régulier ci-contre.

Donner les coordonnées des 19 points représentés dans le repère

a) $\mathcal{R}_1 = (O; \overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF})$

b) $\mathcal{R}_2 = (O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$

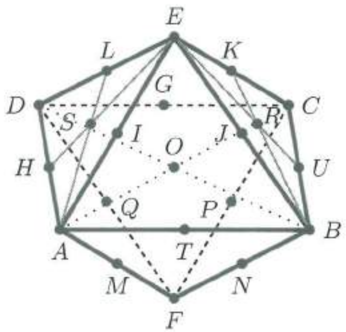


34. On considère l'octaèdre régulier ci-contre.

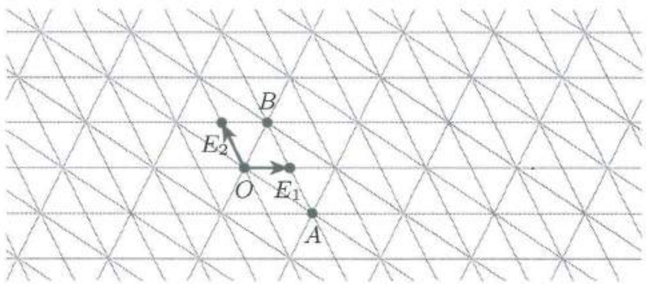
Donner les coordonnées des 21 points représentés dans le repère

a) $\mathcal{R}_1 = (O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OE})$

b) $\mathcal{R}_2 = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$



35. On considère la figure ci-dessous.



a) Représenter les points suivants dont les coordonnées sont données dans le repère $(O; \overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$.

$M(4;2)$	$N(-3;3)$	$P(-4;-4)$	$Q(2;3)$	$R(1;-3)$
$S(0;-3)$	$T(5;0)$	$U(-1;-4)$	$V(-2;3)$	

b) Trouver les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

c) Calculer les composantes dans la base $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$ des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{UP}$ et $\overrightarrow{PS}$.

36. On considère les points $A(-5;3)$, $B(6;1)$, $C(0;2)$, $D(7;7)$, $E(-3;-5)$ et $F(-6;0)$.

a) Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, puis déterminer leurs composantes.

b) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{CD}$.

c) Déterminer les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{EF}$.

d) Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PF}$.

37. On considère les points $A(6;1)$, $B(1;5)$ et $C(-4;1)$. Déterminer les coordonnées du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

38. Soient les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

39. Soient $A(-3;1)$ et $B(6;5)$. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$.

40. Soient $A(1;-3;8)$ et $B(10;9;2)$. Déterminer les coordonnées du point P situé au tiers du segment $[AB]$ à partir de A.

41. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

b) En déduire les coordonnées de G à partir de celles de A, de B et de C.

42. On considère les points $A(-3;4)$, $B(5;-2)$ et $C(1;8)$.

a) Trouver les coordonnées des milieux respectifs A', B' et C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

c) En déduire les composantes de la somme $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

43. Dans un triangle ABC, on considère A' le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Montrer que

a) $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

44. On considère les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

45. a) Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on connaît $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

b) Même question pour $A(10;6)$, $B(-6;4)$ et $G(-1;-4)$.

46. On considère le point $P(\alpha;\beta)$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$. Déterminer un point X de l'axe Ox et un point Y de l'axe Oy tels que P soit le milieu du segment $[XY]$.

47. Soient λ un nombre réel et ABC un triangle. On considère les points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{BA'} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = \lambda\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que, pour tout point M, on a
$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

b) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

48. Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme.

49. On considère les points $M(1;2)$, $N(-1;0)$ et $P(1;-1)$. Trouver le point Q tel que le quadrilatère $MNPQ$ soit un parallélogramme.

50. On considère les points $R(2;5)$, $S(1;2)$, $T(x;3)$ et $U(6;y)$. Trouver les nombres x et y pour que le quadrilatère $RSTU$ soit un parallélogramme.

51. On considère les points $R(-3;-2)$, $S(2;5)$, $T(3;9)$ et $U(-10;y)$. Trouver le nombre y pour que le quadrilatère $RSTU$ soit un trapèze dont les bases sont $[RS]$ et $[TU]$.

52. On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

53. On considère les points $A(0;1)$, $B(1;1)$, $P(\frac{1}{2};0)$ et $Q(1;\frac{1}{4})$. Trouver le point M de la droite (AB) et le point N de l'axe Oy pour que le quadrilatère $PQMN$ soit un parallélogramme.

