

N.E. - chapitre 5 : Fonctions rationnelles

Série A

Série B

Exercice 1. (1+1=2 pts)

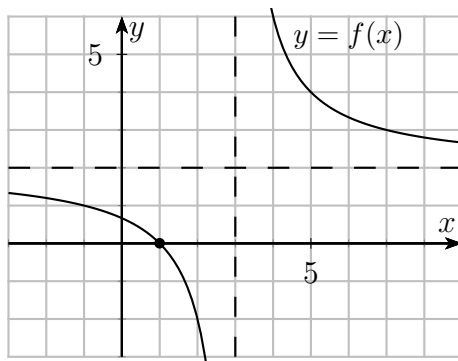
$$a) \frac{x-1}{3(2x+1)(2x-1)} \Rightarrow ED = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) \frac{x-2}{x(x+3)} \Rightarrow ED = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$$

$$\frac{x+1}{2(3x+1)(3x-1)} \Rightarrow ED = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$\frac{x-3}{x(x+2)} \Rightarrow ED = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$$

Exercice 2. (1+4=5 pts)



$$a) \bullet Z_f = \{1\}$$

• tableau de signes de f :

x	1	3
$\text{sgn}(f)$	+	-

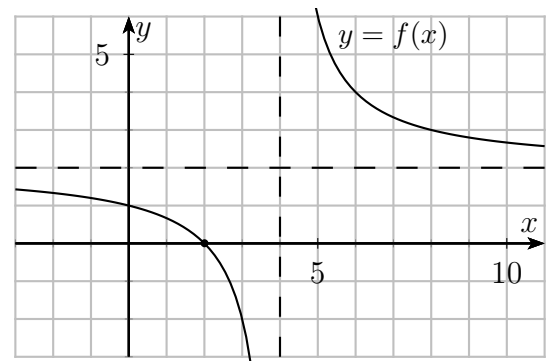
$$b) \bullet f \text{ homographique} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\bullet Z_f = \{1\} \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$$

$$\bullet AV : x=3 \Rightarrow 3c+d=0 \Rightarrow d=-3c$$

$$\bullet AH : y=2 \Rightarrow \frac{a}{c}=2 \Rightarrow a=2c$$

$$\bullet \Rightarrow f(x) = \frac{2x-2}{x-3}$$



$$\bullet Z_f = \{2\}$$

• tableau de signes de f :

x	2	4
$\text{sgn}(f)$	+	-

$$\bullet f \text{ homographique} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\bullet Z_f = \{2\} \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow b=-2a$$

$$\bullet AV : x=4 \Rightarrow 4c+d=0 \Rightarrow d=-4c$$

$$\bullet AH : y=2 \Rightarrow \frac{a}{c}=2 \Rightarrow a=2c$$

$$\bullet \Rightarrow f(x) = \frac{2x-4}{x-4}$$

Exercice 3. (4 pts)

$$\frac{x}{x+5} - \frac{x-1}{x-5} = \frac{x^2 - 13x}{(x+5)(x-5)}$$

$$\bullet ED = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-5) - (x-1)(x+5) - (x^2 - 13x)}{(x+5)(x-5)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow -1 \in ED ; 5 \notin ED$$

$$\Rightarrow S = \{-1\}$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x^2 - 5x}{(x+3)(x-3)}$$

$$\bullet ED = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-3) - (x-2)(x+3) - (x^2 - 5x)}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow -2 \in ED ; 3 \notin ED$$

$$\Rightarrow S = \{-2\}$$

Exercice 4. (4 pts)

$$\frac{3x}{x+4} \leq \frac{1}{x}$$

$$\bullet ED = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - (x+4)}{x(x+4)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(3x-4)(x+1)}{x(x+4)} \leq 0$$

$$\bullet \text{ Soit } f(x) = \frac{(3x-4)(x+1)}{x(x+4)}$$

$$\bullet Z_f = \left\{ -1; \frac{4}{3} \right\} \quad \text{indéfinitions} = \{-4; 0\}$$