54. On considère deux parallélogrammes $ABCD$ et $AB'CD'$ ayant deux sommets communs A et C. Montrer que le quadrilatère $BB'DD'$ est un parallélogramme.

55. On considère les points A, B et C ci-dessous. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P, et Q des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 respectifs des triangles ABC et CDA.

a) $A(-4;1;3)$, $B(4;3;6)$ et $C(4;-6;3)$

b) $A(-1;8;2)$, $B(4;5;-1)$ et $C(2;7;1)$

56. On considère deux sommets A et B d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection P de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

a) $A(3;-2;5)$, $B(7;5;10)$ et $P(5;4;6)$

b) $A(5;4;-4)$, $B(9;6;3)$ et $P(6;-1;0)$

57. On considère les quatre points $A(3;-2;1)$, $B(1;5;-2)$, $C(0;-4;5)$ et $D(-4;-8;7)$. Calculer les coordonnées des points M, N, P et Q, milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

58. On considère les points $M(0;8;-2)$ et $N(4;2;4)$.

a) Trouver les coordonnées des images M' et N' de M et N par la symétrie centrale de centre $P(-2;-1;7)$.

b) Trouver les coordonnées des images M'' et N'' de M et N par l'homothétie de centre $H(2;-3;5)$ et de rapport -2.

59. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(2;3)$, $B(1;6)$ et $C(4;-3)$

b) $A(1;-1)$, $B(3;1)$ et $C(-2;3)$

c) $A(-56;84)$, $B(16;-24)$ et $C(-8;12)$

60. Les points A, B et C ci-dessous sont-ils alignés ?

a) $A(3;1;-1)$, $B(2;0;4)$ et $C(-3;2;5)$

b) $A(2;-1;0)$, $B(1;1;-2)$ et $C(4;-5;-11)$

c) $A(3;1;\frac{1}{2})$, $B(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ et $C(9;4;\frac{1}{2})$

d) $A(13;-22;2)$, $B(-5;-10;26)$ et $C(-38;12;60)$

e) $A(\frac{4}{3};-1;-\frac{2}{3})$, $B(\frac{23}{6};-\frac{11}{6};\frac{8}{3})$ et $C(-\frac{55}{6};\frac{5}{2};-\frac{44}{3})$

61. Déterminer le nombre réel α pour que les points A, B et C ci-dessous soient alignés.

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(\alpha;1)$

b) $A(2;\alpha)$, $B(7\alpha-29;5)$ et $C(-4;2)$

62. Déterminer les nombres réels α, β et γ pour que les points suivants soient alignés.
$A(3;-5)$, $B(-4;4)$, $C(2;\alpha)$, $D(1-\beta;2+\beta)$ et $E(-11-7\gamma;13+9\gamma)$

63. Les points ci-dessous sont-ils coplanaires ?

a) $A(0;2;4)$, $B(1;-1;3)$, $C(-8;2;1)$ et $D(-6;-4;-1)$

b) $A(5;2;1)$, $B(-6;3;-2)$, $C(2;5;2)$ et $D(0;0;-2)$

c) $A(0;2;4)$, $B(1;-4;-3)$, $C(0;2;0)$ et $D(1;1;-1)$

64. Déterminer le nombre réel z pour que les points $A(1;1;9)$, $B(5;\frac{3}{2};14)$, $C(0;-3;0)$ et $D(-\frac{8}{3};-\frac{8}{3};z)$ soient coplanaires.

65. On considère les points $A(5;-3;2)$, $B(4;-5;9)$, $C(1;1;6)$, $D(2;-1;7)$, $E(\frac{16}{5};-\frac{9}{5};5)$ et $F(3;-1;4)$.

a) Montrer que les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points A, D et E, les points B, C et D et les points B, E et F.

b) Déterminer les coordonnées des milieux M, N et P des segments $[AB]$, $[CE]$ et $[DF]$ respectivement et montrer que M, N et P sont alignés.

66. On considère les points $A(2;-3;0)$, $B(4;2;5)$, $C(-3;1;4)$, $D(5;3;12)$ et $E(-8;-22;-43)$. Calculer les coordonnées des centres de gravité G_1, G_2 et G_3 des triangles ABC, BCD et CDE respectivement et montrer que ces trois points sont alignés.