• tableau de signes de f :

x	-4	-1	0	4/3
sgn(f)	+		-	0
	+		-	+

$$\Rightarrow S =]-4; -1] \cup]0; 4/3]$$

$$\frac{4x}{x+5} \leq \frac{1}{x}$$

$$\bullet ED = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - (x+5)}{x(x+5)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(4x-5)(x+1)}{x(x+5)} \leq 0$$

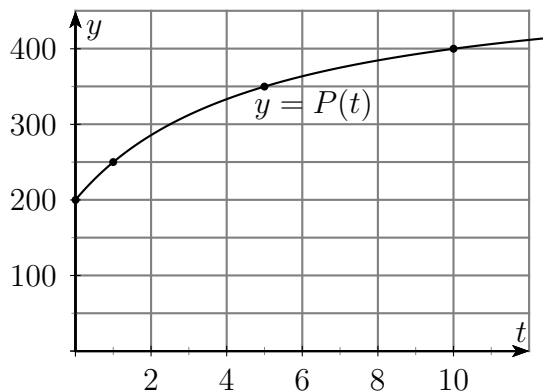
$$\bullet \text{ Soit } f(x) = \frac{(4x-5)(x+1)}{x(x+5)}$$

$$\bullet Z_f = \left\{ -1; \frac{5}{4} \right\} \quad \text{indéfinitions} = \{-5; 0\}$$

• tableau de signes de f :

x	-5	-1	0	5/4
sgn(f)	+		-	0
	+		-	+

$$\Rightarrow S =]-5; -1] \cup]0; 5/4]$$

Exercice 5. (5 pts)1) t = la durée en années dès le 01.01.2015.

2) $\frac{500(t+2)}{t+5} > 400 ; t \geq 0$

3) $\Rightarrow \frac{500(t+2) - 400(t+5)}{t+5} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{100(t-10)}{t+5} > 0$$

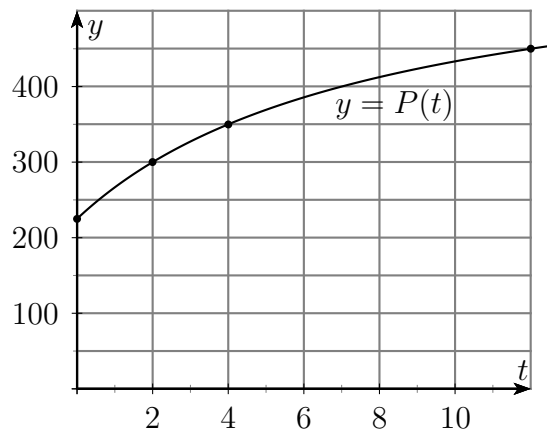
• Soit $f(t) = \frac{t-10}{t+5}$

• $Z_f = \{10\}$ indéfinition = $\{-5\}$

• tableau de signes de f :

t	-5	0	10
$\text{sgn}(f)$	///	-	+

$$\Rightarrow S =] -\infty ; -5[\cup] 10 ; +\infty [$$

4) $\Rightarrow$ On aura plus de 400 chamois à partir du 1er janvier 2025.1) t = la durée en années dès le 01.01.2016.

2) $\frac{600(t+3)}{t+8} > 450 ; t \geq 0$

3) $\Rightarrow \frac{600(t+3) - 450(t+8)}{t+8} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{150(t-12)}{t+8} > 0$$

• Soit $f(t) = \frac{t-12}{t+8}$

• $Z_f = \{12\}$ indéfinition = $\{-8\}$

• tableau de signes de f :

t	-8	0	12
$\text{sgn}(f)$	///	-	+

$$\Rightarrow S =] -\infty ; -8[\cup] 12 ; +\infty [$$

4) $\Rightarrow$ On aura plus de 450 chamois à partir du 1er janvier 2028.