Réponses aux exercices du chapitre 1

2. a) $\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

3. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

4. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{DC}$
d) $\overrightarrow{DA}$ e) $\vec{0}$ f) $2\overrightarrow{CB}$

7. a) $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ b) $\vec{y}=\vec{b}+\vec{c}$ c) $\vec{z}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

8. b) $\vec{r}=3\vec{b}$, $\vec{s}=-3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{t}=-\frac{5}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{u}=-\frac{5}{2}\vec{a}+\vec{b}$

9. a) $\overrightarrow{AG}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$
$\overrightarrow{BD}=-\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{DH}=\vec{w}$
$\overrightarrow{BF}=\vec{w}$ $\overrightarrow{BH}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{EG}=\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{EC}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

b) $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$ $\overrightarrow{EM}=\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
$\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$
$\overrightarrow{FN}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{NP}=-\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{w}$
$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}$

c) $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{t}$

10. $\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+\vec{w}$ $\overrightarrow{BD}=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{AB}=-\vec{u}+\vec{v}$ $\overrightarrow{BC}=-\vec{v}+\vec{w}$
$\overrightarrow{AD}=-\vec{v}+\vec{w}$ $\overrightarrow{SD}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

11. a) oui, $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{GH}$
b) non
c) oui, $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$
d) oui, $\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

12. a) oui, $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{EK}+2\overrightarrow{BC}$
b) oui, $\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{ID}$
c) non

13. b) droite (OA) d) parallèle à (OA) par le point B
f) droite (AB)

14. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AN}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

15. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

16. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

19. $\alpha = 3$ et $\beta = 2$

20. a) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ b) impossible
c) $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b} = 2\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b} = \dots$
Il y a une infinité de possibilités.

21. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

22. $\vec{e}$ est colinéaire à tous ; $\vec{a}$, $\vec{d}$ et $\vec{h}$; $\vec{b}$ et $\vec{i}$; $\vec{c}$ et $\vec{g}$

23. $\lambda = \frac{35}{29}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ -\frac{30}{29} \end{pmatrix}$

24. $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

25. c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

e) $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad \mu = \frac{3}{4}$

26. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 72 \\ 14 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -21 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{419}{6} \\ \frac{41}{2} \\ -\frac{46}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

27. $\vec{d}$ colinéaire à tous ; $\vec{a}$, $\vec{e}$ et $\vec{g}$; $\vec{b}$ et $\vec{f}$

28. a) oui b) non c) non d) oui

29. a) $4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}$ b) $\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$ c) $3\vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$
d) impossible

30. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 54 \\ -34 \\ 14 \end{pmatrix}$

31. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

32. $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires.

33. a) $A(-1;1)$ $\quad B(-1;0)$ $\quad C(0;-1)$ $\quad D(1;-1)$ $\quad E(1;0)$
$F(0;1)$ $\quad G(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $\quad H(-\frac{1}{2};0)$ $\quad I(0;-\frac{1}{2})$ $\quad J(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$
$K(\frac{1}{2};0)$ $\quad L(0;\frac{1}{2})$ $\quad M(-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ $\quad N(-\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ $\quad O(0;0)$
$P(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ $\quad Q(\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$ $\quad R(\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$ $\quad S(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

b) $A(1;0)$ $B(1;1)$ $C(0;1)$ $D(-1;0)$ $E(-1;-1)$
$F(0;-1)$ $G(\frac{1}{2};0)$ $H(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $I(0;\frac{1}{2})$ $J(-\frac{1}{2};0)$
$K(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $L(0;-\frac{1}{2})$ $M(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ $N(\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ $O(0;0)$
$P(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$ $Q(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $R(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$ $S(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$

34. a) $A(1;0;0)$ $B(0;1;0)$ $C(-1;0;0)$ $D(0;-1;0)$
$E(0;0;1)$ $F(0;0;-1)$ $G(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0)$ $H(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0)$
$I(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $J(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $K(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $L(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
$M(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2})$ $N(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $O(0;0;0)$ $P(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2})$
$Q(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $R(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $S(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $T(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$
$U(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$

b) $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$ $F(1;1;-1)$ $G(\frac{1}{2};1;0)$ $H(0;\frac{1}{2};0)$
$I(0;0;\frac{1}{2})$ $J(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$ $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $L(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
$M(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $N(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ $O(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ $P(1;1;-\frac{1}{2})$
$Q(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2})$ $R(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $S(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $T(\frac{1}{2};0;0)$
$U(1;\frac{1}{2};0)$

35. a) $M(1;3)$ $N(-3;0)$ $P(0;-4)$ $Q(-\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ $R(2;-1)$
$S(\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$ $T(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$ $U(\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$ $V(-\frac{5}{2};\frac{1}{2})$

b) $\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP}=\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PM}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{ST}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{UP}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

36. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$
b) $M(4;0)$ c) $N(-2;-2)$ d) $P(-\frac{11}{2};\frac{3}{2})$

37. $D(1;-3)$

38. a) $\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-4\\-6\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}7\\6\\-4\end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix}9\\-4\\10\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\8\\-6\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}33\\-14\\32\end{pmatrix}$

39. $M(\frac{3}{2};3)$

40. $P(4;1;6)$

42. $A'(3;3)$, $B'(-1;6)$ et $C'(1;1)$;
$\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}=\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$;
$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

44. $M_1(\frac{3}{2};4)$, $M_2(-1;\frac{7}{2})$, $M_3(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ et $G(-\frac{1}{3};\frac{10}{3})$

45. a) $C(5;7)$ b) $C(-7;-22)$

46. $X(2\alpha;0)$ et $Y(0;2\beta)$

49. $Q(3;1)$

50. $x=5$ et $y=6$

51. $y=-\frac{46}{5}$

52. a) $C(-2;-2)$ b) $D(0;-6)$

53. $M(\frac{1}{2};1)$, $N(0;\frac{3}{4})$

55. a) $D(-4;-8;0)$ $M(0;2;\frac{9}{2})$ $N(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2})$ $P(0;-7;\frac{3}{2})$
$Q(-4;-\frac{7}{2};\frac{3}{2})$ $G_1(\frac{4}{3};-\frac{2}{3};4)$ $G_2(-\frac{4}{3};-\frac{13}{3};2)$

b) $D(-3;10;4)$ $M(\frac{3}{2};\frac{13}{2};\frac{1}{2})$ $N(3;6;0)$ $P(-\frac{1}{2};\frac{17}{2};\frac{5}{2})$
$Q(-2;9;3)$ $G_1(\frac{5}{3};\frac{20}{3};\frac{2}{3})$ $G_2(-\frac{2}{3};\frac{25}{3};\frac{7}{3})$

56. a) $C(7;10;7)$ et $D(3;3;2)$ b) $C(7;-6;4)$ et $D(3;-8;-3)$

57. $M(2;\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2})$, $P(-2;-6;6)$ et $Q(-\frac{1}{2};-5;4)$

58. a) $M'(-4;-10;16)$ et $N'(-8;-4;10)$
b) $M''(6;-25;19)$ et $N''(-2;-13;7)$

59. a) oui b) non c) oui

60. a) non b) non c) oui d) non e) oui

61. a) 5 b) 1 ou $\frac{32}{7}$

62. $\alpha = -\frac{26}{7}$ $\beta = \frac{31}{2}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

63. a) oui b) oui c) non

64. $z = -2$

65. $M(\frac{9}{2}; -4; \frac{11}{2})$, $N(\frac{21}{10}; -\frac{2}{5}; \frac{11}{2})$ et $P(\frac{5}{2}; -1; \frac{11}{2})$

66. $G_1(1;0;3)$, $G_2(2;2;7)$ et $G_3(-2;-6;-9)$

2 Norme, angle et produit scalaire

Le chapitre précédent a permis d'introduire le concept de vecteur et de définir deux opérations fondamentales : l'addition vectorielle et la multiplication par un nombre réel. Il s'agit maintenant de présenter les notions nécessaires à la résolution de problèmes métriques comme le calcul de la distance entre deux points ou de l'angle de deux vecteurs. Ces notions sont la norme d'un vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs.

2.1 Norme d'un vecteur

Il a déjà été mentionné au paragraphe 1.2.2 que la norme d'un vecteur $\vec{a}$ est la longueur d'un de ses représentants. On la note $\|\vec{a}\|$.

Propriétés. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs et λ un nombre réel.*

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$

2. $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ *(inégalité triangulaire)*

Un vecteur est **unitaire** si sa norme est égale à 1.

2.2 Angle de deux vecteurs

On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls et O un point quelconque. On sait qu'il existe exactement un point A et un point B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.